

MAT 4112

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Robert Bédard
UQAM

Notes pour le cours Équations aux dérivées partielles (Sigle: MAT 4112)
offert par le département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal.

PRÉFACE

Ces notes s'adressent aux étudiantes et étudiants du cours Équations aux dérivées partielles (Sigle: MAT4112). Elles constituent la matière d'un cours de premier cycle d'une quarantaine d'heures. Elles sont divisées en douze chapitres. On y traite entre autres de la classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2, de la méthode de séparation de variables, des séries de Fourier et leurs généralisations, des problèmes de Sturm-Liouville. Les problèmes classiques: l'équation d'onde, de la chaleur et du potentiel pour des domaines spatiaux bornés sont étudiés. Nous terminons en introduisant des méthodes numériques pour résoudre l'équation de la chaleur.

Dans des éditions ultérieures, d'autres chapitres devront être ajoutés; par exemple, pour traiter des problèmes non homogènes ou encore de traiter plus les méthodes numériques. Il faudra aussi compléter ces notes en y ajoutant les problèmes classiques: l'équation d'onde, de la chaleur et du potentiel pour des domaines spatiaux non bornés.

Quelques exercices sont inclus à la fin de chaque chapitre. Ceux marqués d'un (†) sont considérés comme étant difficile et nécessitent parfois des notions vues dans d'autres cours de mathématiques. Il y a très peu d'exercices de ce type. Ils ne sont là que pour éveiller la curiosité des étudiantes et étudiants sur d'autres sujets mathématiques.

Les preuves de certains des théorèmes ou propositions ne sont qu'esquisser dans le texte. J'ai préféré procéder ainsi pour ne pas trop alourdir ces notes de cours en espérant que les étudiantes et étudiants ne m'en tiendront pas trop rigueur. Les solutions de tous les exercices sont présentées à la fin de ce recueil.

D'avance je remercie toute personne qui me signalera les lapsus et autres coquilles qui m'auraient échappé.

Robert Bédard, juillet 2007.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1: Les premiers pas dans la théorie	1
Chapitre 2: Les équations linéaires d'ordre 1	7
Chapitre 3: Un peu d'ordre maintenant	19
Chapitre 4: Quelques mots sur les séries de Fourier	29
Chapitre 5: Convergence des séries de Fourier	39
Chapitre 6: Retour sur l'équation d'onde	53
Chapitre 7: L'équation de la chaleur: cas de la dimension 1	67
Chapitre 8: L'équation de Laplace sur un rectangle	75
Chapitre 9: L'équation d'onde pour une membrane circulaire	81
Chapitre 10: Les problèmes de Sturm-Liouville	97
Chapitre 11: L'équation du potentiel	109
Chapitre 12: Introduction aux méthodes numériques	121
Annexe 1: Solutions des exercices	143
Annexe 2: Aide-mémoire	217

CHAPITRE 1

Les premiers pas dans la théorie.

Il existe une infinité d'équations aux dérivées partielles. Il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes celles-ci. Il faut donc se résoudre à restreindre notre champ d'étude. On réalisera ceci en exigeant que l'équation satisfasse certaines propriétés, par exemple qu'elle soit linéaire. C'est ce que nous décrirons dans ce premier chapitre. Nous énumérerons aussi quelques-unes des équations aux dérivées partielles classiques. Beaucoup de domaines sont fortement dépendants de la théorie des équations aux dérivées partielles. L'acoustique, l'aérodynamique, la dynamique des fluides, l'élasticité, l'électrodynamique, la géophysique, la mécanique quantique, la météorologie, l'océanographie, la physique des plasmas sont quelques-uns de ces domaines.

Une **équation aux dérivées partielles** est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u ci-dessous) et les variables indépendantes ($x, y, \dots$ ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme:

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right) = 0 \quad (\text{eq. [1]})$$

où F est une fonction de plusieurs variables. Si n est le nombre de variables indépendantes, alors nous considérons le n -uplet de variables indépendantes $(x, y, \dots)$ comme appartenant à un domaine $\mathcal{D}$ convenable de $\mathbf{R}^n$. Nous utiliserons EDP comme abréviation d'équation aux dérivées partielles.

Une **solution** de l'équation [1] est une fonction $u = u(x, y, \dots)$ des variables indépendantes $x, y, \dots$ dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux points de $\mathcal{D}$ et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation [1], celle-ci est satisfaite.

Par exemple,

$$x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \sin(x^2 + y^2)$$

est un exemple d'EDP pour le domaine $\mathcal{D} = \mathbf{R}^2$. Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme de l'équation [1] ci-dessus. Il suffit de noter qu'elle est équivalente à l'équation

$$x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sin(x^2 + y^2) = 0$$

Similairement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

est une autre EDP pour le domaine $\mathcal{D} = \mathbf{R}^2$ et $u(x, y) = (x + y)^3$, $u(x, y) = \sin(x - y)$ sont deux solutions de cette dernière équation. En effet, si $u(x, y) = (x + y)^3$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3(x + y)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x + y)^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6(x + y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6(x + y)$$

et nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6(x + y) - 6(x + y) = 0.$$

Si $u(x, y) = \sin(x - y)$, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos(x - y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x - y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin(x - y)$$

et nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin(x-y) - (-\sin(x-y)) = 0.$$

On voit par cet exemple que les solutions d'une EDP peuvent être très différentes. Il y a en général une infinité de solutions pour une EDP donnée. Prenons par exemple l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } u = u(x, y).$$

Alors toutes les fonctions $u(x, y) = f(x)$ sont des solutions de cette équation. Nous verrons plus tard qu'en plus de l'EDP, il y a des conditions initiales et/ou aux frontières dans un problème typique et que ces dernières ont comme conséquence de réduire le nombre de solutions jusqu'à une seule dans une situation idéale.

L'**ordre** d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé. Par exemple,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 = e^x$$

est une EDP d'ordre 3.

Pour ce qui suit, un **opérateur** L désignera une transformation qui associe à toute "bonne" fonction $u = u(x, y, \dots)$ de plusieurs variables $x, y, \dots$ sur un domaine $\mathcal{D}$: une fonction $Lu = Lu(x, y, \dots)$ sur ce même domaine. Le qualificatif "bonne" signifie ici que Lu est bien définie. Parfois il faudra exiger que les dérivées partielles de u existent jusqu'à un certain ordre. Si $u = u(x, y)$, alors

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial x}$$

est un exemple d'opérateur. Cependant pour que Lu soit bien définie, il est nécessaire que la dérivée partielle de u par rapport à x existe sur le domaine $\mathcal{D}$; c'est ce que signifie "bonne" dans ce cas-ci. L'équation [1] peut donc s'écrire sous la forme $L(u) = f(x, y, \dots)$ où $f(x, y, \dots)$ est une fonction des variables indépendantes, L est un opérateur et u est une fonction à déterminer. Un opérateur L est **linéaire** si et seulement si $L(au + bv) = aL(u) + bL(v)$ quels que soient les nombres réels a, b et les "bonnes" fonctions u, v . Implicitement nous supposons que la fonction $au + bv$ est aussi une "bonne" fonction.

Nous pouvons maintenant énoncer les premières restrictions aux équations aux dérivées partielles étudiées dans ces notes de cours. Une EDP est dite **linéaire** si elle est de la forme $Lu = f(x, y, \dots)$ où L est un opérateur linéaire, $f(x, y, \dots)$ est une fonction des n variables indépendantes, $(x, y, \dots)$ appartient à un domaine $\mathcal{D}$ convenable de $\mathbf{R}^n$ et u est la fonction recherchée. Si en plus $f(x, y, \dots) \equiv 0$, on dit alors que l'équation est linéaire **homogène**. Sinon elle est **non-homogène**.

$$u + y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

est une EDP linéaire non-homogène (pour $\mathcal{D} = \mathbf{R}^2$), où $u = u(x, y)$. Dans cet exemple,

$$Lu = u + y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

est un opérateur linéaire et $f(x, y) \equiv 1$. En effet L est linéaire, car si a et b sont deux nombres réels quelconques et u et v deux "bonnes" fonctions (i.e. il faut que u et v soient des fonctions dont les dérivées partielles apparaissant dans la définition de Lu existent sur $\mathcal{D}$), alors

$$\begin{aligned} L(au + bv) &= (au + bv) + y \frac{\partial^2 (au + bv)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 (au + bv)}{\partial y^2} \\ &= a \left(u + y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + b \left(v + y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= aL(u) + bL(v). \end{aligned}$$

Une autre EDP (pour $\mathcal{D} = \mathbf{R}^2$) est

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + xu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sin(y),$$

où $u = u(x, y)$. Cependant cette équation n'est pas linéaire. Dans ce cas,

$$Lu = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + xu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

n'est pas un opérateur linéaire et $f(x, y) = \sin(y)$. Pour vérifier que Lu n'est pas linéaire, il suffit de considérer par exemple les deux nombres réels $a = b = 1$ et les deux fonctions $u(x, y) = v(x, y) = x^2$. Avec ces choix, nous obtenons que $L(u + v) = 16x$, $Lu = Lv = 4x$ et clairement $L(u + v) \neq Lu + Lv$.

Une EDP linéaire d'ordre 2 avec n variables indépendantes sera donc de la forme

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = D \quad (\text{éq. [2]})$$

où A_{ij} , B_i , C et D sont des fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dans cette situation, nous supposons que les solutions recherchées u ont toutes leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

continues sur $\mathcal{D}$. Ceci a comme conséquence que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Nous pouvons alors supposer sans perte de généralités que $A_{ij} = A_{ji}$. Il suffit de remplacer chacune des fonctions A_{ij} avec $i \neq j$ par $(A_{ij} + A_{ji})/2$. L'EDP n'est pas modifié et alors nous avons bien avec ces nouvelles fonctions que $A_{ij} = A_{ji}$. Si $D \equiv 0$, alors l'équation [2] est linéaire homogène.

Certaines des équations classiques de la physique sont des EDP linéaires homogènes d'ordre 2. Trois de ces équations sont les suivantes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{où } u = u(x, y, z, t) \quad (\text{éq. [3]})$$

est l'**équation d'onde**;

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{où } u = u(x, y, z, t) \quad (\text{éq. [4]})$$

est l'**équation de la chaleur**;

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{où } u = u(x, y, z, t) \quad (\text{éq. [5]})$$

est l'**équation de Laplace ou du potentiel**. La recherche de solutions de ces trois premières équations sera étudiée dans des chapitres subséquents. Il existe d'autres exemples importants d'EDP. Ainsi en finance, le prix $c = c(t, S)$ d'un option d'achat (sous certaines conditions) satisfait

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0 \quad (\text{éq. [6]})$$

qui est l'**équation de Black-Scholes**. C'est aussi une EDP linéaire homogène d'ordre 2.

Nous allons maintenant présenter un argument heuristique pour justifier l'équation d'onde dans le cas d'une membrane:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Nous supposons que les cinq conditions suivantes sont satisfaites.

- La membrane est flexible et élastique.
- La tension est de norme constante T_0 .
- La membrane a une densité ρ constante.
- Le poids de la membrane est négligeable par rapport à la tension.
- Le déplacement de la membrane est petit comparativement au diamètre minimal de celle-ci.

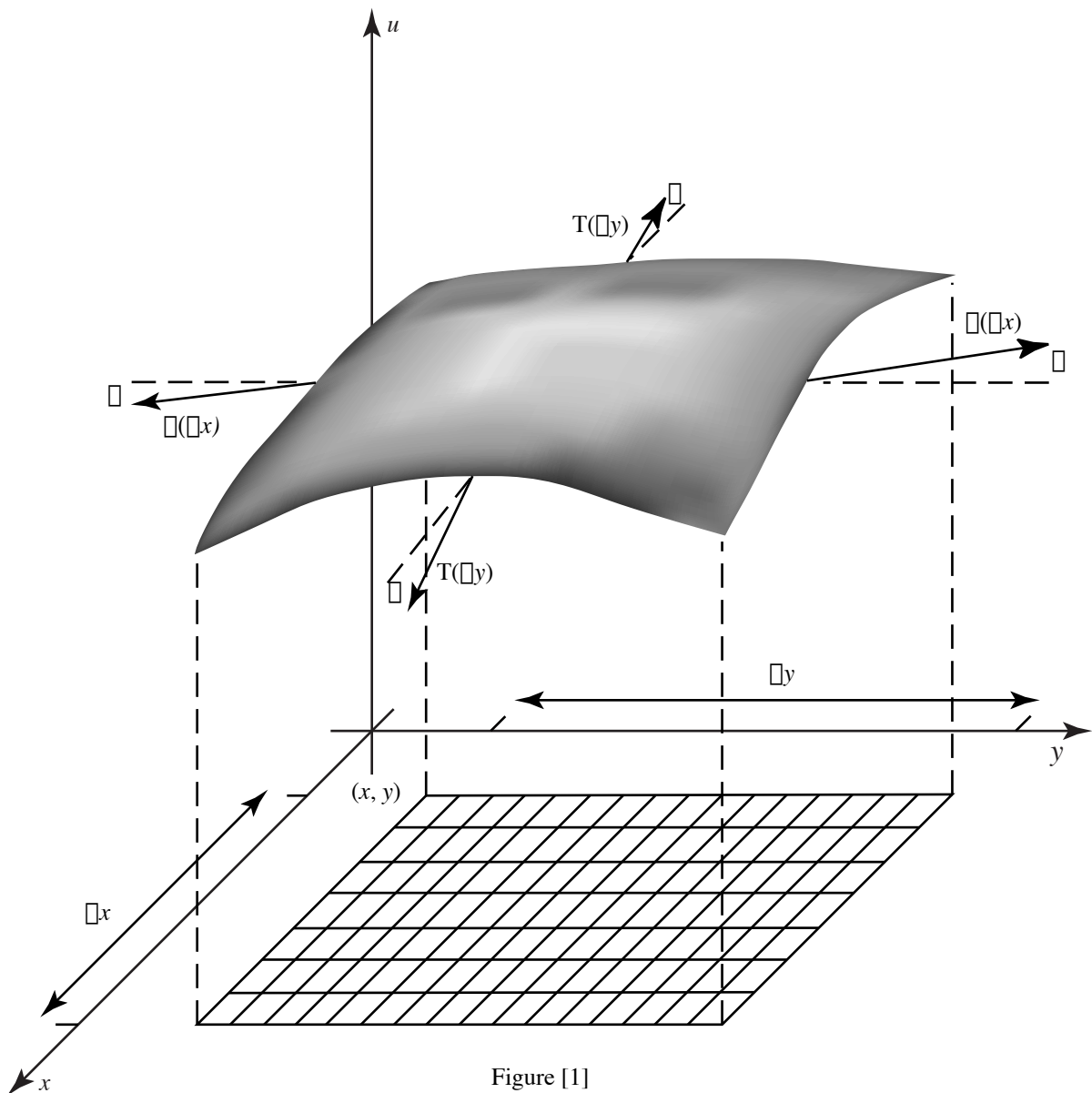


Figure [1]

La première condition a comme conséquence que la tension agit dans la direction du profil de la membrane. La dernière condition signifie que le déplacement horizontal de la membrane est approximativement nul et nous le supposons nul dans ce qui suit.

Soit $u = u(x, y, t)$, le déplacement vertical de la membrane au-dessus du point (x, y) à l'instant t . Considérons la portion de la membrane au-dessus du rectangle ayant pour sommets: (x, y) , $(x + \Delta x, y)$, $(x, y + \Delta y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Nous supposons que Δx et Δy sont petits. Nous avons illustré dans la figure [1] les forces de tension agissant sur cette portion de membrane. Les angles α , β , γ et δ sont les angles faits par ces forces avec l'horizontale et les points (x_1, y) , $(x_2, y + \Delta y)$, (x, y_1) et $(x + \Delta x, y_2)$ sont ceux où les forces de tension agissent sur les bords de cette portion de membrane.

La force verticale sera

$$F_{\text{vert}} = T_0(\Delta x) \sin(\beta) - T_0(\Delta x) \sin(\alpha) + T_0(\Delta y) \sin(\gamma) - T_0(\Delta y) \sin(\delta).$$

Il faut noter que les angles α , β , γ et δ sont presque nuls. Nous pouvons donc utiliser les approximations suivantes: $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha)$, $\sin(\beta) \approx \tan(\beta)$, $\sin(\gamma) \approx \tan(\gamma)$ et $\sin(\delta) \approx \tan(\delta)$. Après substitution, nous obtenons

$$F_{\text{vert}} = T_0(\Delta x)(\tan(\beta) - \tan(\alpha)) + T_0(\Delta y)(\tan(\gamma) - \tan(\delta)) = \rho(\Delta A) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

où $\Delta A \approx (\Delta x)(\Delta y)$ est l'aire de la portion de la membrane. Par définition de la dérivée partielle et comme la tension agit dans la direction du profil de la membrane, nous avons que

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y), \quad \tan(\beta) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y + \Delta y), \quad \tan(\delta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) \quad \text{et} \quad \tan(\gamma) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_2).$$

Nous obtenons ainsi après substitution dans l'expression ci-dessus pour F_{vert} que

$$F_{\text{vert}} = \rho(\Delta x)(\Delta y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0(\Delta x) \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y) \right) + T_0(\Delta y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) \right).$$

Conséquemment

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{1}{(\Delta y)} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y) \right) + \frac{T_0}{\rho} \frac{1}{(\Delta x)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) \right).$$

En passant à la limite (Δx) , $(\Delta y) \rightarrow 0$, nous aurons alors $x_1, x_2 \rightarrow x$; $y_1, y_2 \rightarrow y$ et

$$\frac{1}{(\Delta y)} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y) \right) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(\Delta x)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) \right) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

De tout ce qui précède, nous pouvons donc conclure que $u = u(x, y, t)$ satisfait l'équation d'onde

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{où} \quad c^2 = \frac{T_0}{\rho}.$$

Pour clore ce chapitre, nous allons décrire deux propriétés des équations linéaires. La première est le **principe de superposition** dans le cas des équations linéaires homogènes et la seconde concerne la relation entre les solutions d'une EDP linéaire non-homogène et celles de son EDP linéaire homogène associée. Ces propriétés sont présentées dans la proposition suivante.

Proposition 1 a) Soit une EDP linéaire homogène $Lu = 0$ pour laquelle L est un opérateur linéaire. Si u_1 , u_2 sont deux solutions de cette EDP et $a, b \in \mathbf{R}$, alors $au_1 + bu_2$ est aussi une solution. Ceci est le principe de superposition. Ici nous supposons que l'ensemble des "bonnes" fonctions pour lesquelles L est défini forme un espace vectoriel et dans ce cas, le principe de superposition affirme que l'ensemble des solutions d'une EDP linéaire homogène est un sous-espace de l'espace des "bonnes" fonctions.

b) Soit une EDP linéaire $Lu = f(x, y, \dots)$ pour laquelle L est un opérateur linéaire. Si u_1, u_2 sont deux solutions de cette EDP, alors $u_2 - u_1$ est une solution de l'équation linéaire homogène associée $Lu = 0$. Ce résultat signifie que si nous connaissons toutes les solutions de $Lu = 0$ et que nous connaissons une solution particulière u_1 de $Lu = f(x, y, \dots)$, alors nous connaissons toutes les solutions de cette dernière équation. En effet, elles sont toutes de la forme $v + u_1$ où v est une solution de $Lu = 0$.

Preuve: a) Il suffit de noter que $L(au_1 + bu_2) = aL(u_1) + bL(u_2) = 0$ à cause de la linéarité de L et parce que u_1 et u_2 sont des solutions de $Lu = 0$.

b) Nous avons que $Lu_1 = f(x, y, \dots)$ et que $Lu_2 = f(x, y, \dots)$. Conséquemment $L(u_2 - u_1) = Lu_2 - Lu_1 = f(x, y, \dots) - f(x, y, \dots) = 0$. Nous avons donc que $u_2 - u_1$ est une solution de $Lu = 0$. $\square$

* * *

Exercice 1.1

Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} &= y; & \text{b)} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 1; & \text{c)} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} &= 0; \\ \text{d)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin(x); & \text{e)} \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \sin(u) &= e^y. \end{aligned}$$

Exercice 1.2

Vérifier que les fonctions $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $u(x, y) = e^x \sin(y)$ sont bien des solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 1.3

Déterminer la solution générale de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0 \quad \text{où } u = u(x, y).$$

Exercice 1.4

Déterminer la solution générale de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{où } u = u(x, y)$$

en utilisant les nouvelles coordonnées: $\xi = x + y$ et $\eta = x - y$.

Exercice 1.5

Montrer en utilisant la règle de chaînes que l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

exprimée en coordonnées polaires: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{où } u = u(x, y, t) = u(r, \theta, t).$$

CHAPITRE 2

Les équations linéaires d'ordre 1.

Dans ce chapitre, nous allons débiter notre étude en considérant les EDP linéaires d'ordre 1. Nous allons restreindre notre discussion aux équations linéaires n'ayant que deux variables indépendantes, c'est-à-dire aux équations de la forme

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = D \quad (\text{éq. [1]})$$

pour lesquelles A, B, C et D sont des fonctions de x et y continûment différentiables sur le domaine $\mathcal{D}$. La méthode exposée pour résoudre ces équations sera la méthode des courbes caractéristiques. Cette méthode peut aussi être adaptée au cas des EDP linéaires d'ordre 1 ayant plus de deux variables indépendantes.

Ces équations apparaissent naturellement dans certains modèles. Mais elles peuvent aussi provenir d'approximations d'équations d'ordre supérieur. Par exemple, l'équation d'onde unidirectionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

est une approximation de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

lorsque le coefficient de diffusion D est presque nul.

Il est aussi possible dans certains cas de remplacer une EDP d'ordre supérieur par un système d'équations d'ordre 1. Ceci est une autre situation dans laquelle des équations d'ordre 1 apparaissent naturellement. Nous allons illustrer ceci dans deux exemples. Considérons premièrement l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{éq. [2]})$$

Nous pouvons la récrire sous la forme suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

Noter que, dans ce qui précède, nous supposons que les dérivées partielles de u d'ordre $m \leq 2$ sont continues sur $\mathcal{D}$ et ceci a comme conséquence que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}.$$

L'équation [2] est donc équivalente au système d'EDP linéaires d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons déterminer v à partir de la deuxième équation et ensuite résoudre la première équation en y substituant v .

Comme deuxième exemple, nous pouvons considérer l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{éq. [3]})$$

et tenter de procéder comme ci-dessus. Nous pouvons récrire cette équation sous la forme suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0 \quad (\text{ où } i = \sqrt{-1})$$

en supposant comme ci-dessus que les dérivées partielles de u d'ordre $m \leq 2$ sont continues sur $\mathcal{D}$. L'inconvénient avec cette façon de faire est que nous obtenons un système d'EDP dans lequel le nombre complexe i apparaît et qu'en général, nous voulons plutôt obtenir des solutions u réelles à l'équation [3]. Il y a une autre façon de réduire l'équation [3] ci-dessus. Posons

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w.$$

Alors à cause de notre hypothèse sur la continuité des dérivées partielles d'ordre 2, nous avons l'égalité des dérivées partielles mixtes et nous obtenons

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Nous obtenons ainsi que v et w satisfont le système d'EDP suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Ces deux équations sont bien connus dans la théorie des variables complexes. Ce sont les **équations de Cauchy-Riemann**. Il faut résoudre simultanément ces deux équations pour déterminer v et w . Ensuite il nous faut considérer le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = v; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = w. \end{cases}$$

Noter qu'il n'est pas toujours possible d'associer un système d'EDP linéaires d'ordre 1 à une EDP d'ordre supérieur.

Avant de décrire la méthode des courbes caractéristiques, nous allons préalablement rappeler les notions de courbe paramétrée dans le domaine ouvert $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^2$ et de dérivée directionnelle d'une fonction de deux variables dans une direction $\vec{d}$. Ces deux notions seront essentielles pour le reste de ce chapitre.

Une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée est l'image d'une fonction $\gamma : I \rightarrow \mathcal{D}$ d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ vers le domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^2$ définie par $s \mapsto \gamma(s) = (x(s), y(s))$ pour tout $s \in I$ et on dit alors que γ est une paramétrisation de $\mathcal{C}$. Dans ce qui suit, nous supposons que les fonctions $s \mapsto x(s)$ et $s \mapsto y(s)$ sont continûment dérivables sur I . Dans cette situation, le vecteur $\gamma'(s_0) = (x'(s_0), y'(s_0))$ est un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $(x(s_0), y(s_0))$.

Nous avons tracé une courbe à la figure [1]. C'est une partie d'une ellipse et $\gamma :]0, \pi[\rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $s \mapsto (\cos(s), 2 \sin(s))$ est une paramétrisation. Le vecteur $\gamma'(\pi/6) = (-1/2, \sqrt{3})$ est tangent à cette courbe au point $\gamma(\pi/6) = (\sqrt{3}/2, 1)$. Nous avons aussi tracé ce vecteur.

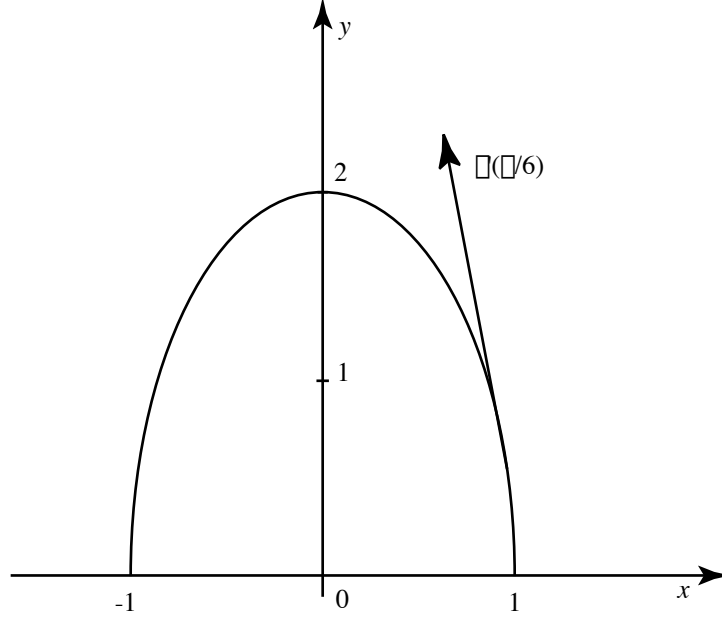


Figure [1]

Soient $f(x, y)$, une fonction définie sur le domaine $\mathcal{D}$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ et $\vec{d} = (d_1, d_2)$, une direction, c'est-à-dire que $\vec{d}$ est un vecteur non-nul de $\mathbf{R}^2$. Alors la dérivée directionnelle de f au point (x_0, y_0) dans la direction $\vec{d}$ est

$$f'((x_0, y_0); \vec{d}) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + td_1, y_0 + td_2) - f(x_0, y_0)}{t} \right) \quad (\text{si cette limite existe}).$$

(N.B: Nous ne supposons pas que la longueur $\|\vec{d}\| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ de $\vec{d}$ est 1.) Si les dérivées partielles de f sont continues sur $\mathcal{D}$, alors il est possible de démontrer que

$$f'((x_0, y_0); \vec{d}) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} d_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} d_2 = \vec{\nabla} f \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot \vec{d}. \quad (\text{éq. [4]})$$

Ici $\vec{\nabla} f \Big|_{(x_0, y_0)}$ dénote le gradient de f au point (x_0, y_0) , c'est-à-dire que

$$\vec{\nabla} f \Big|_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \right).$$

Dans l'équation [4], $\vec{\nabla} f \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot \vec{d}$ désigne le produit scalaire de $\vec{\nabla} f \Big|_{(x_0, y_0)}$ et de $\vec{d}$.

Revenons maintenant à la méthode des courbes caractéristiques. Dans cette méthode, il faut interpréter l'équation [1] au moyen des notions de dérivée directionnelle et de vecteur tangent à une courbe. Cette méthode sera utilisée pour résoudre des problèmes avec valeur initiale, c'est-à-dire qu'en plus de l'EDP, nous exigeons que les solutions recherchées satisfassent à une condition initiale. Nous interpréterons géométriquement les solutions obtenues.

Avant d'exposer les différentes étapes de la méthode, nous allons premièrement illustrer celles-ci dans un exemple simple. Étudions le problème à valeur initiale suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = F(x), \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

où $F(x)$ est une fonction réelle donnée et c est une constante réelle donnée. Nous voulons déterminer toutes les solutions $u = u(x, t)$ qui satisfont à l'EDP et à la condition initiale $u(x, 0) = F(x)$. Nous disons ici initiale parce que cette condition correspond à fixer les valeurs de u pour $t = 0$.

Considérons toutes les courbes paramétrées ayant une paramétrisation $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $s \mapsto (x(s), t(s))$ pour tout $s \in \mathbf{R}$ et dont le vecteur tangent $\gamma'(s) = (x'(s), t'(s))$ au point $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ est $(c, 1)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$. Dans ce qui précède, $()'$ est la dérivée par rapport à s . Les fonctions $x(s)$ et $t(s)$ satisfont aux deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = c.$$

Si nous fixons $t(0) = t_0$ et $x(0) = x_0$, il y a une et une seule solution à ce système d'équations différentielles, à savoir $t(s) = s + t_0$ et $x(s) = cs + x_0$ pour tout $s \in \mathbf{R}$. Ces deux équations peuvent être résolues par séparation de variables. Par exemple,

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int dt = \int ds \quad \Rightarrow \quad t = s + k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

Comme $t(0) = t_0$, nous obtenons que $t(s) = s + t_0$ pour tout $s \in \mathbf{R}$. Nous obtenons que $x(s) = cs + x_0$ de façon similaire. Ces courbes $\gamma : s \mapsto (x(s), t(s))$ sont ici des droites.

Si maintenant nous considérons les valeurs $u(s) = u(t(s), x(s))$ d'une solution u sur ces courbes, alors nous obtenons par la règle de chaines que

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Noter que l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

signifie que la dérivée directionnelle de $u = u(x, t)$ dans la direction du vecteur tangent $(x'(s), t'(s)) = (c, 1)$ est nulle pour tout point $(x(s), t(s))$ avec $s \in \mathbf{R}$. Parce que $u'(s) = 0$, nous avons que u est constante par rapport à s . Noter ici que u est constante sur les courbes $s \mapsto (x(s), t(s)) = (cs + x_0, s + t_0)$ avec $s \in \mathbf{R}$. Notons cette constante par u_0 . Nous avons donc que

$$x = cs + x_0, \quad t = s + t_0, \quad u = u_0.$$

Chacune des courbes dans $\mathbf{R}^3$ donnée par la paramétrisation $s \mapsto (x, t, u) = (cs + x_0, s + t_0, u_0)$ avec $s \in \mathbf{R}$ est ce qu'on appellera une courbe caractéristique.

Nous n'avons pas encore tenu compte de la condition initiale. De plus nous n'avons pas pour l'instant décrit u en fonction de x et t , mais plutôt en fonction de s . Les valeurs initiales possibles (x_0, t_0, u_0) peuvent aussi être paramétrisées par une courbe de valeurs initiales: $x_0 = \tau, t_0 = 0, u_0 = F(\tau)$ avec $\tau \in \mathbf{R}$. Donc si nous décrivons x, t, u en fonction de s et τ , nous obtenons

$$x(s, \tau) = cs + \tau, \quad t(s, \tau) = s, \quad u(s, \tau) = F(\tau).$$

Il est possible de visualiser ces dernières équations en concevant les points (x, t, u) comme étant sur une surface paramétrée par $(s, \tau) \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau), u(s, \tau))$. Ceci est illustré à la figure [2] dans le cas où $F(x) = 1 - x^2$, $c = 1$, $0 \leq s \leq 1$ et $0 \leq \tau \leq 1$.

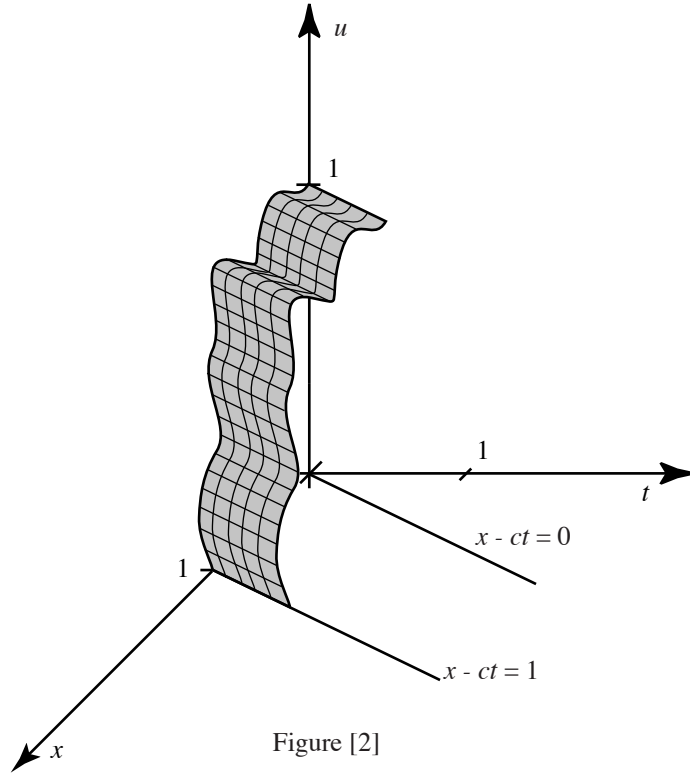


Figure [2]

Ainsi étant donné (s, τ) , nous obtenons un point (x, t, u) sur cette surface en utilisant $x = cs + \tau$, $t = s$ et $u = F(\tau)$. Mais ici il est facile de vérifier que des coordonnées x et t d'un point de cette surface, nous pouvons déterminer les coordonnées s et τ correspondantes, à savoir $s = t$ et $\tau = x - cs = x - ct$. En substituant ces valeurs dans l'expression pour u , nous obtenons que $u = F(\tau) = F(x - ct)$ comme fonction de x et t . C'est la solution recherchée au problème. Il est facile de vérifier que nous avons ainsi une solution du problème. En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-c) F'(x - ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = F'(x - ct) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = (-c) F'(x - ct) + c F'(x - ct) = 0$$

montre que l'EDP est satisfaite et $u(x, 0) = F(x - c(0)) = F(x)$ montre que la condition initiale est aussi vérifiée.

Dans cette solution $u(x, t) = F(x - ct)$, nous voyons que l'information initiale $u(x, 0) = F(x)$ est transmise le long des courbes caractéristiques, c'est-à-dire que $u(x, t)$ est constant pour tous les points (x, t) tels que $x - ct$ est une constante. Ici les courbes caractéristiques sont de la forme $x - ct = k$ où k une constante. Nous avons illustré ceci à la figure [3].

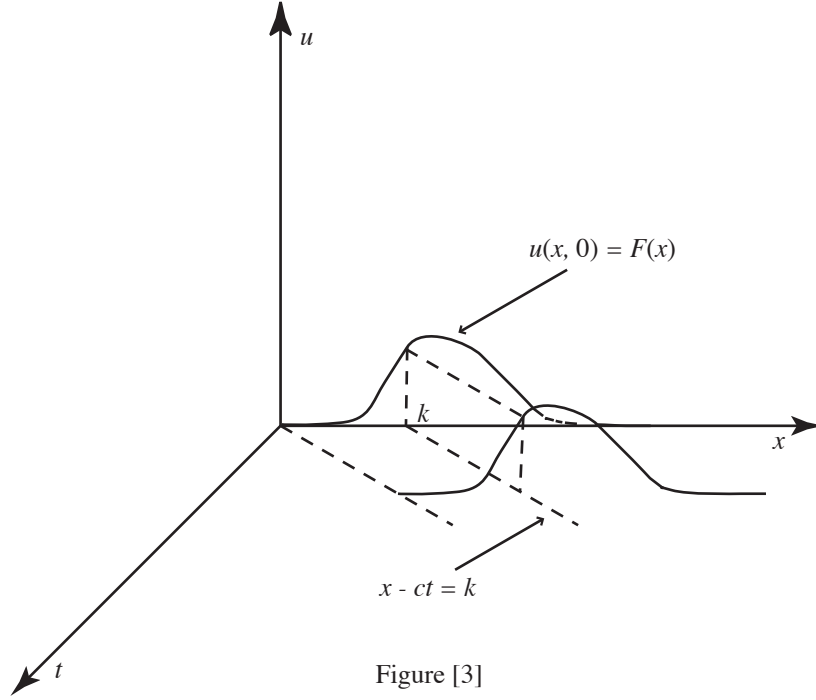


Figure [3]

Cette figure illustre aussi pourquoi l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

est appelé l'équation d'onde unidirectionnelle. Nous voyons bien la propagation de l'onde.

Décrivons maintenant la méthode générale des courbes caractéristiques pour résoudre le problème à valeur initiale suivant:

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = D \quad \text{avec} \quad u(X(\tau), Y(\tau)) = F(\tau), \quad \forall \tau \in I,$$

où A, B, C, D sont des fonctions continûment différentiables de x et y ; $u = u(x, y)$ est à déterminer, I est un intervalle et $X(\tau), Y(\tau)$ et $F(\tau)$ sont des fonctions continûment différentiables de $\tau \in I$ données.

Nous supposons au départ que $(A(x, y), B(x, y)) \neq (0, 0)$ pour tout point $(x, y) \in \mathcal{D}$. Considérons toutes les courbes paramétrées ayant une paramétrisation $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $s \mapsto (x(s), y(s))$ pour tout $s \in \mathbf{R}$ et dont le vecteur tangent $\gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$ est $(A(x(s), y(s)), B(x(s), y(s)))$ au point $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ pour tout $s \in \mathbf{R}$. Ici $()'$ désigne la dérivée par rapport à s . Nous obtenons ainsi un système de deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{ds} = A(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = B(x, y). \quad (\text{éq. [5]})$$

Si nous fixons $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$, il y a alors une et une seule solution à ce système d'équations différentielles ordinaires, à cause de l'hypothèse que $(A(x, y), B(x, y)) \neq (0, 0)$ pour tout point $(x, y) \in \mathcal{D}$. Noter qu'il est en général difficile de résoudre explicitement un tel système.

Si maintenant nous considérons les valeurs $u(s) = u(x(s), y(s))$ d'une solution u sur ces courbes, alors nous obtenons par la règle de chaînes que

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= A(x(s), y(s)) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x(s), y(s))} + B(x(s), y(s)) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x(s), y(s))} \\ &= -C(x(s), y(s)) u(x(s), y(s)) + D(x(s), y(s)) \end{aligned}$$

Noter que l'équation

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = -Cu + D$$

nous permet de conclure que la dérivée directionnelle de $u = u(x, y)$ dans la direction du vecteur tangent $\gamma'(s)$ au point $\gamma(s)$ est $-C(x(s), y(s)) u(x(s), y(s)) + D(x(s), y(s))$. L'équation

$$\frac{du}{ds} = -C(x(s), y(s)) u(x(s), y(s)) + D(x(s), y(s)) \quad (\text{éq. [6]})$$

est une équation différentielle ordinaire dont $u(s)$ est une solution. Les fonctions $x(s), y(s)$ sont déterminées par les équations [5]. Si nous fixons $u(0) = u_0$, alors l'équation [6] a une et une seule solution $u(s)$. Les courbes dans $\mathbf{R}^3$ données par les paramétrisations $s \mapsto (x(s), y(s), u(s))$ sont les **courbes caractéristiques**.

Pour chaque point (x_0, y_0, u_0) , il y a une seule courbe caractéristique $s \mapsto (x(s), y(s), u(s))$ passant par ce point (x_0, y_0, u_0) à $s = 0$. Pour chaque $\tau \in I$, nous aurons une courbe caractéristique $s \mapsto (x(s, \tau), y(s, \tau), u(s, \tau))$ en prenant ci-dessus $x_0 = X(\tau)$, $y_0 = Y(\tau)$ et $u_0 = F(\tau)$ et telle que $(x(0, \tau), y(0, \tau), u(0, \tau)) = (X(\tau), Y(\tau), F(\tau))$ pour tout $\tau \in I$.

Nous obtenons ainsi une paramétrisation d'une surface $(s, \tau) \mapsto (x(s, \tau), y(s, \tau), u(s, \tau))$ dans l'espace des (x, y, u) contenant la courbe $\mathcal{C}$ des valeurs initiales $\tau \mapsto (X(\tau), Y(\tau), F(\tau))$, ainsi que toutes les courbes caractéristiques $s \mapsto (x(s, \tau), y(s, \tau), u(s, \tau))$. Nous avons illustré ceci à la figure [4].

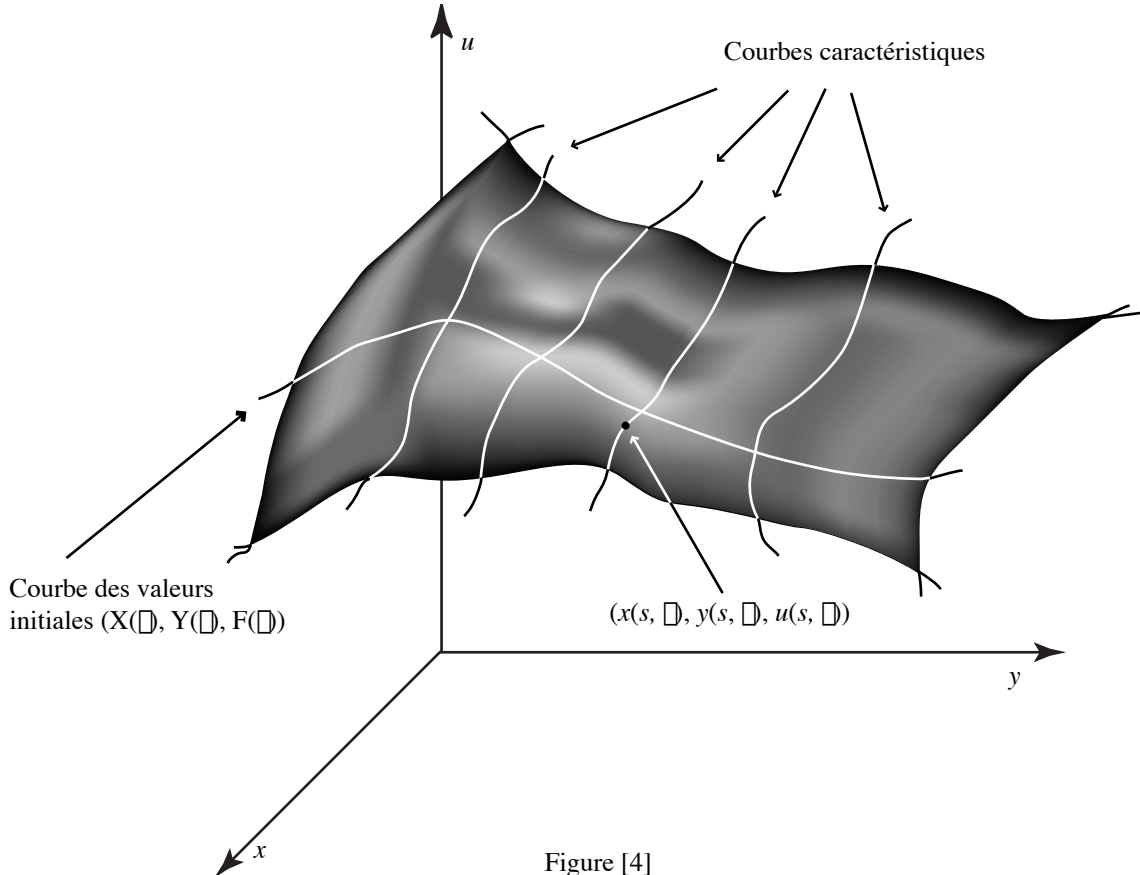


Figure [4]

Nous supposons aussi que le jacobien

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right) \neq 0$$

pour les points $(s, \tau) = (0, \tau)$ avec $\tau \in I$, alors il est possible d'écrire s et τ comme des fonctions $s = s(x, y)$ et $\tau = \tau(x, y)$ continûment différentiables de x et y . Ceci est une conséquence du théorème des fonctions inverses. En d'autres mots, la fonction $(s, \tau) \mapsto (x(s, \tau), y(s, \tau))$ a une fonction inverse $(x, y) \mapsto (s(x, y), \tau(x, y))$ dans un voisinage de $(s, \tau) = (0, \tau)$. En substituant ces expressions pour s et τ dans $u(s, \tau)$, nous obtenons $u = u(x, y)$ comme fonction de x et y . Cette fonction satisfait l'EDP

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = D.$$

En effet, nous avons que pour tout $\tau \in I$, $x(s, \tau)$ et $y(s, \tau)$ sont des solutions des équations [5] et alors

$$\frac{\partial x}{\partial s} = A(x(s, \tau), y(s, \tau)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = B(x(s, \tau), y(s, \tau)).$$

De plus, u comme fonction de s satisfait l'équation [6] pour chaque τ . Ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -C(x(s, \tau), y(s, \tau)) u + D(x(s, \tau), y(s, \tau)).$$

En utilisant ce qui précède et la règle de chaines, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x(s, \tau), y(s, \tau))} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x(s, \tau), y(s, \tau))} \frac{\partial y}{\partial s} = -C(x(s, \tau), y(s, \tau)) u + D(x(s, \tau), y(s, \tau)).$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x(s, \tau), y(s, \tau))} A(x(s, \tau), y(s, \tau)) + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x(s, \tau), y(s, \tau))} B(x(s, \tau), y(s, \tau))$$

est égale à

$$-C(x(s, \tau), y(s, \tau)) u(x(s, \tau), y(s, \tau)) + D(x(s, \tau), y(s, \tau)).$$

La condition initiale est aussi vérifiée. En effet, $X(\tau) = x(0, \tau)$, $Y(\tau) = y(0, \tau)$ et $u(x(0, \tau), y(0, \tau)) = u(X(\tau), Y(\tau)) = F(\tau)$ pour tout $\tau \in I$.

Nous avons fait deux hypothèses dans notre description de la méthode des courbes caractéristiques. La première est que le vecteur $(A(x, y), B(x, y)) \neq (0, 0)$ sur le domaine $\mathcal{D}$. Dans le cas où il y aurait un point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ tel que $(A(x_0, y_0), B(x_0, y_0)) = (0, 0)$, alors les équations [5] n'ont pas nécessairement une solution unique. Il peut y avoir plusieurs solutions ou encore une solution qui approche le point (x_0, y_0) en faisant une spirale autour de ce point. Nous ne traiterons pas de ce type de difficultés dans ces notes. Une seconde hypothèse que nous avons fait est que le jacobien

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)$$

doit être non-nul pour les points $(s, \tau) = (0, \tau)$ avec $\tau \in I$. Si ce jacobien s'annule pour un $(0, \tau_0)$, alors nous ne pouvons pas nécessairement écrire s et τ comme des fonctions de x et y . Dans ce cas, la méthode ne fonctionne pas nécessairement. De plus, il arrive dans certains de ces cas qu'il n'y ait pas de solution. Nous ne traiterons pas plus en détails ce type de difficultés.

Pour terminer ce chapitre, nous allons maintenant décrire la solution de d'Alembert (philosophe, écrivain et mathématicien français, Paris 1717 - *id.*, 1783) à l'équation d'onde dans le cas d'une corde vibrante. Le problème est le suivant. Il faut déterminer la fonction $u(x, t)$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{avec } u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

Ici c est un nombre réel positif ($c > 0$) donné, $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions données. Physiquement $u(x, t)$ est le déplacement vertical d'une corde vibrante au point x de cette corde au temps t . Nous supposons que la corde est suffisamment longue pour que les extrémités n'interfèrent pas pendant l'intervalle de temps pour

lequel nous considérons u . $f(x)$ est le déplacement initial de la corde et $g(x)$ est la vitesse (verticale) initiale. Comme nous l'avons vu, nous pouvons récrire l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

sous la forme du système [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{syst. [1]})$$

Nous allons donc premièrement déterminer v en tenant compte des conditions initiales. À $t = 0$, nous obtenons de la première équation du système [1] que

$$v(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) - c \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x) - cf'(x),$$

car

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{et} \quad u(x, 0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = f'(x).$$

Ainsi la fonction $v(x, t)$ sera une solution du problème à valeur initiale suivant

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad v(x, 0) = g(x) - cf'(x).$$

Comme nous l'avons vu précédemment la solution de ce problème est $v(x, t) = g(x - ct) - cf'(x - ct)$.

Maintenant il nous faut considérer la première équation du système [1] avec la solution $v(x, t)$ ci-dessus. Nous obtenons le nouveau problème à valeur initiale suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = g(x - ct) - cf'(x - ct) \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = f(x).$$

Nous devons premièrement déterminer les courbes caractéristiques. Il nous faut donc considérer les équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{ds} = -c, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = g(x(s) - ct(s)) - cf'(x(s) - ct(s)).$$

De plus la courbe des valeurs initiales est $\tau \mapsto (X(\tau), T(\tau), u(X(\tau), T(\tau))) = (\tau, 0, f(\tau))$. De ceci, nous obtenons $x(s, \tau) = -cs + \tau$, $t(s, \tau) = s$, ainsi que

$$\frac{du}{ds} = g(-cs + \tau - cs) - cf'(-cs + \tau - cs) \quad \Rightarrow \quad u(s, \tau) = \left(\int_0^s g(-2c\omega + \tau) - cf'(-2c\omega + \tau) d\omega \right) + f(\tau).$$

En considérant la substitution $\lambda = -2c\omega + \tau$ dans cette intégrale et parce que $d\lambda = -2c d\omega$, nous obtenons

$$u(s, \tau) = \left(\frac{1}{-2c} \int_{\tau}^{\tau-2cs} g(\lambda) - cf'(\lambda) d\lambda \right) + f(\tau).$$

Il est facile de vérifier que $s = t$ et $\tau = x + cs = x + ct$. En substituant ceci dans l'expression pour u ci-dessus, nous obtenons que

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{-2c} \int_{x+ct}^{x-ct} g(\lambda) - cf'(\lambda) d\lambda \right) + f(x + ct) = \left(\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) - cf'(\lambda) d\lambda \right) + f(x + ct).$$

Nous pouvons intégrer $f'(\lambda)$ par rapport à λ . Conséquemment

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) d\lambda \right) - \frac{1}{2} \left(f(x+ct) - f(x-ct) \right) + f(x+ct).$$

Finalement nous obtenons comme solution

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) d\lambda \right) + \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + f(x-ct) \right).$$

Ceci est la solution obtenue par d'Alembert.

Par exemple, si le déplacement initial et la vitesse initiale sont respectivement

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{si } 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = 0, \quad \forall x;$$

alors le déplacement vertical u sera

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct))$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } (x, t) \in A; \\ \frac{\sin(x+ct)}{2}, & \text{si } (x, t) \in B; \\ \frac{\sin(x+ct) + \sin(x-ct)}{2}, & \text{si } (x, t) \in C; \\ 0, & \text{si } (x, t) \in D; \\ \frac{\sin(x-ct)}{2}, & \text{si } (x, t) \in E; \\ 0, & \text{si } (x, t) \in F; \end{cases}$$

où A, B, C, D, E et F sont les régions représentées dans la figure [5]. Nous avons ainsi deux ondes: l'une se déplaçant vers la droite et l'autre vers la gauche.

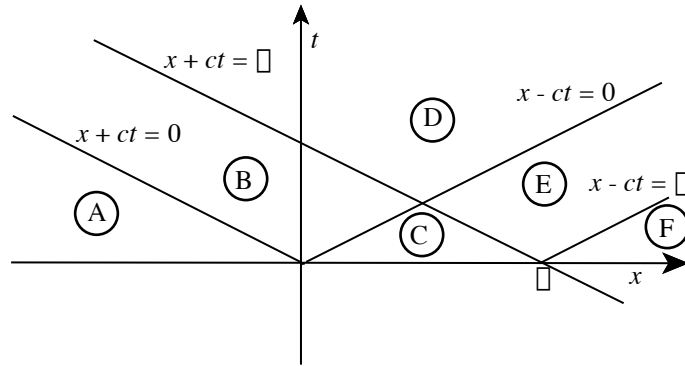


Figure [5]

* * *

Exercice 2.1

Montrer que l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda \right) u - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

où $u = u(x, t)$. Conclure de ceci que cette EDP est équivalente au système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v - 2\lambda u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.2

Résoudre le problème à valeur initiale suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0 \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = f(x),$$

où $\lambda > 0$, $f(x)$ est une fonction donnée et $u = u(x, t)$.

Exercice 2.3

Considérer la solution de d'Alembert de l'équation d'onde pour le déplacement initial $f(x)$ et la vitesse initiale $g(x)$ suivants:

- a) $f(x) = x$ et $g(x) = 0$; b) $f(x) = 0$ et $g(x) = x$; c) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = -c \cos(x)$;
d) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = c \cos(x)$.

Exercice 2.4

Résoudre le problème à valeur initiale suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + e^x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = x$$

où $u = u(x, t)$.

Exercice 2.5(†)

Considérer l'EDP linéaire non-homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)$$

où c est un nombre réel positif, $F(x, t)$ est une fonction donnée et $u = u(x, t)$.

a) Montrer que cette EDP est équivalente au système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = F(x, t). \end{cases}$$

b) Déterminer la solution du problème à valeur initiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

en procédant comme nous l'avons fait en décrivant la solution de d'Alembert pour l'équation d'onde. Ici $f(x)$ et $g(x)$ sont données.

CHAPITRE 3

Un peu d'ordre maintenant.

Après avoir fait nos premiers pas dans la théorie, nous décrirons dans ce chapitre comment classer toutes les EDP linéaires d'ordre 2. Nous aurons trois types d'EDP: hyperboliques, paraboliques et elliptiques. Ensuite nous décrirons la forme canonique obtenue après un changement de coordonnées pour chacun de ces types d'EDP. L'équation [2] du premier chapitre décrit la forme générale de ces équations avec n variables indépendantes. Au départ, nous nous restreindrons au cas où $n = 2$. Ainsi les EDP que nous considérerons initialement seront de la forme suivante:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (\text{eq. [1]})$$

et A, B, C, D, E, F et G sont des fonctions de x et de y qui ne s'annulent pas simultanément. Nous supposons aussi que u, A, B, C, D, E, F et G ont toutes au moins des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur un domaine $\mathcal{D}$ du plan x, y .

L'équation [1] est dite **hyperbolique** (respectivement **parabolique**, **elliptique**) au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $(B(x_0, y_0))^2 - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$ est positif (respectivement nul, négatif). Si une EDP est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) pour tous les points (x_0, y_0) du domaine $\mathcal{D}$, on dit alors qu'elle est **hyperbolique** (respectivement **parabolique**, **elliptique**) sur $\mathcal{D}$.

Pour l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x,$$

nous avons alors $A(x, y) = x^2$, $B(x, y) = -xy$, $C(x, y) = y^2$ et $B^2 - 4AC = (-xy)^2 - 4(x^2)(y^2) = -3x^2y^2$. Donc si $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, cette EDP est parabolique au point (x_0, y_0) ; sinon elle est elliptique au point (x_0, y_0) .

Il est important d'observer que cette classification est préservée par tout changement de coordonnées. Ceci indique que notre critère est valable. Il est clair que la forme d'une EDP est modifiée par un changement de coordonnées, mais que nous pouvons relier les solutions de l'équation avant le changement de coordonnées avec les solutions après celui-ci. Ainsi nous n'obtenons pas vraiment une nouvelle équation. Expliquons pourquoi notre classification est préservée par tout changement de coordonnées. Plus précisément, soient $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, deux nouvelles variables qui sont des fonctions de x et y ayant au moins leurs dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur le domaine $\mathcal{D}$ et telles que le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{pmatrix}$$

n'est jamais nul sur le domaine $\mathcal{D}$. Alors nous obtenons une nouvelle équation [2] en utilisant ces nouvelles variables (ξ, η) et celle-ci est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) au point $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$ si et seulement si l'équation [1] est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) au point (x_0, y_0) . Nous allons maintenant vérifier ceci.

En utilisant la règle de chaînes, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

En substituant ces dérivées partielles dans l'équation [1], nous obtenons

$$A' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D' \frac{\partial u}{\partial \xi} + E' \frac{\partial u}{\partial \eta} + F' u = G' \quad (\text{éq. [2]})$$

où

$$\begin{aligned}A' &= A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ B' &= 2A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + B \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + 2C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \\ C' &= A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + B \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \\ D' &= A \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + B \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right) + C \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + D \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + E \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \\ E' &= A \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + B \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + C \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + D \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + E \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \\ F' &= F \text{ et } G' = G.\end{aligned}$$

Nous obtenons alors que $(B')^2 - 4A'C' = J^2(B^2 - 4AC)$. Parce que $J \neq 0$ sur le domaine $\mathcal{D}$, nous avons que $(B')^2 - 4A'C' > 0$ (respectivement $= 0, < 0$) si et seulement si $(B^2 - 4AC) > 0$ (respectivement $= 0, < 0$). Ceci termine la preuve que la classification des équations en EDP hyperboliques, paraboliques ou elliptiques est invariante sous des changements de coordonnées.

En utilisant ce qui précède, nous pouvons maintenant nous demander s'il existe des coordonnées (ξ, η) telles que $A' = 0$ ou $C' = 0$. Le but ultime de ceci est de déterminer une forme canonique d'une EDP comme dans l'équation [1]. Nous pouvons tenter de déterminer un tel changement de coordonnées. Ainsi nous voulons que

$$A' = A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0$$

ou encore

$$C' = A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + B \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Ces deux équations sont de la même forme

$$A \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + B \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 = 0$$

avec $\zeta = \xi$ ou η . Nous supposons dans ce qui suit que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} \neq 0$$

pour les points de notre domaine $\mathcal{D}$. En divisant les deux côtés de cette dernière équation par

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2,$$

nous aurons

$$A \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right]^2 + B \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] + C = 0. \quad (\text{éq. [3]})$$

Rappelons que si f est une fonction continue de x et y ayant des dérivées partielles continues sur le domaine $\mathcal{D}$ et que nous considérons la courbe de niveau $\mathcal{C}_\nu = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = \nu\}$, alors la pente de la tangente y' en un point de cette courbe est

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

En effet, si nous dérivons par rapport à x les deux côtés de l'équation $f(x, y) = \nu$ définissant la courbe $\mathcal{C}_\nu$, nous obtenons au moyen de la règle de chaînes

$$\frac{d(f(x, y))}{dx} = \frac{d(\nu)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Nous avons illustré ceci à la figure [1] pour la courbe de niveau $f(x, y) = 4x^2 + y^2 = 4$. Dans ce cas,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \text{et} \quad y' = -(8x)/(2y).$$

Ainsi une équation de la droite tangente à la courbe de niveau passant par le point $(\sqrt{3}/2, 1)$ est $(y - 1) = -2\sqrt{3}(x - \sqrt{3}/2)$.

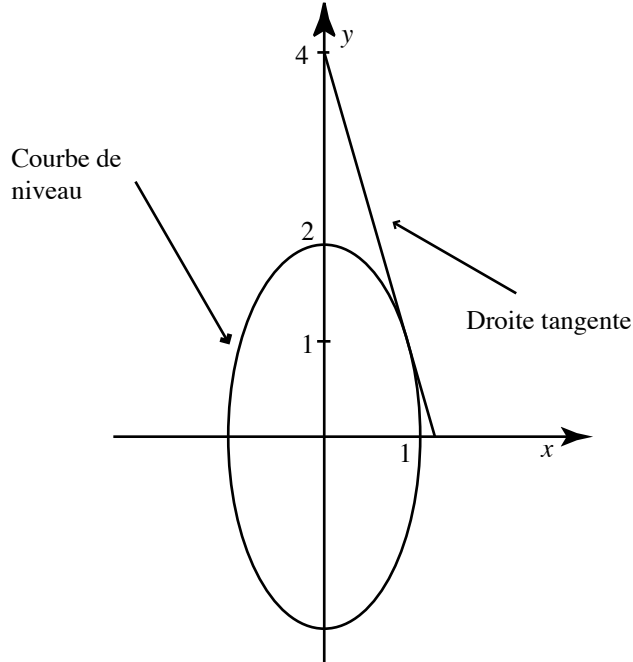


Figure [1]

Conséquemment si nous considérons la courbe de niveau $\mathcal{C}_\nu = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid \zeta(x, y) = \nu\}$, alors la pente de la tangente y' à cette courbe de niveau ν satisfait l'équation

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0$$

en utilisant la substitution

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right).$$

dans l'équation [3]. Nous obtenons ainsi deux équations différentielles ordinaires:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Celles-ci sont appelées les équations caractéristiques. En trouvant les solutions de ces deux équations, nous aurons les deux courbes caractéristiques $\zeta_1(x, y) = \text{constante}$ et $\zeta_2(x, y) = \text{constante}$. En posant $\xi(x, y) = \zeta_1(x, y)$ et $\eta(x, y) = \zeta_2(x, y)$, nous aurons un bon changement de coordonnées qui simplifiera l'équation [1]. Dans la discussion qui précède, j'ai escamoté certaines difficultés. Par exemple, si $B^2 - 4AC = 0$, nous n'aurons pas deux équations caractéristiques, mais seulement une seule, nous pallierons à ceci plus tard. De même, si $B^2 - 4AC < 0$, le radical n'est pas réel et il faut modifier notre processus.

Nous allons pour l'instant poursuivre en ne considérant que le cas hyperbolique (i.e. $B^2 - 4AC > 0$ sur le domaine $\mathcal{D}$), nous aurons bien deux nouvelles coordonnées (ξ, η) dites coordonnées caractéristiques. Après ce changement de coordonnées, nous aurons une équation [2] pour laquelle $A' = C' = 0$ et nous obtenons après avoir divisé les deux côtés par B' une EDP de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + D'' \frac{\partial u}{\partial \xi} + E'' \frac{\partial u}{\partial \eta} + F'' u = G''. \quad (\text{éq. [4]})$$

Noter que $B' \neq 0$, parce que l'équation est hyperbolique. Cette équation [4] est la première forme canonique d'une EDP hyperbolique sur un domaine $\mathcal{D}$. Il existe aussi une seconde forme canonique pour une EDP hyperbolique. Pour l'obtenir, il suffit de considérer les coordonnées (α, β) définies par $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$. Après ce nouveau changement de coordonnées, l'EDP est transformée en une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + D_1'' \frac{\partial u}{\partial \alpha} + E_1'' \frac{\partial u}{\partial \beta} + F_1'' u = G_1''. \quad (\text{éq. [5]})$$

En effet, nous obtenons par la règle de chaînes que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \quad \text{et} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}. \end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'équation [4], nous obtenons l'équation [5].

Illustrons comment obtenir l'équation canonique dans le cas de l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante:

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{éq. [6]})$$

Parce que $B^2 - 4AC = 0^2 - 4(y^2)(-x^2) = 4x^2y^2 \geq 0$, nous obtenons facilement qu'aux points (x_0, y_0) pour lesquels $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, l'EDP est parabolique; alors qu'aux points (x_0, y_0) pour lesquels $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$, l'EDP est hyperbolique. Considérons un domaine $\mathcal{D}$ pour lequel l'EDP est hyperbolique à tous ses points. À ces points, les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 + \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{0 - \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2}$$

c'est-à-dire $y' = (x/y)$ et $y' = -(x/y)$. En utilisant la méthode de séparation de variables, nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c'$$

où c, c' sont des constantes. Ainsi les deux courbes caractéristiques sont $\zeta_1(x, y) = (y^2 - x^2)/2 = c$ et $\zeta_2(x, y) = (y^2 + x^2)/2 = c'$. Les coordonnées caractéristiques sont $\xi(x, y) = (y^2 - x^2)/2$ et $\eta(x, y) = (y^2 + x^2)/2$. En utilisant ce changement de coordonnées, la règle de chaînes et en observant que $x^2 = -\xi + \eta$ et $y^2 = \xi + \eta$, alors l'EDP [6] est transformée et nous obtenons la nouvelle équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (\text{éq. [7]})$$

En effet, par la règle de chaînes, nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x \frac{\partial u}{\partial \xi} + x \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} + y \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-x \frac{\partial u}{\partial \xi} + x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} + y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

et finalement

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (y^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{(x^2 + y^2)}{4x^2 y^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{(y^2 - x^2)}{4x^2 y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

L'équation [7] est la première forme canonique de l'EDP aux points pour lesquels celle-ci est hyperbolique. Si nous utilisons plutôt les coordonnées $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$, alors $\xi = (\alpha + \beta)/2$, $\eta = (\alpha - \beta)/2$ et l'EDP obtenue sera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \frac{-1}{2\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (\text{éq. [8]})$$

Nous obtenons ceci par la règle de chaînes car

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{(\alpha - \beta)/2}{2\alpha\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) - \frac{(\alpha + \beta)/2}{2\alpha\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \frac{-1}{2\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \end{aligned}$$

Cette dernière équation est la seconde forme canonique de l'EDP aux points pour lesquels celle-ci est hyperbolique.

Nous allons maintenant discuter de ce qu'il faut faire dans les cas où l'équation est parabolique ou elliptique. Pour chacun de ces cas, nous obtenons soit une seule équation caractéristique ou deux équations caractéristiques complexes.

Si notre EDP est parabolique sur le domaine $\mathcal{D}$, alors $B^2 - 4AC = 0$ en tout point de $\mathcal{D}$ et nous obtenons qu'une seule équation caractéristique $y' = B/2A$. Même en procédant comme pour le cas hyperbolique, nous n'obtiendrons qu'une seule coordonnée caractéristique $\xi(x, y)$. Pour obtenir la seconde coordonnée caractéristique $\eta(x, y)$, il suffit de prendre une fonction $\eta(x, y)$ quelconque ayant au moins des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur le domaine $\mathcal{D}$ et telles que

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \neq 0$$

sur $\mathcal{D}$. Parce que $B^2 - 4AC = 0$ et que $A' = 0$, nous avons que $B = \epsilon 2\sqrt{AC}$ avec $\epsilon = 1$ ou -1 ,

$$A' = A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left(\sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \epsilon \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} B' &= 2A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + B \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + 2C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= 2 \left(\sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \epsilon \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\sqrt{A} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \epsilon \sqrt{C} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

quelque soit la fonction $\eta(x, y)$. Donc après ce changement de coordonnées, l'équation [1] sera transformée en une EDP de la forme

$$C' \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D' \frac{\partial u}{\partial \xi} + E' \frac{\partial u}{\partial \eta} + F' u = G'.$$

Noter que $C' \neq 0$, sinon l'EDP de départ serait d'ordre 1, mais ce n'est pas le cas. Après avoir divisé les deux côtés de cette dernière équation par C' , nous obtenons la forme canonique d'une EDP parabolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D'' \frac{\partial u}{\partial \xi} + E'' \frac{\partial u}{\partial \eta} + F'' u = G''.$$

Illustrons ceci dans un exemple. Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (\text{éq. [9]})$$

Cette équation est linéaire d'ordre 2 et parce que $B^2 - 4AC = 6^2 - 4(1)(9) = 0$ pour tous les points de $\mathbf{R}^2$, elle est parabolique sur $\mathbf{R}^2$. Nous n'avons qu'une seule équation caractéristique $y' = 6/2 = 3$ et, en utilisant la méthode de séparation de variables, nous obtenons comme solution de cette équation $\zeta_1(x, y) = 3x - y = c$ où c est une constante. Nous avons donc pour l'instant qu'une seule coordonnée caractéristique $\xi(x, y) = 3x - y$. Pour obtenir une seconde coordonnée caractéristique, nous avons beaucoup de choix. Pour cet exemple, nous prendrons $\eta(x, y) = x$. Cette fonction a bien des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues et

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

pour tout point de $\mathbf{R}^2$. En utilisant ce changement de coordonnées, la règle de chaînes et en notant que $x = \eta$ et $y = -\xi + 3\eta$, l'équation [9] sera transformée et nous aurons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

comme équation canonique.

En effet, en utilisant la règle de chaînes, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad \text{et} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 5\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 5\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant discuter du cas elliptique. Si notre équation [1] est elliptique sur le domaine $\mathcal{D}$, alors ses deux équations caractéristiques sont à valeurs complexes (avec une partie imaginaire non-nulle) et les solutions de ces équations sont conjuguées entre elles. Plus précisément, nous avons les courbes suivantes: $\zeta_1(x, y) = c$, $\zeta_2(x, y) = c'$ et $\zeta_2(x, y) = \overline{\zeta_1(x, y)}$, la conjuguée de $\zeta_1(x, y)$. Si nous posons $\xi(x, y) = \zeta_1(x, y)$ et $\eta(x, y) = \zeta_2(x, y)$, ces variables ne prennent pas des valeurs réelles. La modification nécessaire est la suivante. Les coordonnées caractéristiques dans le cas elliptique seront $\alpha = (\xi + \eta)/2$, $\beta = (\xi - \eta)/2i$ où $i = \sqrt{-1}$. Ceci signifie que α est la partie réelle de ξ et β est la partie imaginaire de ξ . Après ce changement de coordonnées, nous obtenons comme EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + D'' \frac{\partial u}{\partial \alpha} + E'' \frac{\partial u}{\partial \beta} + F'' u = G''.$$

Cette équation est la forme canonique de l'équation elliptique.

Illustrons ceci par un exemple. Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dans ce cas, $B^2 - 4AC = -4x^2 \leq 0$. Conséquemment cette équation est parabolique aux points (x_0, y_0) où $x_0 = 0$, sinon elle est elliptique. Sur un domaine pour lequel l'équation est elliptique, ses équations caractéristiques sont $y' = ix$ et $y' = -ix$. Les solutions seront $\zeta_1(x, y) = y - (i/2)x^2 = c$ et $\zeta_2(x, y) = y + (i/2)x^2 = c'$. Il est clair que les fonctions $\xi(x, y) = y - (i/2)x^2$ et $\eta(x, y) = y + (i/2)x^2$ prennent des valeurs complexes et sont conjuguées l'une de l'autre. Les coordonnées caractéristiques sont $\alpha(x, y) = y$ et $\beta(x, y) = -x^2/2$. Après ce changement de coordonnées, l'équation canonique sera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

En effet nous avons que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-x \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{2\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

Dans ce qui précède, nous avons décrit comment transformer une équation aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2 à deux variables en une équation canonique. Un processus similaire existe aussi pour transformer une équation aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2 ayant plus de deux variables sous une forme canonique. Ce processus fait appel à des notions d'algèbre linéaire plus avancées et nous ne le décrirons pas dans ces notes de cours. Nous allons seulement qu'esquisser quelques-uns des éléments de ce processus. L'équation [2] du chapitre 1 nous donne la forme générale d'une EDP linéaire d'ordre 2

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = D \quad (\text{éq. [10]})$$

où A_{ij} , B_i , C et D sont des fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$. De plus, nous supposons que les solutions recherchées u ont toutes leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

continues sur $\mathcal{D}$ et conséquemment que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Nous pouvons alors supposer sans perte de généralités que $A_{ij} = A_{ji}$. Nous avons expliqué au premier chapitre pourquoi nous pouvons faire cette hypothèse. La classification de ces équations se ramène à l'étude des valeurs propres de la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Il est bien connu que les valeurs propres d'une matrice symétrique ayant des entrées réelles sont réelles. On dit alors que l'EDP est **elliptique** si toutes les valeurs propres de A sont soit positives (> 0), soit négatives (< 0). On dit qu'elle est **hyperbolique** si une des valeurs propres est soit positive (> 0), soit négative (< 0) et toutes les autres valeurs propres sont du signe opposé. On dit qu'une EDP est **parabolique** si au moins une des valeurs propres est nulle. Si $n \geq 4$, cette liste n'est pas exhaustive. Il est possible d'avoir des EDP pour lesquelles la matrice A a plus de deux valeurs propres d'un signe et toutes les autres du signe opposé. On dit que ces équations sont **ultrahyperboliques**.

* * *

Exercice 3.1

Déterminer pour quels points (x, y) du plan, chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes est a) hyperbolique, b) parabolique et c) elliptique.

- i) $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, ii) $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (x+3) \frac{\partial u}{\partial y} = u$
iii) $e^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5y \frac{\partial u}{\partial x} = e^x$, iv) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x-y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,
v) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (x+y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x)$.

Exercice 3.2

Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes

- a) déterminer les points du plan x, y où ces équations sont hyperboliques;
b) déterminer les coordonnées caractéristiques de ces équations sur le domaine où celles-ci sont hyperboliques;
c) effectuer le changement de coordonnées pour celles trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante

- i) $2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4y \frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0$, ii) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Exercice 3.3

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

- a) déterminer les points du plan x, y où cette équation est parabolique;
- b) déterminer les coordonnées caractéristiques de cette équation sur le domaine où celle-ci est parabolique;
- c) effectuer le changement de coordonnées pour les coordonnées trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

Exercice 3.4

Pour l'équation ci-dessous, déterminer le type de l'équation, les équations caractéristiques, les coordonnées caractéristiques et ensuite réduire l'équation sous sa forme canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0.$$

Exercice 3.5

Soit l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

- a) Déterminer si l'équation est hyperbolique, parabolique ou elliptique.
- b) Déterminer les équations caractéristiques de cette équation.
- c) Transformer cette équation dans sa forme canonique.

Exercice 3.6

Considérons l'équation de Black-Scholes

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + r S \frac{\partial c}{\partial S} - r c,$$

où r et σ^2 sont des constantes, S et τ sont les variables indépendantes et $c = c(S, \tau)$ est la variable dépendante.

- a) Posons $y = \ln(S)$. Montrer que l'équation de Black-Scholes est transformée dans la nouvelle EDP à coefficients constants

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial c}{\partial y} - r c.$$

- b) Posons $c(y, \tau) = e^{-r\tau} u(y, \tau)$. Montrer que l'EDP de (a) est transformée dans l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

CHAPITRE 4

Quelques mots sur les séries de Fourier.

Avant de décrire de quelle façon la théorie des séries de Fourier peut être utilisée pour résoudre certaines EDP, nous expliquerons ce qu'est un problème d'EDP bien posé et nous illustrerons la méthode de séparation de variables dans le cas de l'équation d'onde. Dans les chapitres suivants, nous appliquerons cette méthode pour résoudre plusieurs problèmes provenant de la physique. Au départ, notre but est de motiver notre étude des séries de Fourier. Au prochain chapitre, nous étudierons la convergence de ces séries.

Pour une équation différentielle ordinaire donnée, il existe en général une infinité de solutions. Un problème bien posé pour de telles équations consiste souvent en une équation et des conditions initiales auxquelles la solution recherchée et ses dérivées doivent satisfaire. De façon analogue, un problème d'EDP consiste en une équation aux dérivées partielles et des conditions supplémentaires. Ces conditions sont initiales et/ou à la frontière. Pour les équations de la physique, ces conditions ont un sens concret. Elles sont soit le déplacement initial, soit la vitesse initiale ou soit la température aux extrémités, etc.

Hadamard (mathématicien français, Versailles 1865 - Paris 1963) a proposé trois conditions pour que nous puissions dire d'un problème d'EDP qu'il est **bien posé** ou encore **posé correctement**. Il faut premièrement qu'il admette au moins une solution, deuxièmement qu'il n'y ait qu'une seule solution et troisièmement que celle-ci dépende "continûment" des données du problème. Par exemple, le problème de la corde vibrante présenté au chapitre 2 est bien posé. C'est ce que la solution de d'Alembert a illustré. Cependant il est difficile de dire si les conditions initiales et/ou à la frontière dans un problème d'EDP sont appropriées pour faire en sorte que ce dernier soit un problème bien posé. Nous considérerons dans ces notes surtout des problèmes bien posés.

Illustrons maintenant la méthode de séparation de variables. Ce que nous cherchons à déterminer en premier, ce sont des solutions d'un certain type et ensuite nous utilisons (je dirais même nous abusons) du principe de superposition pour considérer une solution qui serait la somme de ces solutions spéciales. C'est là que les séries de Fourier entreront en jeu. Dans cet exemple, nous revenons sur l'équation d'onde, mais cette fois-ci les extrémités de la corde interviennent dans la situation.

Soit une corde (idéale) de longueur ℓ ($\ell > 0$) fixée à ses deux extrémités et dont nous connaissons le déplacement initial $f(x)$ et la vitesse initiale $g(x)$. Nous voulons déterminer le déplacement vertical $u(x, t)$ de cette corde au point x , ($0 \leq x \leq \ell$) au temps t , ($t \geq 0$). Mathématiquement nous avons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec comme conditions initiales:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{pour tout } x, 0 \leq x \leq \ell$$

et comme conditions à la frontière:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, t \geq 0.$$

Nous verrons plus tard que ce problème est bien posé.

Illustrons la méthode de séparation de variables pour le problème ci-dessus. Le but pour l'instant est d'indiquer pourquoi il nous faudra étudier les séries de Fourier. La première étape consiste à étudier un problème intermédiaire et de rechercher des solutions $u(x, t)$ de la forme spéciale $X(x)T(t)$ où X, T sont respectivement des fonctions de x et de t ayant au moins des dérivées premières et secondes continues. La seconde étape consiste à substituer ces solutions spéciales dans l'EDP et à séparer les variables (si possible). Dans notre cas, considérons d'abord le problème intermédiaire suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec comme conditions à la frontière:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, t \geq 0.$$

Nous ne considérons pas dans ce problème intermédiaire les conditions initiales.

Il est clair que toute solution recherchée $u(x, t)$ du problème de la corde vibrante sera aussi une solution de ce problème intermédiaire. Cherchons premièrement à déterminer les solutions non triviales de ce problème intermédiaire qui seront de la forme spéciale $u(x, t) = X(x)T(t)$. En substituant ceci dans l'EDP, nous obtenons $XT'' - c^2 X''T = 0$. Ici X'' est la dérivée seconde de X par rapport à x , alors que T'' est la dérivée seconde de T par rapport à t . Nous pouvons séparer les variables, c'est-à-dire que nous avons l'équation

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}.$$

Il faut faire attention avec ce raisonnement, car nous divisons par X et par T . Celui-ci est donc valable seulement sur les intervalles où $X \neq 0$ et $T \neq 0$. Le terme de gauche de cette équation est une fonction de x seulement, alors que le terme de droite est une fonction de t seulement. Pour que nous puissions avoir cette égalité, il faut donc que chacun de ces termes soit constant et nous noterons cette constante par λ . De ceci, nous tirons deux équations différentielles ordinaires:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \text{et} \quad T'' - \lambda c^2 T = 0.$$

Il nous faut déterminer λ . Il peut y avoir plusieurs constantes possibles ici. Les conditions à la frontière signifient que $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ et $u(\ell, t) = X(\ell)T(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Comme nous cherchons des solutions non triviales, nous pouvons alors supposer que $T(t) \neq 0$ pour au moins un $t = t_0$. Sinon dans le cas où $T(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, alors $u(x, t)$ est la solution triviale $u(x, t) = X(x)T(t) = 0$ pour tout $1 \leq x \leq \ell$ et $t \geq 0$. Conséquemment nous obtenons que $X(0)T(t_0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$ et $X(\ell)T(t_0) = 0 \Rightarrow X(\ell) = 0$. Il nous faut donc résoudre les équations différentielles ordinaires suivantes:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad \text{avec } X(0) = 0 \text{ et } X(\ell) = 0;$$

$$T'' - \lambda c^2 T = 0 \quad (t \geq 0);$$

où λ est une constante.

Ces équations sont bien connus. Ce sont des équations linéaires d'ordre 2 à coefficient constant et il est facile d'écrire la solution générale pour chacune de ces équations. Déterminons premièrement X en étudiant les solutions générales du problème suivant pour les différentes possibilités pour λ :

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad \text{avec } X(0) = 0 \text{ et } X(\ell) = 0. \quad (\text{éq. [1]})$$

Si $\lambda = \nu^2 > 0$, alors la solution générale de l'équation [1] est de la forme $X(x) = Ae^{-\nu x} + Be^{\nu x}$ où A, B sont des nombres réels. Mais les conditions $X(0) = 0$ et $X(\ell) = 0$ ont comme conséquence que $A + B = 0$ et $Ae^{-\nu \ell} + Be^{\nu \ell} = 0$. Ce système d'équations n'a qu'une seule solution, la solution triviale $(A, B) = (0, 0)$. En effet, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\nu \ell} & e^{\nu \ell} \end{vmatrix} = e^{\nu \ell} - e^{-\nu \ell} = \frac{(e^{2\nu \ell} - 1)}{e^{\nu \ell}} \neq 0.$$

Sinon $e^{2\nu \ell} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2\nu \ell} = 1 \Rightarrow 2\nu \ell = 0$. Mais ceci est absurde parce que ν et ℓ sont différents de 0. De ceci nous pouvons conclure que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\nu \ell} & e^{\nu \ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\nu \ell} & e^{\nu \ell} \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

Ainsi dans le cas où $\lambda = \nu^2 > 0$, alors $X \equiv 0$ et $u(x, t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$ et $t \geq 0$. Nous devons donc exclure le cas $\lambda > 0$.

Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de l'équation [1] est de la forme $X(x) = A + Bx$ où A et B sont des nombres réels. Mais les conditions $X(0) = 0$ et $X(\ell) = 0$ ont comme conséquence que $A = 0$ et $A + B\ell = 0$. Comme ci-dessus, ce système n'a qu'une seule solution, la solution triviale $(A, B) = (0, 0)$, car $\ell \neq 0$. Ainsi dans le cas où $\lambda = 0$, alors $X \equiv 0$ et $u(x, t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$ et $t \geq 0$. Nous devons donc aussi exclure le cas $\lambda = 0$.

Si $\lambda = -\nu^2 < 0$, alors la solution générale de l'équation [1] est de la forme $X(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)$ où A et B sont des nombres réels. Mais les conditions $X(0) = 0$ et $X(\ell) = 0$ ont comme conséquence que $A = 0$ et $A \cos(\nu \ell) + B \sin(\nu \ell) = 0$. Parce que $A = 0$ et que nous ne voulons pas obtenir la solution triviale $X \equiv 0$, alors nous pouvons supposer que $B \neq 0$. Comme $B \sin(\nu \ell) = 0$, alors $\sin(\nu \ell) = 0$. Conséquemment $\nu \ell = n\pi$ et $\lambda = -(n\pi/\ell)^2$ avec $n \in \mathbf{Z}$. Les valeurs $\lambda_n = -(n\pi/\ell)^2$ sont appelées les valeurs propres et les fonctions $X_n(x) = B_n \sin(n\pi x/\ell)$ sont les fonctions caractéristiques du problème:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad \text{avec } X(0) = 0 \text{ et } X(\ell) = 0.$$

Parce que $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, il suffit donc de considérer les valeurs propres λ_n et les fonctions caractéristiques X_n pour $n \in \mathbf{N}$, avec $n > 0$. Si maintenant nous considérons l'équation différentielle ordinaire $T'' - \lambda c^2 T = 0$ avec ($t \geq 0$) pour la valeur propre $\lambda = \lambda_n$, alors $T_n(t) = C_n \cos(c\pi n t/\ell) + D_n \sin(c\pi n t/\ell)$ est la forme générale de la solution de cette équation. En combinant tout ceci, nous obtenons une solution de la forme

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \right]$$

au problème [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, t \geq 0. \quad (\text{prob. [1]})$$

Ce problème est linéaire et homogène. Dans ce cas, le principe de superposition est valable et

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(x, t) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \right]$$

sera aussi une solution du problème [1]. Nous avons triché parce que le principe de superposition entraîne qu'une somme finie de solutions est aussi une solution, alors qu'ici nous sommes une série infinie! Nous supposons pour l'instant que ceci ne pose pas une difficulté insurmontable. Il faut aussi se soucier de savoir si cette série converge. En d'autres mots, est-ce que tout ce qui précède peut être rendu mathématiquement correct?

Nous avons donc obtenu une solution formelle au problème [1]. Il nous reste à expliquer ce qu'il faut faire pour obtenir une solution au problème initialement posé:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec comme conditions initiales:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{pour tout } x, 0 \leq x \leq \ell$$

et comme conditions à la frontière:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, t \geq 0.$$

Il nous faut seulement considérer les conditions initiales: le déplacement initial et la vitesse initiale. Si nous considérons la solution formelle obtenue au paragraphe précédent, nous aurons ainsi en posant $t = 0$ deux équations

$$u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = f(x) \quad (\text{déplacement initial})$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) = g(x) \quad (\text{vitesse initiale}).$$

Cette dernière équation est obtenue en dérivant par rapport à t terme-à-terme la série définissant $u(x, t)$. Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas fourni un seul argument pour valider nos hypothèses. C'est le but de ce chapitre. Nous verrons plus tard d'autres exemples de la méthode de séparation de variables. La leçon à retenir pour l'instant est que pour déterminer le déplacement vertical $u(x, t)$ de la corde, il nous faut exprimer le déplacement initial $f(x)$ et la vitesse initiale $g(x)$ comme des sommes de fonctions trigonométriques (des fonctions sinus ci-dessus). Ceci est l'un des buts de la théorie des séries de Fourier. Nous devons aussi traiter des problèmes de convergence, de dérivation terme-à-terme de ces séries. Il existe une théorie mathématique très importante concernant ces séries. Nous n'allons qu'esquisser celle-ci.

Le cadre général pour la théorie des séries de Fourier est celui de la théorie des fonctions orthogonales. Nous allons donc commencer par définir ce que nous entendons par l'orthogonalité de fonctions.

Nous dirons d'une fonction continue $q(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ qu'elle est une **fonction de poids** si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Soient des fonctions $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \dots$ définies sur $[a, b]$ (où $n \in \mathbf{N}$). Nous dirons que les fonctions de la suite $\{\phi_n(x)\}_n$ sont **orthogonales entre elles par rapport à $q(x)$** sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si l'intégrale

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) q(x) dx = 0 \quad \text{pour tout } m \neq n.$$

Nous dirons aussi que $\{\phi_n(x)\}_n$ est un **système orthogonal** par rapport à $q(x)$ sur $[a, b]$. Si $m = n$, nous dirons que

$$\left[\int_a^b (\phi_m(x))^2 q(x) dx \right]^{(1/2)}$$

est la norme de $\phi_m(x)$ et nous noterons cette norme par $\|\phi_m\|$.

Noter que $\int_a^b (\phi_m(x))^2 q(x) dx \geq 0$. Nous supposons en plus que toutes les intégrales ci-dessus sont bien définies. Ceci est le cas par exemple si les fonctions sont continues sur l'intervalle $[a, b]$. Nous dirons que $\{\phi_n(x)\}_n$ est un **système orthonormal** sur $[a, b]$ par rapport à $q(x)$ si et seulement si

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) q(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ 1, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Par exemple, l'ensemble $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots\}$ est un système orthogonal de fonctions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour la fonction de poids $q(x) \equiv 1$. Ce qui nous permet d'affirmer cela ce sont les calculs suivants.

Si $m, n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)}{2} dx \\ &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2(m-n)} \sin((m-n)x) - \frac{1}{2(m+n)} \sin((m+n)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{si } m \neq n; \\ \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2(m+n)} \sin((m+n)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{si } m = n; \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $m, n \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)}{2} \, dx \\ &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2(m-n)} \sin((m-n)x) + \frac{1}{2(m+n)} \sin((m+n)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{si } m \neq n; \\ \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2(m+n)} \sin((m+n)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{si } m = n \geq 1; \\ (x) \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{si } m = n = 0; \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n; \\ 2\pi, & \text{si } m = n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $m \geq 0$ et $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((m+n)x) - \sin((m-n)x)}{2} \, dx \\ &= \begin{cases} \left(\frac{-1}{2(m+n)} \cos((m+n)x) + \frac{1}{2(m-n)} \cos((m-n)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{si } m \neq n, \\ \left(\frac{-1}{2(m+n)} \cos((m+n)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{si } m = n \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De ce qui précède, nous avons que l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \dots \right\}$$

est un système orthonormal sur $[\pi, \pi]$.

Pour le reste de ce chapitre, la fonction de poids q sera triviale, i.e. $q(x) = 1$ pour tout $x \in [a, b]$. Nous aurons plus tard des situations pour lesquelles la fonction de poids n'est pas triviale, par exemple pour les fonctions de Bessel.

Nous dirons d'une fonction $f(x)$ définie sur $\mathbf{R}$ qu'elle est **périodique de période p** si et seulement si $f(x+p) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. La période p d'une fonction n'est pas unique. En effet, $2p, 3p, \dots$ sont aussi des périodes de f .

À une fonction $f(x)$ définie sur $\mathbf{R}$, nous voulons associer une série de la forme

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

et nous aimerions que la somme de cette série soit égale à $f(x)$ sous de bonnes conditions. Comme la somme de la série $s(x)$ (si cette somme existe) est périodique de période 2π et que nous aimerions que $f(x)$ soit égale à $s(x)$, alors $f(x)$ doit nécessairement être périodique de période 2π . Si

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

alors en intégrant terme-à-terme nous obtenons les équations

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, & \text{si } n \geq 1 \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{éq. [2]})$$

Noter que dans les formules ci-dessus, il suffit de connaître $f(x)$ seulement sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour déterminer les coefficients a_n ($n \geq 0$) et b_n ($n \geq 1$).

Soit une fonction $f(x)$ intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Nous définissons la **série de Fourier** de $f(x)$ comme étant la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

dont les coefficients a_n ($n \geq 0$) et b_n ($n \geq 1$) sont obtenus des équations [2].

Illustrons ceci dans un exemple. Soit $f(x) = x + x^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

Si $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(x + x^2) \sin(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2x) \sin(nx)}{n} dx \right\} = \frac{-1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{-1}{n\pi} \left\{ \left(\frac{-(1 + 2x) \cos(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \cos(nx)}{n} dx \right\} \\ &= \frac{-1}{n\pi} \left\{ \left(\frac{-(1 + 2x) \cos(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{2 \sin(nx)}{n^2} \right)_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{4 \cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{-(x + x^2) \cos(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2x) \cos(nx)}{n} dx \right\} \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \left(-(x + x^2) \cos(nx) \right)_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{(1 + 2x) \sin(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \sin(nx)}{n} dx \right\} \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \left(-(x + x^2) \cos(nx) \right)_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{(1 + 2x) \sin(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{2 \cos(nx)}{n^2} \right)_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{-2 \cos(n\pi)}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \right) \cos(nx) + \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \right) \sin(nx) \right]$$

Nous allons aussi considérer les séries de Fourier des fonctions paires et impaires.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est **paire** (respectivement **impaire**) si et seulement si $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$) pour tout x . Par exemple, $f(x) = x^2$, $\cos(x)$ sont des fonctions paires et

$f(x) = x$, $\sin(x)$ sont des fonctions impaires. La fonction $f(x)$ est paire si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des y , alors qu'elle est impaire si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Lemme 1 (a) Si $f(x)$ est une fonction paire, alors sa série de Fourier est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Entre autres, tous les coefficients b_n sont nuls pour $n \geq 1$.

(b) Si $f(x)$ est une fonction impaire, alors sa série de Fourier est

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Entre autres, tous les coefficients a_n sont nuls pour $n \geq 0$.

Preuve: Notons premièrement que si $g(x)$ est une fonction paire, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 2 \int_0^{\pi} g(x) dx.$$

En effet

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \int_{-\pi}^0 g(x) dx + \int_0^{\pi} g(x) dx = \int_{\pi}^0 g(-y) (-1) dy + \int_0^{\pi} g(x) dx \quad \text{en posant } y = -x \text{ et } dy = -dx.$$

Donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \int_0^{\pi} g(y) dy + \int_0^{\pi} g(x) dx = 2 \int_0^{\pi} g(x) dx,$$

car $g(-y) = g(y)$, étant donné que la fonction g est paire.

Nous devons aussi noter que si $g(x)$ est une fonction impaire, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 0.$$

En effet

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \int_{-\pi}^0 g(x) dx + \int_0^{\pi} g(x) dx = \int_{\pi}^0 g(-y) (-1) dy + \int_0^{\pi} g(x) dx \quad \text{en posant } y = -x \text{ et } dy = -dx.$$

Donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \int_0^{\pi} -g(y) dy + \int_0^{\pi} g(x) dx = 0,$$

car $g(-y) = -g(y)$, étant donné que la fonction g est impaire.

(a) Si $f(x)$ est paire, alors $f(x) \cos(nx)$ est aussi une fonction paire et $f(x) \sin(nx)$ est une fonction impaire. En utilisant les remarques ci-dessus, nous obtenons que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Ceci complète la preuve de (a).

(b) Si $f(x)$ est impaire, alors $f(x) \cos(nx)$ est aussi une fonction impaire et $f(x) \sin(nx)$ est une fonction paire. En utilisant les remarques ci-dessus, nous obtenons que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \right]$$

Ceci complète la preuve de (b). □

Soit une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, \pi]$. Nous définissons sa **série de Fourier paire** comme la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Ceci est la série de Fourier de la fonction paire $f_{\text{paire}}(x)$ définie par

$$f_{\text{paire}}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in [0, \pi]; \\ f(-x), & \text{si } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Nous définissons sa **série de Fourier impaire** comme la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{avec } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Ceci est la série de Fourier de la fonction impaire $f_{\text{impaire}}(x)$ définie par

$$f_{\text{impaire}}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in]0, \pi]; \\ 0, & \text{si } x = 0; \\ -f(-x), & \text{si } x \in [-\pi, 0[. \end{cases}$$

Pour conclure ce chapitre, il existe aussi une autre façon d'écrire les séries de Fourier. Rappelons que si $i = \sqrt{-1}$, alors $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$. De ceci, nous pouvons écrire les fonctions trigonométriques $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de e^{ix} . Plus précisément,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En substituant ces expressions dans la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ définie sur $[-\pi, \pi]$, nous obtenons sa **série de Fourier complexe**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{avec } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

* * *

Exercice 4.1

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elles sont paires, impaires ou ni pair, ni impair.

- | | | |
|------------------------|------------------------------------|--------------------|
| a) $x + 2x^2 + 3x^3$, | b) $x^2 + 5x^4$, | c) $x^2 \sin(x)$, |
| d) $x^2 e^x$, | e) $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. | |

Exercice 4.2

Montrer que les fonctions suivantes: 1, x et $(3x^2 - 1)/2$ sont orthogonales entre elles sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ pour la fonction de poids $q(x) = 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Exercice 4.3

Trouver la série de Fourier de chacune des fonctions suivantes:

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -\pi \leq x \leq 0; \\ c, & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$; | b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$; |
| c) $f(x) = x + \sin(x)$ si $-\pi \leq x \leq \pi$; | d) $f(x) = 1 + x$ si $-\pi \leq x \leq \pi$; |
| e) $f(x) = e^x$ si $-\pi \leq x \leq \pi$; | f) $f(x) = 1 + x + x^2$ si $-\pi \leq x \leq \pi$ |

Exercice 4.4

Montrer que si $f(x)$ est intégrable et périodique de période p , alors nous avons

$$\int_a^{a+p} f(x) \, dx = \int_b^{b+p} f(x) \, dx$$

quels que soient les nombres réels a et b .

Exercice 4.5

Déterminer la série de Fourier impaire des fonctions suivantes sur l'intervalle $[0, \pi]$:

$$\text{a) } f(x) = x^2, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < (\pi/2); \\ 2, & \text{si } (\pi/2) \leq x \leq \pi; \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \cos(x)$$

Exercice 4.6

Déterminer la série de Fourier paire des fonctions suivantes sur l'intervalle $[0, \pi]$:

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = \sin(2x)$, c) $f(x) = e^x$.

Exercice 4.7

Déterminer la série complexe de Fourier des fonctions suivantes sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

$$\text{a) } f(x) = e^{3x}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

CHAPITRE 5

Convergence des séries de Fourier.

Nous avons vu au chapitre 4 qu'il est nécessaire d'étudier la convergence des séries de Fourier pour résoudre certains problèmes d'EDP. Nous présenterons dans ce chapitre les résultats les plus importants concernant la convergence de ces séries.

Soient une fonction $f(x)$ définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et sa série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Nous voulons répondre aux questions suivantes:

- 1) Est-ce que la série de Fourier de $f(x)$ converge? Si oui, vers quelle valeur converge-t-elle?
- 2) Pouvons-nous dériver terme-à-terme la série de Fourier de $f(x)$? Si oui, est-ce que la série de Fourier obtenue est la série de $f'(x)$, la dérivée de $f(x)$? (Nous supposons que $f(x)$ est dérivable.)

La théorie a débuté avec les travaux de Joseph Fourier (mathématicien et physicien français, Auxerre, 1768 - Paris, 1830) sur la chaleur. Lejeune-Dirichlet (mathématicien allemand, Düren, Prusse Rhénane, 1805 - Göttingen, 1850) a étudié la convergence des séries de Fourier de façon rigoureuse afin de justifier les résultats de Fourier.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est **lisse par morceaux** sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si l'intervalle peut être subdivisé en m sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, où $i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$, avec $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ tels que la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ sont continues sur chacun des sous-intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ et que les limites à gauche (respectivement à droite) de $f(x)$ et $f'(x)$ aux points x_i pour $i = 1, 2, \dots, m$ (respectivement pour $i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$) existent.

Considérons la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Alors $f'(x) = (1/3)x^{-2/3}$ si $x \neq 0$ et n'existe pas à $x = 0$. Comme les limites à gauche et à droite de $f'(x) = (1/3)x^{-2/3}$ n'existent pas à $x = 0$, alors $f(x)$ n'est pas lisse par morceaux sur $[-1, 1]$.

Soit une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Son **prolongement périodique** $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de période 2π est la fonction définie par

$$\tilde{f}(x + 2k\pi) = \begin{cases} f(x), & \text{si } -\pi < x < \pi \text{ et } k \in \mathbf{Z}; \\ (f(-\pi) + f(\pi))/2, & \text{si } x = -\pi, \pi \text{ et } k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Nous avons tracé à la figure [1] le graphe de $\tilde{f}(x)$ dans le cas de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x \leq 0; \\ x, & \text{si } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

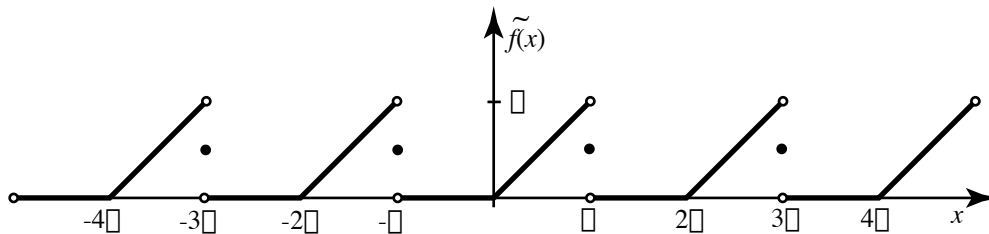


Figure [1]

Soient une fonction $g : I \rightarrow \mathbf{R}$, où I est un intervalle contenu dans $\mathbf{R}$, et un point x_0 à l'intérieur de I . Alors nous noterons la **limite à droite** (respectivement **à gauche**) de g au point x_0 par $g(x_0+)$ (respectivement $g(x_0-)$), i.e.

$$g(x_0+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} g(x) \quad \text{et} \quad g(x_0-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} g(x)$$

si ces limites existent.

Théorème 1 Soient $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et sa série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, & \text{si } n \geq 1; \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Si f est lisse par morceaux, alors la série de Fourier de f converge pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ et nous avons

$$\frac{\tilde{f}(x_0+) + \tilde{f}(x_0-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)) \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbf{R},$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement périodique de f de période 2π . En particulier, si $\tilde{f}$ est continue au point x_0 , alors

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)).$$

Avant d'esquisser la preuve de ce théorème, nous allons illustrer celui-ci dans un exemple. Si $f(x)$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } (\pi/2) \leq x \leq \pi; \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq (\pi/2); \\ -x, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \end{cases}$$

alors f est lisse par morceaux et conséquemment la série de Fourier de f converge. La série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{(\pi+1)}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1 + (-1)^n + n \sin(n\pi/2)}{n^2\pi} \right) \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^n \pi + i - \cos(n\pi/2)}{n\pi} \right) \sin(nx).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ceci. Nous avons tracé le graphe de la somme de cette série de Fourier à la figure [2]. Cette somme $s(x)$ est l'unique fonction périodique de période 2π telle que

$$s(x) = \frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2} = \begin{cases} 0, & \text{si } (\pi/2) < x < \pi; \\ 1, & \text{si } 0 < x < (\pi/2); \\ -x, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ (1/2), & \text{si } x = 0, (\pi/2); \\ (\pi/2), & \text{si } x = -\pi, \pi. \end{cases}$$

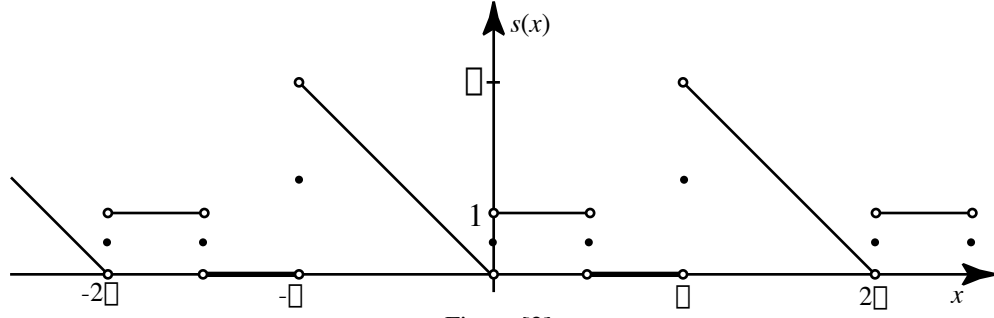


Figure [2]

Il nous faut pour démontrer le théorème 1 plusieurs résultats préliminaires. Nous allons premièrement présenter ces résultats pour ensuite esquisser la preuve du théorème 1.

Le premier résultat est le

Lemme de Riemann-Lebesgue Soit une fonction $g(x)$ intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\alpha x + \beta) dx = 0, \quad \forall \beta \in \mathbf{R}.$$

Preuve: Considérons premièrement le cas des fonctions caractéristiques pour un sous-intervalle. En d'autres mots, supposons que

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $-\pi \leq a < b \leq \pi$, alors, pour $\alpha > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| &= \left| \int_a^b \sin(\alpha x + \beta) dx \right| = \left| \left(\frac{-\cos(\alpha x + \beta)}{\alpha} \right) \Big|_a^b \right| = \left| \frac{-\cos(\alpha b + \beta) + \cos(\alpha a + \beta)}{\alpha} \right| \\ &\leq \frac{|\cos(\alpha b + \beta)| + |\cos(\alpha a + \beta)|}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha} \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité du triangle et le fait que $|\cos(\theta)| \leq 1$ pour tout θ . Donc pour la fonction $g(x)$ ci-dessus, nous obtenons

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\alpha x + \beta) dx = 0, \quad \forall \beta \in \mathbf{R}$$

parce que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (2/\alpha) = 0$.

Si g est une fonction étagée, i.e. nous pouvons subdiviser l'intervalle $[-\pi, \pi]$ en un nombre fini de sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ où $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = \pi$ tels que g est une fonction constante sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i = 0, 1, \dots, (m-1)$, alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\alpha x + \beta) dx = 0, \quad \forall \beta \in \mathbf{R}.$$

En effet $g(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions caractéristiques des sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. Par la linéarité de l'intégrale et parce que le lemme de Riemann-Lebesgue est vérifié pour les fonctions caractéristiques, alors le lemme de Riemann-Lebesgue est aussi vérifié pour les fonctions étagées.

Pour terminer la preuve, il faut noter qu'étant donné $\epsilon > 0$, il existe une fonction étagée $h(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - h(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Parce que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai pour $h(x)$, alors il existe un nombre réel M tel que

$$\alpha \geq M \quad \Rightarrow \quad \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Conséquemment pour $\alpha \geq M$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - h(x)) \sin(\alpha x + \beta) dx + \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| \\
&\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - h(x)) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |(g(x) - h(x)) \sin(\alpha x + \beta)| dx + \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - h(x)| dx + \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

De ceci, nous pouvons conclure que le lemme de Riemann-Lebesgue est vérifié pour toute fonction $g(x)$ intégrable sur $[-\pi, \pi]$. $\square$

Une intégrale de la forme

$$\int_0^{\delta} g(x) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$$

est une **intégrale de Dirichlet**. Il nous faut aussi étudier ces intégrales.

Proposition 1 Soit $g(x)$, une fonction lisse par morceaux sur l'intervalle $[0, \delta]$, où $\delta > 0$. Alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} g(x) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = g(0+).$$

Preuve: Si $\alpha > 0$ et si $0 < h < \delta$, alors nous avons

$$\int_0^{\delta} g(x) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \int_0^h (g(x) - g(0+)) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx + \int_0^h g(0+) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx + \int_h^{\delta} g(x) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx.$$

Considérons chacune de ces intégrales lorsque $\alpha \rightarrow \infty$. Commençons par la dernière intégrale. Comme $g(x)/x$ est une fonction intégrable sur $[h, \delta]$, alors par le lemme de Riemann-Lebesgue, nous obtenons que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_h^{\delta} \frac{g(x)}{x} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = 0.$$

Pour la deuxième intégrale, nous avons

$$\int_0^h g(0+) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = g(0+) \int_0^{\alpha h} \frac{\sin(y)}{(y/\alpha)} (1/\alpha) dy = g(0+) \int_0^{\alpha h} \frac{\sin(y)}{y} dy$$

en posant $y = \alpha x$ et $dy = \alpha dx$. Donc

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^h g(0+) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = g(0+) \int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy = g(0+) \frac{\pi}{2}.$$

Il faut savoir que l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} (\sin(y)/y) dy = \pi/2$.

Il nous reste à considérer la première intégrale. Nous voulons montrer que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^h (g(x) - g(0+)) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = 0$$

pour un certain h , $0 < h < \delta$. S'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que $g'(x) = 0$ pour tout $x < k$, alors $g(x)$ est une fonction constante si $x < k$ et $g(x) - g(0+) = 0$ pour tout $x < k$. En prenant $h = k$, nous obtenons

$$\int_0^h (g(x) - g(0+)) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^h (g(x) - g(0+)) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = 0.$$

Donc nous pouvons supposer qu'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que, soit $g'(x) > 0$ pour tout $x < k$, soit $g'(x) < 0$ pour tout $x < k$. Dans le cas où $g'(x) < 0$ pour tout $x < k$, alors en remplaçant $g(x)$ par $-g(x)$, nous pouvons nous ramener au cas où $g'(x) > 0$ pour tout $x < k$. Nous allons donc supposer qu'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que $g'(x) > 0$ pour tout $x < k$. En d'autres mots, g est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[0, k]$. Prenons $h = k$ ci-dessus. Dans ce cas, la fonction $x \mapsto (g(x) - g(0+))$ est croissante sur $[0, h]$, $0 \leq g(x) - g(0+) \leq g(h) - g(0+)$. Dans cette situation, il existe un nombre réel $c \in [0, h]$ tel que

$$\int_0^h (g(x) - g(0+)) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = (g(h) - g(0+)) \int_c^h \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx.$$

Ceci est le théorème de Bonnet. Nous allons supposer ce résultat. Comme la fonction $x \mapsto x^{-1}$ est intégrable sur $[c, h]$, alors par le lemme de Riemann-Lebesgue, nous obtenons

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_c^h \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = 0.$$

Donc

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^h (g(x) - g(0+)) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = 0.$$

Ceci complète la preuve de la proposition 1. □

Nous allons maintenant étudier les sommes partielles

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

de la série de Fourier de $f(x)$. Rappelons que nous avons la formule suivante:

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos(jx) = \begin{cases} \frac{\sin((n + (1/2))x)}{2 \sin(x/2)}, & \text{si } x \neq 2m\pi \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{Z}; \\ n + (1/2), & \text{si } x = 2m\pi \quad \text{pour un } m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

En effet, si $x = 2m\pi$ pour un $m \in \mathbf{Z}$, alors $\cos(jx) = \cos(j2m\pi) = 1$ pour tout j et nous obtenons que $D_n(x) = n + (1/2)$. Si $x \neq 2m\pi$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$, il nous faut montrer que

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + (1/2))x)}{2 \sin(x/2)}.$$

Nous savons que $\cos(\theta) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ où $i = \sqrt{-1}$. Donc

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2} = \left(\sum_{j=0}^n \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2} \right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(e^{i(n+1)x} - 1)}{(e^{ix} - 1)} + \frac{(e^{-i(n+1)x} - 1)}{(e^{-ix} - 1)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})} + \frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{e^{-ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e^{i(n+(1/2))x} - e^{-i(n+(1/2))x})}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})} = \frac{\sin((n + (1/2))x)}{2 \sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Proposition 2 Soient $f(x)$, une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et sa série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Si $s_n(x)$ est la n -ième somme partielle de cette série, i.e.

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)),$$

alors

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)}{2} D_n(t) dt$$

Preuve: Nous allons remplacer les coefficients de Fourier a_0 , a_j et b_j par leurs expressions en terme d'intégrales.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^\pi f(t) dt \right) + \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^\pi f(t) \cos(jt) dt \right) \cos(jx) + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^\pi f(t) \sin(jt) dt \right) \sin(jx) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos(jt) \cos(jx) + \sin(jt) \sin(jx) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos(j(t-x)) \right) dt. \end{aligned}$$

En utilisant le prolongement périodique $\tilde{f}$ de f et la substitution $y = t - x$ et $dy = dt$, nous obtenons

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \tilde{f}(y+x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos(jy) \right) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(y+x) D_n(y) dy.$$

Nous avons aussi utilisé le fait que $y \mapsto \tilde{f}(y+x)D_n(y)$ est périodique de période 2π et l'exercice 4.4 du chapitre précédente. Nous avons que

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \tilde{f}(y+x) D_n(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}(y+x) D_n(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_\pi^0 \tilde{f}(-z+x) D_n(-z) (-1)dz + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}(y+x) D_n(y) dy \end{aligned}$$

en posant $z = -y$ et $dz = -dy$. Parce que D_n est une fonction paire, i.e. $D_n(-z) = D_n(z)$, nous obtenons donc que

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t) \right) D_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)}{2} \right) D_n(t) dt.$$

La preuve de la proposition 2 est maintenant terminée. $\square$

Preuve du théorème 1: Nous voulons calculer la limite des sommes partielles $s_n(x)$ pour $x = x_0$. À cause de la proposition 2, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\tilde{f}(x_0+t) + \tilde{f}(x_0-t)}{2} \right) D_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\tilde{f}(x_0+t) + \tilde{f}(x_0-t)}{2} \right) \frac{\sin((n + (1/2))t)}{2 \sin(t/2)} dt. \end{aligned}$$

Cette intégrale n'est pas tout à fait une intégrale de Dirichlet, mais nous pouvons la relier à une intégrale de Dirichlet. Il est possible de montrer que la fonction $g(t)$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin(t/2)} \right), & \text{si } 0 < t \leq \pi; \\ 0, & \text{si } t = 0; \end{cases}$$

est continue sur l'intervalle $[0, \pi]$. La seule difficulté est de vérifier la continuité à $t = 0$. Mais il suffit d'utiliser la règle de l'Hopital plusieurs fois pour montrer que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} g(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{(2 \sin(t/2) - t)}{2t \sin(t/2)} = 0 = g(0).$$

En utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin(t/2)} \right) \frac{\tilde{f}(x_0 + t) + \tilde{f}(x_0 - t)}{2} \sin((n + (1/2))t) dt = 0.$$

Conséquemment

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\tilde{f}(x_0 + t) + \tilde{f}(x_0 - t)}{2} \right) \frac{\sin((n + (1/2))t)}{t} dt = \frac{\tilde{f}(x_0+) + \tilde{f}(x_0-)}{2}$$

par la proposition 1. Ainsi le théorème 1 est démontré. $\square$

Nous avons ainsi donné une réponse partielle à la première question concernant la convergence, à savoir des conditions suffisantes pour que la série de Fourier de $f(x)$ converge vers $f(x)$. Il existe des résultats plus généraux sur la convergence. Par exemple, le théorème 1 est valable pour des fonctions plus générales que seulement les fonctions lisses par morceaux. Mais aussi il est possible de considérer une généralisation de la convergence. Nous allons énoncer sans le démontrer un résultat de Fejér généralisant notre théorème 1.

Nous dirons qu'une série $\sum_{n=1}^\infty v_n$ **converge au sens de Cesàro** si les moyennes arithmétiques des sommes partielles convergent, plus précisément si $s_n = \sum_{j=1}^n v_j$ est la n -ième somme partielle et

$$\sigma_n = \frac{(s_1 + s_2 + \dots + s_n)}{n}$$

est la moyenne arithmétique des n premières sommes partielles, alors nous dirons que la série converge au sens de Cesàro si la suite $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ converge.

Il est possible de montrer que si une série $\sum_{n=1}^\infty v_n$ converge vers v , alors elle convergera aussi au sens de Cesàro vers v . Mais la réciproque est fautive. Par exemple, considérons la série $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n$. Celle-ci diverge, mais, au sens de Cesàro, elle converge vers $1/2$.

La généralisation de Fejér du théorème 1 est

Théorème de Fejér Soit $f(x)$ une fonction intégrable (au sens de Lebesgue) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Alors la série de Fourier de $f(x)$ converge au sens de Cesàro vers $(\tilde{f}(x_0+) + \tilde{f}(x_0-))/2$ au point $x = x_0$ pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème. Il est facile de trouver une preuve dans un bon livre d'analyse mathématique, par exemple dans [R.Godement, Analyse mathématique II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1998]. Nous allons maintenant étudier sous quelles conditions nous pouvons dériver terme-à-terme la série de Fourier de $f(x)$.

Considérons premièrement un exemple pour illustrer que nous ne pouvons pas toujours dériver terme-à-terme. Soit la fonction $f(x) = x$ définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Alors nous obtenons que sa série de Fourier est

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \right) \sin(nx).$$

Si nous considérons la série obtenue en dérivant terme-à-terme, alors nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 (-1)^{n+1} \cos(nx).$$

Mais cette série n'est pas la série de Fourier de $f'(x) = 1$. De plus cette série diverge pour certaines valeurs de x , par exemple pour $x = m\pi$ où $m \in \mathbf{Z}$. Une des raisons qui fait que nous n'obtenons pas la série de Fourier de $f'(x)$ dans l'exemple précédent est que $f(\pi) \neq f(-\pi)$. La proposition suivante indique la relation entre la série de Fourier de $f(x)$ et celle de $f'(x)$.

Proposition 2 Soient $f(x)$, une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et sa série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Alors la série de Fourier de $f'(x)$ est

$$\frac{(f(\pi) - f(-\pi))}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(nb_n + \frac{(-1)^n (f(\pi) - f(-\pi))}{\pi} \right) \cos(nx) - na_n \sin(nx) \right].$$

En particulier si $f(\pi) = f(-\pi)$, alors la série de Fourier de $f'(x)$ est obtenue de celle de $f(x)$ en dérivant terme-à-terme.

Preuve: Nous calculons les coefficients de la série de Fourier de $f'(x)$ en intégrant par parties. Notons la série de Fourier de $f(x)$ par

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)).$$

Alors

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} (f(x)) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(f(\pi) - f(-\pi))}{\pi}.$$

Si $n \geq 1$, alors

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[(f(x) \cos(nx)) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} nf(x) \sin(nx) dx \right] = \frac{(-1)^n (f(\pi) - f(-\pi))}{\pi} + nb_n$$

et

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[(f(x) \sin(nx)) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} nf(x) \cos(nx) dx \right] = -na_n.$$

Donc la série de Fourier de $f'(x)$ est

$$\frac{(f(\pi) - f(-\pi))}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(nb_n + \frac{(-1)^n (f(\pi) - f(-\pi))}{\pi} \right) \cos(nx) - na_n \sin(nx) \right].$$

Si $f(\pi) = f(-\pi)$, alors nous obtenons que la série de Fourier de $f'(x)$ est

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)$$

qui est obtenue de celle de $f(x)$ en dérivant terme-à-terme. $\square$

Nous allons maintenant énoncer des conditions suffisantes qui nous permettent de dériver terme-à-terme la série de Fourier de $f(x)$ pour obtenir la série de Fourier de $f'(x)$ et aussi de déterminer vers quelle valeur cette série converge.

Théorème 2 Soient $f(x)$, une fonction dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et $\tilde{f}(x)$ son prolongement périodique de période 2π . Si $\tilde{f}(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et si $f'(x)$ est lisse par morceaux, alors la série de Fourier de $f'(x)$ est obtenue de celle de $f(x)$ en dérivant terme-à-terme et cette série converge vers $(\tilde{f}'(x_0+) + \tilde{f}'(x_0-))/2$ où $\tilde{f}'$ est le prolongement périodique de f' de période 2π . En d'autres mots, si

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

est la série de Fourier de $f(x)$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$$

est la série de Fourier de $f'(x)$ et

$$\frac{(\tilde{f}'(x_0+) + \tilde{f}'(x_0-))}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nx_0) - na_n \sin(nx_0)).$$

Preuve: À cause de la proposition précédente, la série de Fourier de $f'(x)$ est obtenue de celle de $f(x)$ en dérivant terme-à-terme si $f(\pi) = f(-\pi)$. Il suffit donc de vérifier que $f(\pi) = f(-\pi)$. Parce que f est dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et $\tilde{f}$ est continue, alors

$$f(\pi) = f(\pi-) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} \tilde{f}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x > \pi}} \tilde{f}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\pi \\ x > -\pi}} \tilde{f}(x) = f((-\pi)+) = f(-\pi).$$

Parce que $f'(x)$ est lisse par morceaux et par le théorème 1, alors la série de Fourier de $f'(x)$ converge vers

$$\frac{\tilde{f}'(x_0+) + \tilde{f}'(x_0-)}{2}$$

à $x = x_0$ pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$. □

Nous allons maintenant conclure ce chapitre en indiquant qu'il est aussi possible de considérer des fonctions $f(x)$ définies sur l'intervalle $[-\ell, \ell]$ où $\ell > 0$ plutôt que juste sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Dans ce qui suivra, ℓ sera un nombre réel positif > 0 .

Soit une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\ell, \ell]$. Nous définissons la **série de Fourier** de $f(x)$ comme étant la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right]$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx; \\ a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, & \text{pour } n \geq 1; \\ b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Les théorèmes 1 et 2 ont leurs équivalents dans cette situation.

Théorème 1' Soient $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbf{R}$, une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\ell, \ell]$ et sa série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right]$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx; \\ a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad \text{pour } n \geq 1; \\ b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Si f est lisse par morceaux, alors la série de Fourier de f converge pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ et

$$\frac{\tilde{f}(x_0+) + \tilde{f}(x_0-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) \right]$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement périodique de f de période 2ℓ , c'est-à-dire

$$\tilde{f}(x + 2k\ell) = \begin{cases} f(x), & \text{si } -\ell < x < \ell \quad \text{et} \quad k \in \mathbf{Z}; \\ (f(-\ell) + f(\ell))/2, & \text{si } x = -\ell, \ell \quad \text{et} \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

En particulier, si $\tilde{f}$ est continue au point x_0 , alors

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) \right]$$

Théorème 2' Soient $f(x)$, une fonction dérivable sur l'intervalle $[-\ell, \ell]$ et $\tilde{f}(x)$ son prolongement périodique de période 2ℓ . Si $\tilde{f}(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et si $f'(x)$ est lisse par morceaux sur $[-\ell, \ell]$, alors la série de Fourier de $f'(x)$ est obtenue de celle de $f(x)$ en dérivant terme-à-terme et cette série converge vers $(\tilde{f}'(x_0+) + \tilde{f}'(x_0-))/2$ où $\tilde{f}'$ est le prolongement périodique de f' de période 2ℓ . En d'autres mots, si

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right]$$

est la série de Fourier de $f(x)$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx; \\ a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad \text{pour } n \geq 1; \\ b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad \text{pour } n \geq 1; \end{cases}$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{nb_n\pi}{\ell} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) - \left(\frac{na_n\pi}{\ell} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right]$$

est la série de Fourier de $f'(x)$ et

$$\frac{(\tilde{f}'(x_0+) + \tilde{f}'(x_0-))}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{nb_n\pi}{\ell} \right) \cos\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) - \left(\frac{na_n\pi}{\ell} \right) \sin\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) \right].$$

Preuve des théorèmes 1' et 2'. Nous pouvons démontrer les deux théorèmes précédents en considérant la fonction (de y au lieu de x) $y \mapsto g(y) = f(\ell y/\pi)$ définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Si nous notons la série de Fourier de $g(y)$ par

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(ny) + B_n \sin(ny))$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \, dy; \\ A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos(ny) \, dy, \quad \text{si } n \geq 1; \\ B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin(ny) \, dy \quad \text{si } n \geq 1; \end{cases}$$

et

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right],$$

la série de Fourier de $f(x)$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx; \\ a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad \text{pour } n \geq 1; \\ b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad \text{pour } n \geq 1; \end{cases}$$

alors $A_0 = a_0$, $A_n = a_n$ et $B_n = b_n$ pour tout $n \geq 1$. En effet, il suffit de considérer la substitution $x = \ell y / \pi$ et $dx = (\ell / \pi) dy$, alors

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell y}{\pi}\right) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \left(\frac{\pi}{\ell}\right) \, dx = a_0,$$

et, pour $n \geq 1$,

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos(ny) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell y}{\pi}\right) \cos(ny) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left(\frac{\pi}{\ell}\right) \, dx = a_n,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin(ny) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell y}{\pi}\right) \sin(ny) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left(\frac{\pi}{\ell}\right) \, dx = b_n.$$

Si f est lisse par morceaux sur l'intervalle $[-\ell, \ell]$, alors g est lisse par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. En utilisant le théorème 1 pour la fonction $g(y)$, nous obtenons que la série de Fourier de $g(y)$ converge pour tout $y_0 \in \mathbf{R}$ et

$$\frac{(g(y_0+) + g(y_0-))}{2} = \frac{\left(f\left(\frac{\ell y_0}{\pi}+\right) + f\left(\frac{\ell y_0}{\pi}-\right)\right)}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(ny_0) + B_n \sin(ny_0)).$$

Mais en posant $x_0 = (\ell y_0 / \pi)$ et parce que $A_0 = a_0$, $A_n = a_n$ et $B_n = b_n$ pour tout $n \geq 1$ nous obtenons que la série de Fourier de $f(x)$ converge pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ et

$$\frac{\tilde{f}(x_0+) + \tilde{f}(x_0-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) \right].$$

Ceci complète la preuve du théorème 1'.

Si $f(x)$ est dérivable sur $[-\ell, \ell]$, alors $g(y)$ est dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et $g'(y) = (\ell / \pi) f'(\ell y / \pi)$ par la règle de chaînes. Si le prolongement périodique $\tilde{f}$ de f de période 2ℓ est continu, alors nous aurons que le prolongement périodique $\tilde{g}$ de g de période 2π est aussi continu. Nous pouvons donc utiliser le théorème 2 et la série de Fourier de $g'(y)$ est obtenu de celle de $g(y)$ en dérivant terme-à-terme, i.e. la série de Fourier de $g'(y) = (\ell / \pi) f'(\ell y / \pi)$ (avec les notations ci-dessus) est

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos(ny) - nA_n \sin(ny)).$$

En utilisant la substitution $x = (\ell y/\pi)$ et parce que $A_n = a_n$ et $B_n = b_n$ pour $n \geq 1$, nous obtenons que la série de Fourier de $f'(x)$ est

$$\frac{\pi}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) - n a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right].$$

Ceci est la série obtenue de la série de Fourier de $f(x)$ en dérivant terme-à-terme. Nous obtenons de la même façon la convergence et vers quelle valeur cette série de Fourier converge. Ceci complète la preuve du théorème 2'. $\square$

Soit une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, \ell]$. Nous définissons sa **série de Fourier paire** comme la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Ceci est la série de Fourier de la fonction paire $f_{\text{paire}}(x)$ définie par

$$f_{\text{paire}}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in [0, \ell]; \\ f(-x), & \text{si } x \in [-\ell, 0]. \end{cases}$$

Nous définissons sa **série de Fourier impaire** comme la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{avec } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Ceci est la série de Fourier de la fonction impaire $f_{\text{impaire}}(x)$ définie par

$$f_{\text{impaire}}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in]0, \pi]; \\ 0, & \text{si } x = 0; \\ -f(-x), & \text{si } x \in [-\pi, 0[. \end{cases}$$

Pour ce qui est de la convergence de ces séries de Fourier paire et impaire, il suffit d'utiliser les théorèmes 1' et 2' pour les fonctions $f_{\text{paire}}(x)$ et $f_{\text{impaire}}(x)$ selon que nous considérons la série paire ou la série impaire.

* * *

Exercice 5.1

Déterminer vers quelles valeurs chacune des séries de Fourier des numéros 4.5 et 4.6 convergent ponctuellement pour les valeurs de x suivantes: $-\pi$, $-(\pi/2)$, 0 , $(\pi/2)$, π .

Exercice 5.2

- Calculer la série de Fourier de la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- Utiliser le résultat obtenu en a) pour montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.

Exercice 5.3

- Calculer la série de Fourier de la fonction $f(x) = x^4$ définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- Utiliser le résultat obtenu en a) pour montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$.

Exercice 5.4

Trouver la série de Fourier de la fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ si:

- $f(x) = \cos(x)$,
- $f(x) = \sin(x)$,
- $f(x) = e^x$.

Exercice 5.5(†)

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que $g(a) = 0$ et g est dérivable et croissante sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(b) \int_c^b f(x) dx.$$

Indice: Considérer la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Noter que $F(x)$ est continue et $F'(x) = f(x)$. Utiliser l'intégration par parties pour évaluer l'intégrale $\int_a^b f(x) g(x) dx$.

Exercice 5.6(†)

Soient une suite $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ de nombres réels qui converge vers s . Notons par σ_n , la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite $\{s_n\}_{n=1}^\infty$:

$$\sigma_n = \frac{(s_1 + s_2 + \cdots + s_n)}{n}.$$

Montrer que la suite $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ converge aussi vers s .

CHAPITRE 6

Retour sur l'équation d'onde.

Nous avons vu au chapitre 4 que le problème de la corde vibrante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{éq. [1]})$$

pour lequel les conditions initiales sont

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{pour tout } x, 0 \leq x \leq \ell$$

et les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, t \geq 0,$$

a comme solution formelle:

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \right]$$

où

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

sont respectivement les séries de Fourier impaires de $f(x)$ et $g(x)$, c'est-à-dire que nous avons

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{et} \quad \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

Noter que cette dernière équation signifie que

$$b_n = \frac{2}{c\pi n} \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx. \quad (\text{éq. [2]})$$

Nous allons maintenant déterminer des conditions suffisantes à être satisfaites par $f(x)$ et $g(x)$ et qui font en sorte que la solution formelle est une vraie solution. Nous montrerons qu'avec celles-ci, nous avons bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

et que les conditions à la frontière et initiales sont aussi vérifiées.

Rappelons que

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))}{2}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

En utilisant ces identités trigonométriques, nous pouvons ainsi récrire notre solution formelle comme la somme de quatre séries trigonométriques.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell}\right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell}\right). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant considérer chacune de ces séries et vérifier que chacune d'entre elles satisfait l'équation [1] lorsque $f(x)$ et $g(x)$ satisfont certaines conditions. Commençons par les deux premières séries. Dans ce cas, il nous faut considérer des conditions sur $f(x)$ de façon à pouvoir dériver deux fois ces séries. Nous supposons dans ce qui suit que $f(x)$ satisfait les trois conditions suivantes:

- (C. 1): $f(x)$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0, \ell]$ et $f(0) = f(\ell) = 0$;
- (C. 2): $f'(x)$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0, \ell]$;
- (C. 3): $f''(x)$ est continue et lisse par morceaux sur l'intervalle $[0, \ell]$ et $f''(0) = f''(\ell) = 0$.

Dans ce cas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) dy$$

est la série de Fourier de la fonction impaire $f_{\text{impaire}}(y)$. Rappelons que $f_{\text{impaire}}(y)$ est définie au chapitre 4. Noter que le prolongement $\tilde{f}_{\text{impaire}}$ périodique de f_{impaire} de période 2ℓ est continu parce que $f(y)$ est continue sur $[0, \ell]$ et que $f_{\text{impaire}}(0) = f_{\text{impaire}}(-\ell) = f_{\text{impaire}}(\ell) = 0$. À cause de l'observation précédente et parce que la dérivée $f'(y)$ est lisse par morceaux sur $[0, \ell]$, alors, en utilisant le théorème 2' du chapitre 5, nous obtenons la série de Fourier paire de la dérivée $f'(y)$ de $f(y)$ en dérivant terme-à-terme la série de Fourier impaire de $f(y)$, i.e.

$$f'(y) = \frac{d}{dy} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right).$$

Noter que nous avons bien l'égalité parce que f' est continue sur $[0, \ell]$.

De ce qui précède et en utilisant la règle de chaînes, nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \right] &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \quad \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \right] &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) (-c) \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right). \end{aligned}$$

La série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right)$$

est la série de Fourier de la fonction paire $(f')_{\text{paire}}(y)$. Rappelons que $(f')_{\text{paire}}(y)$ est définie au chapitre 4. Le prolongement $(\tilde{f}')_{\text{paire}}$ périodique de $(f')_{\text{paire}}$ de période 2ℓ est continu parce que $f'(y)$ est continue sur $[0, \ell]$, $(f')_{\text{paire}}$ est continue à 0 et $(\tilde{f}')_{\text{paire}}(-\ell) = (\tilde{f}')_{\text{paire}}(\ell)$. À cause de cette remarque et parce que f'' est lisse par morceaux, nous obtenons en utilisant le théorème 2' du chapitre 5 que

$$f''(y) = \frac{d}{dy} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \right] = (-1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right).$$

En utilisant la règle de chaînes, nous obtenons alors que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{2} \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) \right] &= \frac{(-1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) \quad \text{et} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{2} \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) \right] &= \frac{(-1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 (-c)^2 \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) \right] = 0.$$

De façon tout à fait identique, nous obtenons aussi que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right) \right] = 0.$$

Nous allons maintenant considérer les deux séries

$$\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right)$$

et vérifier qu'elles aussi satisfont l'équation [1] lorsque $g(x)$ satisfait certaines conditions. Nous supposons dans ce qui suit que $g(x)$ satisfait les conditions suivantes:

(C. 4): $g(x)$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0, \ell]$ et $g(0) = g(\ell) = 0$;

(C. 5): $g'(x)$ est continue et lisse par morceaux sur l'intervalle $[0, \ell]$.

Notons par $G(x)$: l'unique fonction sur $[0, \ell]$ telle que $G'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, \ell]$ et $\int_0^\ell G(x) dx = 0$, c'est-à-dire que

$$G(x) = \left(\int_0^x g(z) dz \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^y g(z) dz dy \right).$$

En effet, nous obtenons par le théorème fondamental du calcul que $G'(x) = g(x)$ et

$$\begin{aligned}\int_0^\ell G(x) dx &= \int_0^\ell \left[\left(\int_0^x g(z) dz \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^y g(z) dz dy \right) \right] dx \\ &= \int_0^\ell \left[\left(\int_0^x g(z) dz \right) \right] dx - \frac{\ell}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^x g(z) dz dx \right) = 0.\end{aligned}$$

Notons la série de Fourier paire de $G(y)$ par

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{n\pi y}{\ell} \right).$$

Alors

$$A_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell G(y) dy = 0.$$

Si $n \geq 1$, alors nous avons

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell G(y) \cos \left(\frac{n\pi y}{\ell} \right) dy = \frac{2}{\ell} \left[\left(\frac{\ell}{n\pi} G(y) \sin \left(\frac{n\pi y}{\ell} \right) \right)_0^\ell - \int_0^\ell \left(\frac{\ell}{n\pi} \right) g(y) \sin \left(\frac{n\pi y}{\ell} \right) dy \right] \\ &= \frac{(-2)}{n\pi} \int_0^\ell g(y) \sin \left(\frac{n\pi y}{\ell} \right) dy = -cb_n\end{aligned}$$

en intégrant par parties et en utilisant l'équation [2]. Conséquentment la série de Fourier paire de $G(y)$ est

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-c) b_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{c\pi n} \int_0^{\ell} g(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) dy.$$

Cette série est la série de Fourier de $G_{\text{paire}}(y)$. Cette fonction est continue parce que $G(y)$ est continue, étant l'intégrale de la fonction continue g . De plus $G'(y) = g(y)$ est lisse par morceaux. En utilisant le théorème 2' du chapitre 5, nous avons que

$$G'(y) = g(y) = \frac{d}{dy} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-c) b_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right).$$

Conséquentment

$$\frac{d}{dy} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \right] = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right).$$

De ceci et en utilisant la règle de chaînes, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \right] &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \quad \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \right] &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right). \end{aligned}$$

La série

$$- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right)$$

est la série de Fourier impaire de la fonction $(1/c) g(y)$, c'est-à-dire la série de Fourier de $(1/c) g_{\text{impaire}}(y)$. Comme $g(0) = g(\ell) = 0$, alors le prolongement périodique de $(1/c) g_{\text{impaire}}(y)$ de période 2ℓ est continue. Notons aussi que par hypothèse $g'(y)$ est lisse par morceaux sur $[0, \ell]$. En utilisant le théorème 2' du chapitre 5, nous avons que

$$\frac{d}{dy} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \right] = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right).$$

En utilisant la règle de chaînes, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \right] &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \quad \text{et} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \right] &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right) \right] = 0.$$

De façon tout à fait identique, nous obtenons

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell}\right) \right] = 0.$$

Nous avons presque démontré dans ce qui précède le résultat suivant.

Théorème 1 Si $f(x)$ et $g(x)$ satisfont les cinq conditions: (C. 1) - (C. 5) énoncées précédemment, alors la solution formelle

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \right]$$

où

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

sont les séries de Fourier impaires de $f(x)$ et $g(x)$, c'est-à-dire que nous avons

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{et} \quad \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$$

est une vraie solution du problème de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pour lequel les conditions initiales sont

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{pour tout } x, 0 \leq x \leq \ell$$

et les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, t \geq 0.$$

Preuve: Nous avons vu que la solution formelle satisfait bien l'EDP. Il nous faut considérer les conditions à la frontière et les conditions initiales. Pour ce qui est des conditions à la frontière, nous avons

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi 0}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \right] = 0 \quad \text{et} \\ u(\ell, t) &= \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi \ell}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$ parce que $\sin(n\pi) = 0$ si $n \in \mathbf{N}$.

Pour ce qui est des conditions initiales, nous avons

$$u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi 0}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi 0}{\ell}\right) \right] = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = f(x)$$

parce que $f(x)$ est lisse par morceaux et $\tilde{f}_{\text{impaire}}(x)$ est continue. Ceci montre que nous avons bien le déplacement initial. Quant à la vitesse initiale, rappelons que nous avons montré que pour la solution formelle, nous avons

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi(x - ct)}{\ell}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi(x + ct)}{\ell}\right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x - ct)}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x + ct)}{\ell}\right), \end{aligned}$$

et ainsi que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) \right] &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \cos \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right) \right] &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \cos \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) \right] &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right) \right] &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \sin \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \cos \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \cos \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \sin \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right).\end{aligned}$$

Conséquemment nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{cn\pi}{\ell} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) = g(x)$$

parce que $g(x)$ est lisse par morceaux et $g_{\text{impaire}}(x)$ est continue. Ceci complète la preuve du théorème. $\square$

Il est aussi possible de décrire la solution du problème précédent de la corde vibrante sous une forme similaire à celle de d'Alembert obtenue au chapitre 2 pour un autre problème de corde vibrante dans lequel il n'y avait pas de conditions à la frontière.

Proposition 1 Si $f(x)$ et $g(x)$ satisfont les cinq conditions: (C. 1) - (C. 5) énoncées précédemment, alors

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{f}_{\text{impaire}}(x-ct) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(x+ct) \right) + \frac{1}{2c} \left(\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}_{\text{impaire}}(y) dy \right),$$

où $\tilde{f}_{\text{impaire}}(x)$ et $\tilde{g}_{\text{impaire}}(x)$ sont les prolongements périodiques de période 2ℓ des fonctions impaires $f_{\text{impaire}}(x)$ et $g_{\text{impaire}}(x)$, est une solution du problème de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pour lequel les conditions initiales sont

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{pour tout } x, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

et les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, \quad t \geq 0.$$

Preuve: Parce que $f(x)$ et $g(x)$ satisfont les cinq conditions: (C. 1) - (C. 5), nous avons vu en démontrant le théorème 1 que

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos \left(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos \left(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right)\end{aligned}$$

est une solution du problème de la corde vibrante. De plus nous avons aussi montré que

$$\tilde{f}_{\text{impaire}}(y) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \quad \text{pour tout } y \in \mathbf{R}.$$

De ceci, nous obtenons que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{f}_{\text{impaire}}(x - ct) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(x + ct) \right) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x - ct)}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} b_n \cos\left(\frac{n\pi(x + ct)}{\ell}\right).$$

Notons que

$$G_{\text{paire}}(x) = \left(\int_0^x g_{\text{impaire}}(z) dz \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^x g(z) dz dx \right) \quad \text{pour tout } x \in [-\ell, \ell].$$

En effet, si $x \geq 0$, alors

$$G_{\text{paire}}(x) = G(x) = \left(\int_0^x g(z) dz \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^y g(z) dz dy \right) = \left(\int_0^x g_{\text{impaire}}(z) dz \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^y g(z) dz dy \right).$$

Si $x \leq 0$, alors

$$\begin{aligned} G_{\text{paire}}(x) &= G(-x) = \left(\int_0^{-x} g(z) dz \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^y g(z) dz dy \right) \\ &= \left(\int_0^x g(-w) (-1) dw \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^y g(z) dz dy \right) \\ &= \left(\int_0^x g_{\text{impaire}}(w) dw \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^y g(z) dz dy \right) \end{aligned}$$

en utilisant la substitution $w = -z$ et $dw = (-1) dz$.

Notons aussi que, si $\tilde{G}_{\text{paire}}(x)$ est le prolongement périodique de période 2ℓ de $G_{\text{paire}}(x)$, alors nous avons l'équation [3]:

$$\tilde{G}_{\text{paire}}(x) = \left(\int_0^x \tilde{g}_{\text{impaire}}(z) dz \right) - \frac{1}{\ell} \left(\int_0^\ell \int_0^y g(z) dz dy \right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}. \quad (\text{éq. [3]})$$

En effet, il suffit d'observer que le prolongement périodique $\tilde{g}_{\text{impaire}}(x)$ de période 2ℓ de la fonction impaire $g_{\text{impaire}}(x)$ est impair. Nous obtenons alors facilement que $\int_I \tilde{g}_{\text{impaire}}(x) dx = 0$ pour tout intervalle I de longueur 2ℓ . L'équation [3] découle de ceci.

Nous avons montré dans la preuve du théorème 1 que

$$\tilde{G}_{\text{paire}}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-c) b_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) \quad \text{pour tout } y \in \mathbf{R}.$$

Conséquemment nous obtenons que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{f}_{\text{impaire}}(x - ct) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(x + ct) \right) + \left(\frac{-1}{2c} \right) \tilde{G}_{\text{paire}}(x - ct) + \left(\frac{1}{2c} \right) \tilde{G}_{\text{paire}}(x + ct).$$

En utilisant l'équation [3], nous obtenons que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{f}_{\text{impaire}}(x - ct) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(x + ct) \right) \\ &\quad + \left(\frac{-1}{2c} \right) \left(\int_0^{x-ct} \tilde{g}_{\text{impaire}}(z) dz \right) + \left(\frac{1}{2c} \right) \left(\int_0^{x+ct} \tilde{g}_{\text{impaire}}(z) dz \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{f}_{\text{impaire}}(x - ct) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(x + ct) \right) + \left(\frac{1}{2c} \right) \left(\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}_{\text{impaire}}(z) dz \right)$$

est une solution du problème de la corde vibrante. Ceci conclut la preuve de cette proposition. $\square$

Dans tout ce qui précède, nous avons décrit une solution au problème de la corde vibrante (avec conditions à la frontière). Mais à aucun moment, nous n'avons discuté de l'unicité de la solution. Le théorème suivant établit l'unicité.

Théorème 2 Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème de la corde vibrante suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pour lequel les conditions initiales sont

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{pour tout } x, 0 \leq x \leq \ell$$

et les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, t \geq 0,$$

alors $u_1 = u_2$. En d'autres mots, si le problème ci-dessus a au moins une solution, alors celle-ci est unique.

Preuve: Considérons premièrement la situation pour laquelle $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$. Nous allons maintenant montrer que dans ce cas le problème a une seule solution $u(x, t) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$ et tout $t \geq 0$.

Soit la fonction $E(t)$ de t définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Cette fonction $E(t)$ est l'énergie de la corde au temps t . Nous allons maintenant montrer que $E(t)$ est une fonction constante.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + 2c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx \\ &= c^2 \int_0^\ell \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, nous avons

$$\int_0^\ell \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right)_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^\ell \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Donc

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right)_{x=0}^{x=\ell} = 0$$

parce que $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ a comme conséquence que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\ell, t) = 0.$$

En d'autres mots, $E(t)$ est une fonction constante. Ceci est la conservation de l'énergie. Nous pouvons maintenant calculer $E(0)$.

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[(g(x))^2 + c^2 (f'(x))^2 \right] dx = 0$$

parce que nous sommes dans la situation où $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$. Nous obtenons aussi que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$. Parce que $E(t)$ est une fonction constante et $E(0) = 0$, nous avons que $E(t) = 0$ pour tout t . Comme $E(t)$ est l'intégrale d'une fonction dont les valeurs sont ≥ 0 et que $E(t)$ est toujours nul, nous avons

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell] \text{ et } t \geq 0.$$

Donc nous obtenons de ceci que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

et conséquemment $u(x, t)$ est une fonction constante. Comme $u(0, t) = 0$, nous pouvons conclure que, dans cette première situation (celle où $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$), nous avons que $u(x, t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$ et $t \geq 0$.

Si nous revenons aux deux solutions u_1 et u_2 du problème de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pour lequel les conditions initiales sont

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{pour tout } x, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

et les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, \quad t \geq 0,$$

alors il est facile de vérifier que la fonction $(u_1 - u_2)$ est une solution du problème de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pour lequel les conditions initiales sont

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{pour tout } x, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

et les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t, \quad t \geq 0.$$

En d'autres mots $(u_1 - u_2)$ est une solution du problème de la corde vibrante pour lequel les conditions initiales sont un déplacement vertical initial nul (i.e. $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$) et une vitesse initiale nulle (i. e. $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$). Mais nous avons vu précédemment que la seule solution dans ce cas est la solution nulle. Donc $u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. $\square$

Il est possible de généraliser la notion de solution de la façon à admettre des solutions qui auraient des dérivées partielles discontinues le long des courbes caractéristiques. Si nous considérons la solution de la proposition 1, celle-ci pourrait avoir des dérivées partielles pour tous les (x, t) sauf si $x - ct$ est égale à certaines valeurs fixes. Il est donc possible de considérer des solutions généralisées. La solution donnée par

le théorème 1 ou encore la proposition 1 est cette solution généralisée. Tout ce qui est différent ici, c'est que nous sommes un peu moins restrictif avec les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ des conditions initiales. Dans les exercices qui suivront, nous adopterons ce point de vue plus général.

Nous allons terminer ce chapitre en présentant un exemple. Déterminons le déplacement vertical $u(x, t)$ d'une corde idéale de longueur π solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

i.e. $c = 1$, si le déplacement vertical initial est

$$u(x, 0) = f(x) = x^3 - \frac{3\pi}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{2}x$$

pour $x \in [0, \pi]$ et la vitesse initiale nulle, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 0$$

pour $x \in [0, \pi]$. Noter que la fonction $f(x)$ satisfait les conditions (C.1) et (C.2), mais pas (C.3). En effet, $f''(x) = 6x - 3\pi$ et $f''(0) = -3\pi \neq 3\pi = f''(\pi)$. Mais nous pouvons tout de même présenter la solution dans un sens généralisé. Nous avons que la solution est

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \right]$$

où

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

sont les séries de Fourier impaires de $f(x)$ et $g(x)$, c'est-à-dire que nous avons

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{et} \quad \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

Comme $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$, nous obtenons que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Nous avons aussi en intégrant par parties que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x^3 - \frac{3}{2}\pi x^2 + \frac{\pi^2}{2}x \right) \sin(nx) dx = \frac{6((-1)^n + 1)}{n^3} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Donc nous obtenons que la solution est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6((-1)^n + 1)}{n^3} \right) \sin(nx) \cos(nt)$$

pour tout $x \in [0, \pi]$ et $t \geq 0$. Nous avons tracé le graphe de $u(x, t)$ pour $x \in [0, \pi]$ et $t \in [0, 1]$ à la figure [1].

Pour chacune des valeurs de t , nous avons le déplacement vertical de la corde à cet instant.

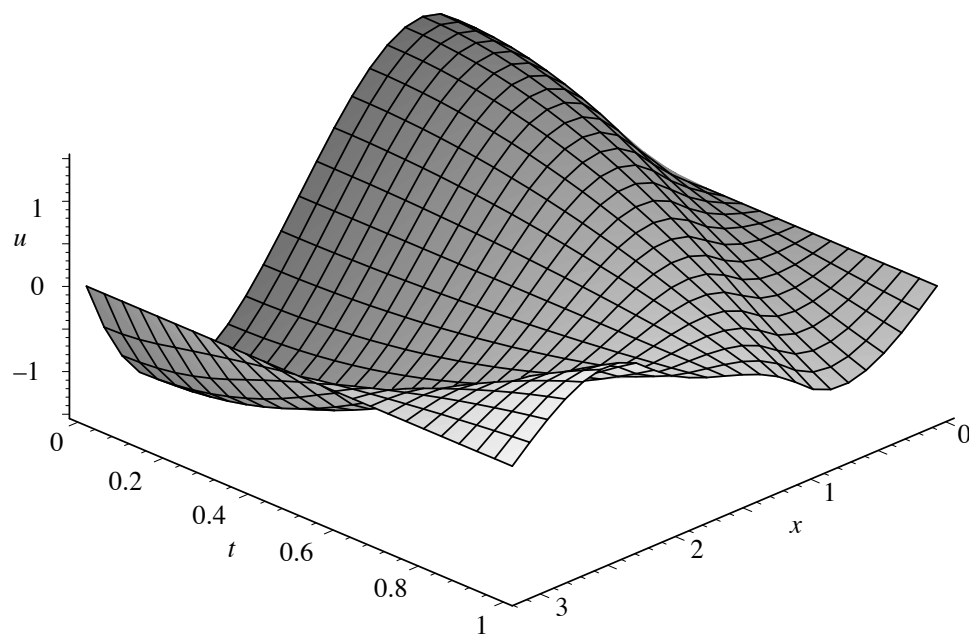


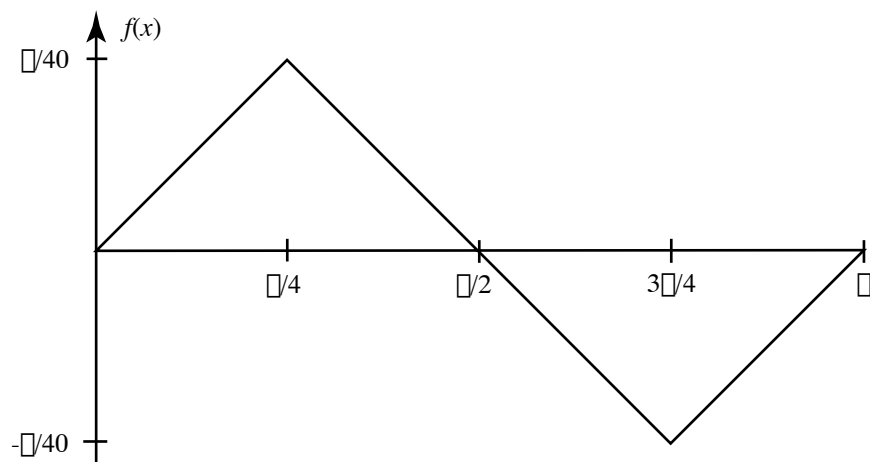
Figure [1]

* * *

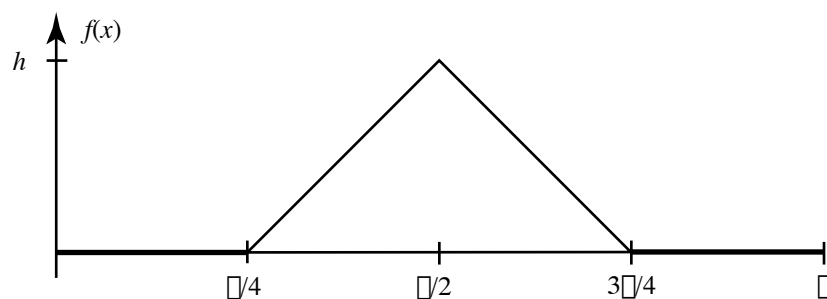
Exercice 6.1

Déterminer le déplacement vertical $u(x, t)$ d'une corde vibrante (idéale) fixée à ses deux extrémités dont la longueur $\ell = \pi$, la vitesse initiale est nulle (i.e. $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$) et le déplacement initial (i.e. $f(x)$) est représenté par le graphique:

a)

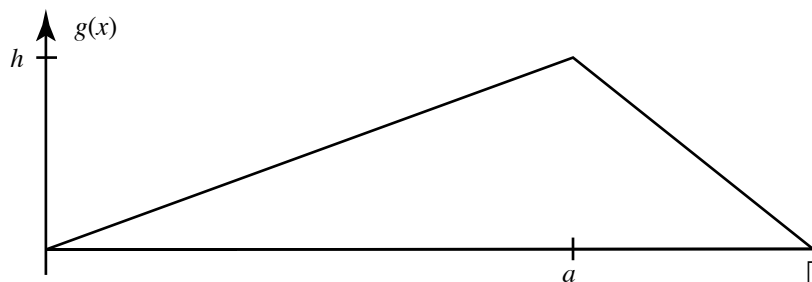


b)



Exercice 6.2

Déterminer le déplacement vertical $u(x, t)$ d'une corde vibrante (idéale) fixée à ses deux extrémités dont la longueur $\ell = \pi$, le déplacement initial est nul (i.e. $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$) et la vitesse initiale est représentée par le graphique:



Exercice 6.3

En utilisant la méthode de séparation de variables, trouver des solutions de chacune des équations suivantes:

a) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

b) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x + y)u$.

Exercice 6.4(†)

Il est possible de montrer que le déplacement vertical $u(x, t)$ d'une poutre homogène est gouverné par une équation d'ordre 4 de la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad \text{où } u = u(x, t)$$

Supposons que la poutre est de longueur ℓ , que sa vitesse initiale est nulle, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell],$$

que les extrémités de la poutre sont supportées, i.e. $u(0, t) = 0$ et $u(\ell, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, que les moments sont nuls, i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\ell, t) = 0,$$

et finalement que le déplacement initial est connu, i.e. $u(x, 0) = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction donnée.

a) En utilisant la méthode de séparation de variables et les conditions ci-dessus, montrer que la solution formelle est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{cn^2\pi^2 t}{\ell^2}\right) \quad \text{où } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

est la série de Fourier impaire de $f(x)$.

b) Trouver la solution formelle si le déplacement initial est $u(x, 0) = f(x) = x(\ell - x)/\ell^2$.

CHAPITRE 7

L'équation de la chaleur: cas de la dimension 1.

Dans ce chapitre et le suivant, nous allons illustrer la méthode de séparation de variables dans deux situations simples: l'équation de la chaleur dans une tige et l'équation de Laplace sur un rectangle. Nous étudierons plus tard des situations plus complexes comme l'équation d'onde pour une membrane circulaire et l'équation de Laplace à l'intérieur (ou l'extérieur) d'une sphère en discutant simultanément des problèmes de valeurs propres de Sturm-Liouville.

Commençons maintenant en utilisant la méthode de séparation de variables pour l'équation de la chaleur de dimension 1. Nous décrirons premièrement la situation physique pour ensuite nous concentrer sur le problème mathématique.

Soit une tige homogène de longueur ℓ suffisamment mince de façon à ce que la chaleur soit distribuée également pour toute section transversale. La surface de cette dernière est isolée. Il n'y a donc aucune perte de chaleur à travers la surface de la tige. Si nous notons par $u(x, t)$, la température dans la tige au temps t au point x , alors $u = u(x, t)$ satisfait l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où c est une constante > 0 . Précisément nous avons que $c^2 = K\sigma/\rho$ où K est la conductivité thermique, σ est la chaleur spécifique et ρ est la densité. Si nous supposons qu'aux extrémités: $x = 0$ et $x = \ell$, la température est gardée constante et égale à 0, i.e. $u(0, t) = 0$ et $u(\ell, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, et que la température initiale est connue, i.e. $u(x, 0) = f(x)$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$. Nous allons déterminer $u(x, t)$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$ et $t \geq 0$.

En d'autres mots, nous avons le problème d'EDP suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t) \quad (\text{éq. [1]})$$

pour lequel les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et la condition initiale est $u(x, 0) = f(x)$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$.

Nous allons procéder comme pour l'équation de la corde vibrante. Nous étudions premièrement le problème intermédiaire:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t)$$

pour lequel les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

En d'autres mots, nous laissons tomber pour l'instant la condition initiale. Pour ce problème intermédiaire, nous cherchons à déterminer des solutions $u(x, t)$ non triviales de la forme $X(x)T(t)$ où X , T sont respectivement des fonctions de x et de t ayant au moins des dérivées premières et secondes continues.

Si nous substituons une telle solution $u(x, t) = X(x)T(t)$ dans l'équation [1], nous obtenons $X T' = c^2 X'' T$. Ici X'' est la dérivée seconde de X par rapport à x , alors que T' est la dérivée de T par rapport à t . Nous pouvons séparer les variables, c'est-à-dire que nous avons l'équation

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T'}{T}.$$

Le terme de gauche de cette équation est une fonction de x seulement, alors que le terme de droite est une fonction de t seulement. Pour que nous puissions avoir cette égalité, il faut donc que chacun de ces termes soit constant et nous noterons cette constante par λ . De ceci, nous tirons deux équations différentielles ordinaires:

$$X'' - \lambda X \quad \text{et} \quad T' - \lambda c^2 T = 0.$$

Il nous faut déterminer λ . Les conditions à la frontière signifient que $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ et $u(\ell, t) = X(\ell)T(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Comme nous cherchons des solutions non triviales, nous pouvons supposer que $T(t) \neq 0$ pour au moins un $t = t_0$. Sinon la solution $u(x, t) = X(x)T(t)$ est triviale. Conséquemment $X(0)T(t_0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$ et $X(\ell)T(t_0) = 0 \Rightarrow X(\ell) = 0$. Il nous faut donc résoudre les équations différentielles ordinaires suivantes:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad \text{avec} \quad X(0) = 0 \quad \text{et} \quad X(\ell) = 0$$

$$T' - \lambda c^2 T = 0 \quad (t \geq 0)$$

où λ est une constante.

La première équation $X'' - \lambda X = 0$ avec $X(0) = 0$ et $X(\ell) = 0$ est la même que celle obtenue pour le problème de la corde vibrante. C'est une équation linéaire d'ordre 2 à coefficient constant. La seconde équation est une équation linéaire d'ordre 1 à coefficient constant. Les deux sont des équations très connues.

En procédant de la même façon que pour le cas de la corde vibrante, nous obtenons pour l'équation $X'' - \lambda X = 0$ avec les conditions $X(0) = 0$ et $X(\ell) = 0$ que, si $\lambda \geq 0$, alors $X \equiv 0$ et $u(x, t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$ et $t \geq 0$. Nous pouvons exclure ces valeurs et ne considérer que le cas où $\lambda = -\nu^2 < 0$. Si $\lambda = -\nu^2 < 0$, alors $X(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)$. Mais de $X(0) = 0$, nous obtenons que $A = 0$, alors que de $X(\ell) = 0$, nous obtenons que $B \sin(\nu \ell) = 0$. Comme nous cherchons à déterminer des solutions non triviales, nous pouvons supposer que $B \neq 0$ et conséquemment $\sin(\nu \ell) = 0$. De ceci, nous pouvons conclure que $\nu \ell = n\pi$ et $\lambda = -(n\pi/\ell)^2$ avec $n \in \mathbf{Z}$. Les valeurs $\lambda_n = -(n\pi/\ell)^2$ sont les valeurs propres et les fonctions $B_n \sin(n\pi x/\ell)$ sont les fonctions caractéristiques du problème: $X'' - \lambda X = 0$ pour $0 \leq x \leq \ell$ avec $X(0) = 0$ et $X(\ell) = 0$. Parce que $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, il suffit donc de considérer les valeurs propres λ_n et les fonctions caractéristiques X_n pour $n \in \mathbf{N}$ avec $n > 0$. Si nous considérons maintenant la deuxième équation $T' - \lambda_n c^2 T = 0$, nous pouvons résoudre celle-ci par séparation de variables, i.e.

$$\frac{dT}{dt} = \lambda_n c^2 T \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} dT = \lambda_n c^2 dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{T} dT = \int \lambda_n c^2 dt \quad \Rightarrow \quad \ln(|T|) = \lambda_n c^2 t + k$$

où k est une constante. Ainsi nous obtenons que

$$T_n(t) = C_n \exp(\lambda_n c^2 t) = C_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi c}{\ell} \right)^2 t \right] \quad \text{où } C_n \text{ est un nombre réel quelconque,}$$

est la solution générale de l'équation $T' - \lambda_n c^2 T = 0$.

Nous obtenons de ce qui précède que

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \exp \left[- \left(\frac{n\pi c}{\ell} \right)^2 t \right]$$

est une solution du problème intermédiaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t)$$

pour lequel les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Nous avons remplacé λ_n par sa valeur $-(n\pi/\ell)^2$ et $B_n C_n$ par a_n . Comme l'équation est linéaire et homogène et que les conditions aux extrémités sont aussi homogènes, nous pouvons utiliser le principe de superposition et obtenir que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right]$$

est aussi une solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t)$$

pour lequel les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Rappelons de nouveau que nous abusons ici du principe de superposition puisque nous sommes non pas sur un nombre fini de termes, mais sur un nombre infini de termes.

Si nous revenons à notre problème initial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t)$$

pour lequel les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et la condition initiale est $u(x, 0) = f(x)$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$, alors

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right]$$

est une solution de ce problème si

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = f(x)$$

i.e si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \text{ est la série de Fourier impaire de } f(x).$$

Dans ce qui précède, nous avons fait sans les énoncer des hypothèses sur la convergence de certaines séries. De ce fait, tout ce que nous avons obtenu jusqu'à maintenant, ce n'est qu'une solution formelle

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right] \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

au problème de la chaleur suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{où } u = u(x, t),$$

pour lequel les conditions à la frontière sont

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et la condition initiale est $u(x, 0) = f(x)$ pour tout $0 \leq x \leq \ell$.

Théorème 1 Si $f(x)$ est continue et lisse par morceaux sur l'intervalle $[0, \ell]$ et que $f(0) = f(\ell) = 0$, alors la solution formelle

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right], \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

du problème de la chaleur suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{où } u = u(x, t),$$

$$\text{avec } u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell],$$

est une vraie solution du problème.

Nous ne démontrerons pas ce résultat. La preuve fait appel à la convergence uniforme des séries, ainsi qu'au fait que les fonctions

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right]$$

décroissent exponentiellement.

Nous allons clore ce chapitre en montrant que la solution au problème de la chaleur ci-dessus (si elle existe) est unique.

Proposition 1 Il existe au plus une solution au problème de la chaleur suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t)$$

$$\text{avec } u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell].$$

Preuve: Considérons premièrement le problème ci-dessus dans le cas particulier où $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$. Soit

$$J(t) = \frac{1}{2c^2} \int_0^{\ell} (u(x, t))^2 dx.$$

En dérivant par rapport à t , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{1}{2c^2} \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial t} (u^2) dx = \frac{1}{2c^2} \int_0^{\ell} 2u \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ &= \int_0^{\ell} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad \text{parce que } \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad \text{en intégrant par parties} \\ &= \left[u(\ell, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) - u(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right] - \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= - \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \leq 0 \quad \text{à cause des conditions à la frontière.} \end{aligned}$$

Ceci signifie que la fonction $J(t)$ est une fonction décroissante. Nous pouvons aussi calculer

$$J(0) = \frac{1}{2c^2} \int_0^{\ell} (u(x, 0))^2 dx = \frac{1}{2c^2} \int_0^{\ell} (f(x))^2 dx = 0$$

parce que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$ dans ce premier cas. Donc $J(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Mais il est aussi vrai que $J(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, étant donné que $J(t)$ est l'intégrale d'une fonction positive. En

combinant tout ceci, nous obtenons que $J(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et $u(x, t) = 0$ pour tout $x \in [0, \ell]$ et $t \geq 0$. Nous obtenons que $u(x, t) = 0$, car sinon nous aurions que $J(t) \neq 0$ pour un t .

Si nous considérons maintenant deux solutions u_1 et u_2 du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t)$$

$$\text{avec } u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell],$$

alors il est facile de vérifier que $(u_1 - u_2)$ est une solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t)$$

$$\text{avec } u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell].$$

Comme nous l'avons montré au début de cette preuve, nous obtenons ainsi que $u_1 - u_2 = 0$ et $u_1 = u_2$. $\square$

Considérons pour terminer la solution du problème suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t), \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0$$

$$\text{avec } u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0) = x(\pi - x) \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi].$$

Parce que précède, la solution sera

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \exp(-n^2 t)$$

avec

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx = 4 \frac{((-1)^{n+1} + 1)}{\pi n^3} \quad \text{en intégrant par parties.}$$

Donc la solution est

$$u(x, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^{n+1} + 1)}{\pi n^3} \sin(nx) \exp(-n^2 t).$$

Nous avons tracé le graphe de $u(x, t)$ pour $x \in [0, \pi]$ et $t \in [0, 1]$ à la figure 1

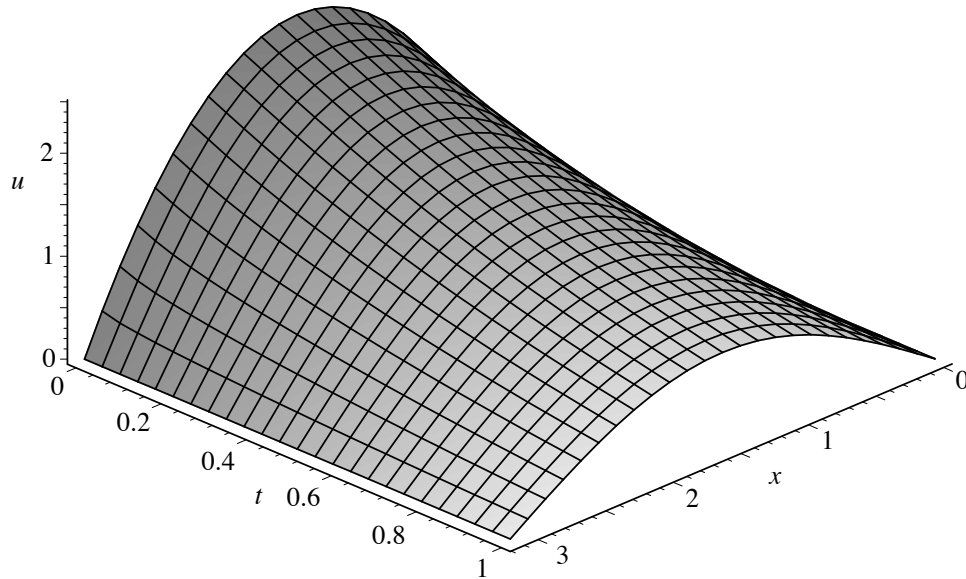


Figure [1]

* * *

Exercice 7.1

Déterminer dans chacun des cas suivants la température $u(x, t)$ dans une barre d'argent de 10 cm de longueur, de section transversale constante d'aire 1cm^2 , de densité $\rho = 10.6\text{g/cm}^3$, de conductivité thermique $K = 1.04\text{ cal/cm deg sec}$ et de chaleur spécifique $\sigma = 0.056\text{ cal/g deg}$. La barre est parfaitement isolée latéralement, les extrémités de la barre sont maintenues à température constante 0°C et la température initiale (en $^\circ\text{C}$) est $f(x)$. (Rappelons que la constante c apparaissant dans l'équation de la chaleur est $c^2 = K\sigma/\rho$.)

a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 5; \\ 10 - x, & \text{si } 5 \leq x \leq 10; \end{cases}$ b) $f(x) = x(100 - x^2);$ c) $f(x) = x(10 - x).$

Exercice 7.2

Soit la température $u(x, t)$ dans une tige de longueur ℓ qui est parfaitement isolée thermiquement incluant les extrémités à $x = 0$ et $x = \ell$. Aucune chaleur ne s'échappe des extrémités de la tige. Mathématiquement cette condition signifie que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Supposons que la température initiale est $u(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in [0, \ell]$. En d'autres mots, la température $u(x, t)$ est une solution du problème suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec les conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{et} \quad u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, \ell].$$

a) En utilisant la méthode de séparation de variables, montrer que la solution formelle du problème sera

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t\right] \quad \text{où}$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

b) Déterminer la température $u(x, t)$ dans la tige si $\ell = \pi$, $c = 1$ et $f(x) = (3\pi x^2 - 2x^3)$.

Exercice 7.3

Déterminer la température $u_I(x)$ après un très long intervalle de temps ($t \rightarrow \infty$) dans une tige de longueur ℓ suffisamment mince pour que la chaleur soit distribuée également pour toute section transversale, orienté selon l'axe des x avec des extrémités à $x = 0$ et $x = \ell$, d'un matériel homogène parfaitement isolé latéralement et dont les températures aux extrémités sont des températures constantes différentes: $u(0, t) = U_1$ et $u(\ell, t) = U_2$ pour tout $t \geq 0$.

Exercice 7.4 (†)

a) Montrer que l'équation de la chaleur (en trois dimensions)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

est égale en coordonnées sphériques: $x = r \sin(\phi) \cos(\theta)$, $y = r \sin(\phi) \sin(\theta)$, $z = r \cos(\phi)$ à

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right). \quad (\text{éq. [2]})$$

b) Si la surface d'une sphère solide homogène de rayon R est gardée à température constante 0°C , si la température initiale dans la sphère est indépendante de θ et de ϕ et est donnée par $u(r, 0) = f(r)$, alors montrer que les solutions $u(r, t)$ de l'équation [2] indépendantes de θ et de ϕ sont des solutions du problème:

$$(*) \quad \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right. \quad \text{avec } u(R, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \text{ et } u(r, 0) = f(r), \quad \forall r \in [0, R].$$

c) En supposant que $u(r, t)$ est une fonction bornée et en posant $v(r, t) = r u(r, t)$ dans le problème (*), montrer que nous obtenons le nouveau problème

$$(**) \quad \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right. \quad \text{avec } v(R, t) = v(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \text{ et } v(r, 0) = r f(r), \quad \forall r \in [0, R].$$

Déterminer la solution formelle $u(r, t)$ du problème (*) en obtenant premièrement la solution formelle $v(r, t)$ de (**) au moyen de la méthode de séparation de variables.

CHAPITRE 8

L'équation de Laplace sur un rectangle.

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré une EDP hyperbolique (l'équation d'onde) au chapitre 6, une EDP parabolique (l'équation de la chaleur) au chapitre 7. Nous allons maintenant considérer une EDP elliptique. Ainsi nous aurons étudié un exemple pour chacun des types d'EDP linéaires ayant deux variables indépendantes.

Le problème considéré est le suivant. Nous voulons déterminer les fonctions $u(x, y)$ avec $0 \leq x \leq M$ et $0 \leq y \leq N$ tel que l'EDP (l'équation de Laplace ou aussi l'équation du potentiel)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et les conditions à la frontière

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, N) = f_2(x), \quad u(0, y) = g_1(y), \quad \text{et} \quad u(M, y) = g_2(y) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq M, \quad 0 \leq y \leq N$$

soient satisfaites. La fonction $u = u(x, y)$ est définie sur le rectangle constitué des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $0 \leq x \leq M$ et $0 \leq y \leq N$. Ce problème est différent des précédents. Les deux variables appartiennent à des intervalles bornés, alors que la variable t n'est pas bornée pour les équations d'onde et de la chaleur. Il n'y a pas de conditions initiales. Aussi les conditions à la frontière ne sont pas homogènes. Cette dernière différence présente une difficulté qu'il nous faudra contourner.

Il est possible de donner un sens physique à une solution $u(x, y)$ du problème précédent. Nous pouvons considérer $u(x, y)$ comme la température à l'équilibre (i.e. lorsque $t \rightarrow \infty$) pour le problème de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{où} \quad u = u(x, y, t)$$

pour lequel les conditions à la frontière sont

$$u(x, 0, t) = f_1(x), \quad u(x, N, t) = f_2(x), \quad u(0, y, t) = g_1(y), \quad u(M, y, t) = g_2(y)$$

pour $0 \leq x \leq M$, $0 \leq y \leq N$ et $t \geq 0$. Il y a aussi des conditions initiales $t = 0$, mais nous ne les précisons pas. À l'équilibre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

et nous obtenons l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec les conditions à la frontière précédentes.

Le problème de départ de résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f_1(x) & \quad \text{et} \quad u(x, N) = f_2(x) & \quad \text{pour} \quad x \in [0, M], \\ u(0, y) = g_1(y) & \quad \text{et} \quad u(M, y) = g_2(y) & \quad \text{pour} \quad y \in [0, N] \end{aligned}$$

peut être décomposé en quatre problèmes ayant chacun une seule condition non-homogène plutôt que quatre.

Problème [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{avec} \\ u_1(x, 0) &= f_1(x) \quad \text{et} \quad u_1(x, N) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, M], \\ u_1(0, y) &= 0 \quad \text{et} \quad u_1(M, y) = 0 \quad \text{pour } y \in [0, N]. \end{aligned}$$

Problème [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{avec} \\ u_2(x, 0) &= 0 \quad \text{et} \quad u_2(x, N) = f_2(x) \quad \text{pour } x \in [0, M], \\ u_2(0, y) &= 0 \quad \text{et} \quad u_2(M, y) = 0 \quad \text{pour } y \in [0, N]. \end{aligned}$$

Problème [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{avec} \\ u_3(x, 0) &= 0 \quad \text{et} \quad u_3(x, N) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, M], \\ u_3(0, y) &= g_1(y) \quad \text{et} \quad u_3(M, y) = 0 \quad \text{pour } y \in [0, N]. \end{aligned}$$

Problème [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{avec} \\ u_4(x, 0) &= 0 \quad \text{et} \quad u_4(x, N) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, M], \\ u_4(0, y) &= 0 \quad \text{et} \quad u_4(M, y) = g_2(y) \quad \text{pour } y \in [0, N]. \end{aligned}$$

Si u_i est une solution du problème $[i]$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, alors il est facile de montrer que $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ est une solution du problème de départ.

Nous pouvons ainsi chercher à résoudre les problèmes [1] à [4]. Nous allons maintenant illustrer la méthode de séparation de variables pour résoudre le problème [1]. Le même type d'analyse peut être fait pour les trois autres problèmes. Nous laisserons au lecteur le soin de faire ces calculs.

Si nous utilisons la méthode de séparation de variables pour déterminer la solution $u_1(x, y)$ du problème [1], alors la première étape est de considérer le problème intermédiaire:

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{avec} \quad u_1(x, N) = 0, \quad u_1(0, y) = 0, \quad u_1(M, y) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, M] \text{ et } y \in [0, N]. \end{aligned} \right.$$

Nous avons laissé tomber la condition non-homogène $u_1(x, 0) = f_1(x)$ pour l'instant. Il nous faut donc déterminer des solutions non triviales $u_1(x, y)$ de ce problème (*) qui sont de la forme $u_1(x, y) = X(x)Y(y)$. En substituant cette solution dans l'EDP et en séparant les variables, nous obtenons

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

où X'' est la dérivée seconde de X par rapport à x et Y'' est la dérivée seconde de Y par rapport à y . Dans la dernière équation, le terme de gauche est une fonction de x seulement, alors que le terme de droite est une fonction de y seulement. Conséquemment ces deux expressions doivent être constantes et nous pouvons écrire

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda.$$

Nous avons ainsi le système de deux équations différentielles ordinaires:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \text{et} \quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

Si nous considérons maintenant les conditions à la frontière du problème (*) et parce que nous cherchons à déterminer des solutions non triviales, i.e. que les fonctions X et Y ne sont pas toujours nulles, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} u_1(x, N) = X(x)Y(N) = 0, \quad \forall x \in [0, M] &\Rightarrow Y(N) = 0; \\ u_1(0, y) = X(0)Y(y) = 0, \quad \forall y \in [0, N] &\Rightarrow X(0) = 0; \\ u_1(M, y) = X(M)Y(y) = 0, \quad \forall y \in [0, N] &\Rightarrow X(M) = 0. \end{aligned}$$

En résumé, il nous faut étudier le problème suivant:

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X = 0 \quad \text{avec } X(0) = 0, X(M) = 0 \text{ et} \\ Y'' + \lambda Y = 0 \quad \text{avec } Y(N) = 0. \end{aligned}$$

La première équation $X'' - \lambda X = 0$ avec $X(0) = 0$ et $X(M) = 0$ est déjà apparue pour les équations d'onde et de la chaleur. Si $\lambda \geq 0$, nous obtenons que $X \equiv 0$ et nous pouvons exclure ces valeurs pour λ parce que nous voulons des solutions non triviales. Si $\lambda = -\nu^2 < 0$, alors la solution générale de $X'' - \lambda X = 0$ est $X(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)$. Comme $X(0) = A = 0$ et $X(M) = A \cos(\nu M) + B \sin(\nu M) = 0$, il faut alors que $B \sin(\nu M) = 0$. Comme nous cherchons à déterminer des solutions non triviales et que $A = 0$, nous pouvons supposer que $B \neq 0$. De ceci, nous pouvons en déduire que

$$\sin(\nu M) = 0 \Rightarrow \nu = \frac{n\pi}{M}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2 \quad \text{et} \quad X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \quad \text{où } n \in \mathbf{Z}, n \neq 0.$$

Comme $\sin(-x) = -\sin(x)$ et que $\lambda_{-n} = \lambda_n$, nous pouvons nous restreindre au cas où $n \in \mathbf{N}, n \neq 0$ dans ce qui précède. Pour chaque entier $n \geq 1$, nous avons une solution $X_n = B_n \sin(n\pi x/M)$ de l'équation $X'' - \lambda X = 0$ avec $X(0) = 0, X(M) = 0$ pour la valeur $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/M)^2$.

Si nous considérons maintenant la seconde équation $Y'' + \lambda Y = 0$ avec $Y(N) = 0$ dans le cas où $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/M)^2$ où $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$, alors la solution générale est de la forme

$$Y_n(y) = C \exp\left(\frac{n\pi y}{M}\right) + D \exp\left(-\frac{n\pi y}{M}\right).$$

Mais nous avons aussi

$$Y_n(N) = 0 \Rightarrow C \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right) + D \exp\left(-\frac{n\pi N}{M}\right) = 0 \Rightarrow D = -C \exp\left(\frac{2n\pi N}{M}\right).$$

En substituant ceci dans la solution Y_n , nous obtenons

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= C \exp\left(\frac{n\pi y}{M}\right) - C \exp\left(\frac{2n\pi N}{M}\right) \exp\left(-\frac{n\pi y}{M}\right) \\ &= C \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right) \left[\exp\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) \right] \\ &= 2C \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) \end{aligned}$$

Rappelons que la fonction $\sinh(\theta)$ désigne le sinus hyperbolique, i.e.

$$\sinh(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbf{R}.$$

De ce qui précède, nous avons que

$$a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)$$

est une solution du problème (*). Noter que nous avons remplacé

$$B_n 2C \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right)$$

par a_n . En utilisant le principe de superposition, nous obtenons que

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)$$

est aussi une solution du problème (*).

Si nous revenons au problème [1], alors

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)$$

en est une solution si et seulement si

$$u_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(-\frac{n\pi N}{M}\right) = f_1(x) \quad \forall x \in [0, M];$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(-\frac{n\pi N}{M}\right)$$

est la série de Fourier impaire de $f_1(x)$ et conséquemment que

$$a_n = \left(\frac{2}{M \sinh(-n\pi N/M)}\right) \int_0^M f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$$

Nous avons ainsi obtenu une solution formelle du problème [1]. En procédant de façon similaire, nous obtenons des solutions formelles aux problèmes [2], [3] et [4]. Ces solutions sont

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{M}\right) \quad \text{avec} \quad b_n = \left(\frac{2}{M \sinh(n\pi N/M)}\right) \int_0^M f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx$$

pour le problème [2],

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(x-M)}{N}\right) \quad \text{avec} \quad c_n = \left(\frac{2}{N \sinh(-n\pi M/N)}\right) \int_0^N g_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy$$

pour le problème [3] et

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right) \quad \text{avec} \quad d_n = \left(\frac{2}{N \sinh(n\pi M/N)}\right) \int_0^N g_2(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy$$

pour le problème [4].

Ainsi la solution formelle du problème de départ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f_1(x) & \quad \text{et} \quad u(x, N) = f_2(x) & \text{pour } x \in [0, M]; \\ u(0, y) = g_1(y) & \quad \text{et} \quad u(M, y) = g_2(y) & \text{pour } y \in [0, N] \end{aligned}$$

est

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \left[a_n \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{M}\right) \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \left[c_n \sinh\left(\frac{n\pi(x-M)}{N}\right) + d_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right) \right] \end{aligned}$$

avec a_n , b_n , c_n et d_n comme précédemment.

Théorème 1 Si les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont continues et lisses par morceaux sur l'intervalle $[0, M]$, les fonctions $g_1(y)$ et $g_2(y)$ sont continues et lisses par morceaux sur l'intervalle $[0, N]$, $f_1(0) = f_2(0) = f_1(M) = f_2(M) = 0$, $g_1(0) = g_2(0) = g_1(N) = g_2(N) = 0$, alors la solution formelle ci-dessus est une vraie solution du problème de départ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f_1(x) & \quad \text{et} \quad u(x, N) = f_2(x) & \text{pour } x \in [0, M], \\ u(0, y) = g_1(y) & \quad \text{et} \quad u(M, y) = g_2(y) & \text{pour } y \in [0, N]. \end{aligned}$$

Nous ne démontrerons pas ce théorème. Nous allons seulement déterminer la solution $u(x, y)$ pour le problème suivant.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{où } u = u(x, y), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \pi \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) = x(\pi - x) & \quad \text{et} \quad u(x, \pi) = 0 & \text{pour } x \in [0, \pi], \\ u(0, y) = y(\pi - y) & \quad \text{et} \quad u(\pi, y) = 0 & \text{pour } y \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Dans ce cas, il est facile d'évaluer en intégrant par parties les coefficients a_n , b_n , c_n et d_n . Nous obtenons que

$$a_n = c_n = \frac{4(1 + (-1)^{n+1})}{\pi n^3 \sinh(-n\pi)} \quad \text{et} \quad b_n = d_n = 0 \quad \text{si } n \geq 1.$$

Donc la solution du problème est

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(1 + (-1)^{n+1})}{\pi n^3 \sinh(-n\pi)} \right) [\sin(nx) \sinh(n(y - \pi)) + \sin(ny) \sinh(n(x - \pi))].$$

Nous avons tracé le graphe de $u(x, y)$ pour $x \in [0, \pi]$ et $y \in [0, \pi]$ à la figure 1

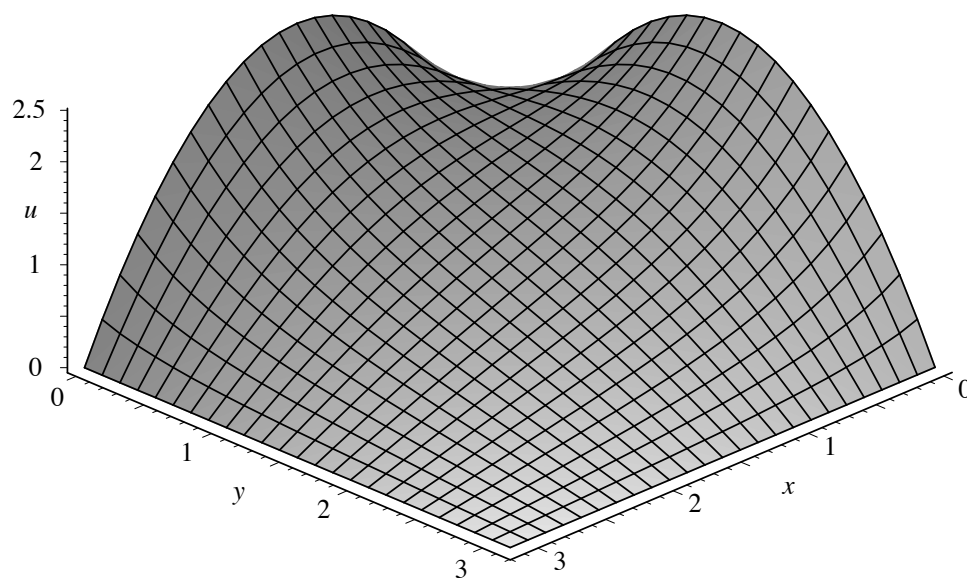


Figure [1]

* * *

Exercice 8.1

Déterminer la solution formelle de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{où} \quad u = u(x, y), \quad 0 \leq x \leq M, \quad 0 \leq y \leq N$$

lorsque les conditions initiales pour $0 \leq x \leq M$ et $0 \leq y \leq N$ sont

- a) $u(x, 0) = 0, \quad u(x, N) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M, y) = f(y);$
- b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, N) = 0, \quad u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(0, y), \quad u(M, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(M, y);$
- c) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, N) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(M, y) = h(y).$

CHAPITRE 9

L'équation d'onde pour une membrane circulaire.

Dans tous les problèmes considérés jusqu'à présent, nous avons obtenu après avoir séparé les variables l'équation différentielle ordinaire suivante: $X'' + \lambda X = 0$ avec les conditions $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$. Dans les étapes subséquentes de la méthode de séparation de variables, nous avons ensuite déterminé les constantes λ qui font en sorte que les solutions X ne soient pas triviales (ce sont les valeurs propres) et les solutions X_λ pour chacune de ces valeurs propres λ . Dans la dernière étape, nous terminons en utilisant l'orthogonalité de ces fonctions caractéristiques pour exprimer certaines fonctions comme des séries de Fourier. Cette situation est plus générale que ce que nous avons vu jusqu'à maintenant. C'est ce qui est convenu d'appeler les problèmes (des valeurs propres) de Sturm-Liouville. Sturm (mathématicien français d'origine suisse, Genève, 1803 - Paris, 1855) a entre autres mesuré la vitesse du son dans l'eau et a énoncé un théorème précisant le nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients réels dans un intervalle quelconque. Liouville (mathématicien français, Saint-Omer, 1809 - Paris, 1882) a été l'un des principaux analystes de son temps.

Nous allons maintenant considérer un problème d'EDP, l'équation d'onde pour une membrane circulaire, pour lequel ce ne sont plus des fonctions trigonométriques qui apparaissent comme fonction caractéristique, mais plutôt des fonctions de Bessel (astronome allemand, Minden, 1784 - Königsberg, 1846). Nous rappellerons ce que sont ces fonctions plus tard. Un point important est que ces fonctions satisfont aussi des relations d'orthogonalité. La preuve de ceci sera faite au prochain chapitre lorsque nous discuterons justement des problèmes de Sturm-Liouville.

Soient un nombre R réel positif > 0 , le disque $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ centré à l'origine de rayon R et le bord $\partial D = \{(x, y) \in D \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ du disque. Considérons le problème d'EDP suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{où } u = u(x, y, t) \quad \text{avec } (x, y) \in D, \quad t \geq 0,$$

pour lequel la condition à la frontière est $u(x, y, t) = 0$ pour tout $(x, y) \in \partial D$ et $t \geq 0$ et les conditions initiales sont $u(x, y, 0) = f(x, y)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$. $f(x, y)$ est le déplacement initial et $g(x, y)$ est la vitesse initiale de la membrane circulaire.

Il est préférable d'écrire le problème en coordonnées polaires plutôt qu'en coordonnées cartésiennes, notamment parce que la condition à la frontière s'écrit simplement dans ces coordonnées. Rappelons ce que sont les coordonnées polaires. À un point P du plan, nous pouvons associer deux nombres réels (r, θ) , $r \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$, où r est la distance entre le point P et l'origine $O = (0, 0)$ et θ est la mesure (en radians) de l'angle fait par la demi-droite des x positifs et la demi-droite passant par P issue de l'origine O . Si (x, y) (respectivement (r, θ)) sont les coordonnées cartésiennes (respectivement polaires) de P , alors

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta); \\ y = r \sin(\theta); \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \theta = \arctan(y/x). \end{cases}$$

L'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

devient l'EDP suivante en coordonnées polaires:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

En effet, par la règle de chaînes, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{y}{(x^2 + y^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \cos(\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\sin(\theta)}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{x}{(x^2 + y^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \sin(\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\cos(\theta)}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

En substituant dans l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

La condition à la frontière $u(x, y, t) = 0$ pour tout $(x, y) \in \partial D$ et $t \geq 0$ devient $u(R, \theta, t) = 0$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $t \geq 0$.

Dans ce qui suivra, nous avons noté le déplacement vertical initial et la vitesse initiale en fonction des coordonnées polaires respectivement par $\tilde{f}(r, \theta)$ et $\tilde{g}(r, \theta)$, i.e.

$$\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(r, \theta) = g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Nous avons ainsi le problème d'EDP suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{où } u = u(r, \theta, t), \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad t \geq 0,$$

avec la condition à la frontière

$$u(R, \theta, t) = 0 \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad t \geq 0$$

et les conditions initiales

$$u(r, \theta, 0) = \tilde{f}(r, \theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \tilde{g}(r, \theta) \quad \text{pour } 0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Nous allons étudier dans ce chapitre une situation plus restreinte que celle ci-dessus. Nous supposons que le déplacement initial et la vitesse initiale sont indépendantes de θ . En d'autres mots, le déplacement

initial et la vitesse initiale sont circulairement symétriques. Nous allons chercher à déterminer dans cette situation les solutions $u = u(r, \theta, t)$ qui sont indépendantes de θ . Si la solution u est indépendante de θ , alors

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

En substituant ceci dans l'EDP, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Si nous résumons, nous allons étudier le problème (plus restreint) suivant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{où } u = u(r, t)$$

avec la condition à la frontière

$$u(R, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et les conditions initiales

$$u(r, 0) = \tilde{f}(r) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \tilde{g}(r) \quad \text{pour } 0 \leq r \leq R.$$

Nous supposons aussi que, pour tout $t = t_0$ fixé, la fonction $r \mapsto u(r, t_0)$ est bornée si $r \in [0, R]$. Cette condition correspond au fait qu'en tout temps le déplacement vertical de la membrane est borné.

Nous allons utiliser la méthode de séparation de variables. Dans cette méthode, il nous faut dans un premier temps étudier un problème intermédiaire. Dans le cas présent, ce problème est

$$(*) \quad \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right. \quad \text{avec la condition } u(R, t) = 0, \text{ où } u = u(r, t), \quad 0 \leq r \leq R, \quad t \geq 0.$$

Nous cherchons ensuite à déterminer des solutions non triviales u de la forme spéciale $u(r, t) = F(r)G(t)$. En substituant cette solution dans l'EDP et en séparant les variables, nous obtenons

$$FG'' = c^2(F''G + r^{-1}F'G) \quad \Rightarrow \quad \frac{G''}{c^2G} = \frac{F''}{F} + \frac{F'}{rF}.$$

Cette dernière équation est obtenue en divisant les deux côtés de la première équation par c^2FG . Ici F' et F'' désignent les dérivées première et seconde de F par rapport à r , alors que G'' désigne la dérivée seconde de G par rapport à t . Parce que le terme de gauche de la dernière équation est une fonction de t seulement et celui de droite, une fonction de r seulement, alors ces deux termes doivent être égaux à une constante λ . Nous avons donc

$$\frac{G''}{c^2G} = \frac{F''}{F} + \frac{F'}{rF} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} rF'' + F' - \lambda rF = 0; \\ G'' - \lambda c^2G = 0. \end{cases}$$

La condition à la frontière $u(R, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ a conséquence que $u(R, t) = F(R)G(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Comme nous cherchons des solutions non triviales, alors il existe une valeur de $t = t_0$ telle que $G(t_0) \neq 0$ et conséquemment $F(R) = 0$ en considérant $u(R, t_0) = F(R)G(t_0) = 0$. De plus, comme nous supposons aussi que la fonction $r \mapsto u(r, t_0)$ est bornée si $r \in [0, R]$ pour tout $t = t_0$ fixé, alors $F(r)$ est une fonction bornée sur l'intervalle $[0, R]$.

Ainsi nous avons le système suivant:

$$\begin{cases} r^2F'' + rF' - \lambda r^2F = 0 & \text{avec } F(R) = 0 \text{ et } F(r) \text{ bornée sur } [0, R]; \\ G'' - \lambda c^2G = 0. \end{cases}$$

Parce que $F(R) = 0$ et que $F(r)$ soit une fonction bornée sur l'intervalle $[0, R]$, alors il est possible de montrer que la constante $\lambda < 0$. Nous verrons cette preuve plus tard dans le chapitre. Nous allons pour l'instant admettre ceci et poursuivre notre exposition de la méthode de séparation de variables.

Notons $\lambda = -p^2$ où $p > 0$ et considérons aussi la nouvelle variable $s = pr$. Nous allons récrire l'équation $r^2 F'' + rF' - \lambda r^2 F = 0$ en terme de cette nouvelle variable s . Nous obtenons de la règle de chaînes que

$$\frac{dF}{dr} = \frac{dF}{ds} \frac{ds}{dr} = p \frac{dF}{ds}, \quad \frac{d^2 F}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(p \frac{dF}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(p \frac{dF}{ds} \right) \frac{ds}{dr} = p^2 \frac{d^2 F}{ds^2}.$$

En substituant dans l'équation différentielle $r^2 F'' + rF' + (pr)^2 F = 0$, nous obtenons

$$\left(\frac{s}{p} \right)^2 p^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + \left(\frac{s}{p} \right) p \frac{dF}{ds} + s^2 F = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + s \frac{dF}{ds} + s^2 F = 0.$$

Ceci est l'équation de Bessel de paramètre $\nu = 0$. (On dit aussi d'ordre $\nu = 0$.)

Nous allons maintenant rappeler ce qu'est l'équation de Bessel et ce que sont les fonctions de Bessel. L'équation de Bessel de paramètre (ou ordre) ν est

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - \nu^2) f = 0. \quad (\text{éq. [1]})$$

Nous pouvons supposer que $\nu \geq 0$. C'est une équation linéaire homogène d'ordre 2. Conséquemment pour décrire toutes les solutions de l'équation [1], il nous faut déterminer deux solutions f_1 et f_2 linéairement indépendantes et toutes les solutions seront alors des combinaisons linéaires $Af_1 + Bf_2$.

Si $\mu \in \mathbf{R}$, nous noterons par $J_\mu(z)$, la série suivante

$$J_\mu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(\mu + m + 1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m} \quad \text{où} \quad \Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx$$

est la fonction gamma.

Lemme 1 a) La série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(\mu + m + 1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}$$

converge pour tout $z \in \mathbf{R}$.

b) Si $\mu \geq 0$, alors $J_\mu(z)$ est définie pour tout $z \geq 0$.

c) Si $\mu \in \mathbf{Z}$, $\mu = -n < 0$ avec $n \in \mathbf{N}$, alors $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ et $J_{-n}(z)$ est définie pour tout $z \geq 0$.

d) Si $\mu < 0$ et $\mu \notin \mathbf{Z}$, alors $J_\mu(z)$ est définie pour tout $z > 0$ et

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} J_\mu(z) = \begin{cases} \infty, & \text{si } \Gamma(\mu + 1) > 0; \\ -\infty, & \text{si } \Gamma(\mu + 1) < 0. \end{cases}$$

Preuve. a) Remplaçons $(z/2)^2$ par w et considérons la série (en w) ainsi obtenue

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(\mu + m + 1)} \right) w^m.$$

Le rayon de convergence ρ de cette dernière série est

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{((-1)^m / (m!) \Gamma(\mu + m + 1))}{((-1)^{m+1} / (m+1)! \Gamma(\mu + m + 2))} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{(m+1)! \Gamma(\mu + m + 2)}{m! \Gamma(\mu + m + 1)} \right| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} | (m+1) (\mu + m + 1) | = \infty, \end{aligned}$$

à cause de l'équation fonctionnelle $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$. De ceci, nous obtenons que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(\mu + m + 1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}$$

converge pour tout $z \in \mathbf{R}$.

b) Si $\mu \geq 0$, alors

$$\left(\frac{z}{2} \right)^{\mu} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(\mu + m + 1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}$$

sont définies pour tout $z \geq 0$. Donc $J_{\mu}(z)$ est bien définie pour tout $z \geq 0$.

c) Si $\mu = -n < 0$ avec $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-n + m + 1)} = 0 \quad \text{si } m = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

parce que $\Gamma(k) = \pm\infty$ si $k \in \mathbf{Z}$ et $k \leq 0$. Conséquemment

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(-n + m + 1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m} = \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(-n + m + 1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m} \\ &= \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)! \Gamma(m+1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2(m+n)} = (-1)^n \left(\frac{z}{2} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+n+1) m!} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m} \\ &= (-1)^n J_n(z) \end{aligned}$$

parce que $\Gamma(k+1) = k!$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. À cause de b), nous avons que $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$ est définie pour tout $z \geq 0$.

d) Si $\mu < 0$ et $\mu \in \mathbf{Z}$, alors

$$\left(\frac{z}{2} \right)^{\mu} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(\mu + m + 1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}$$

sont définies pour tout $z > 0$. Lorsque $z \rightarrow 0$, alors la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!) \Gamma(\mu + m + 1)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}$$

approche $1/\Gamma(\mu+1)$ et comme μ n'est pas un entier cette dernière valeur est bornée. Mais la fonction

$$\left(\frac{z}{2} \right)^{\mu}$$

diverge vers ∞ si $z \rightarrow 0^+$ parce que μ est strictement négatif. Ceci complète la preuve de d). $\square$

La fonction $J_{\mu}(z)$ est la **fonction de Bessel du premier type de paramètre (ou encore d'ordre μ)**. Nous avons tracé à la figure [1] le graphe des fonctions $J_{1/2}(z)$ et $J_{3/2}(z)$ pour $z \in [0, 10]$ et à la figure [2] le graphe des fonctions $J_{-1/2}(z)$ et $J_{-3/2}(z)$ pour $z \in [0, 10]$.

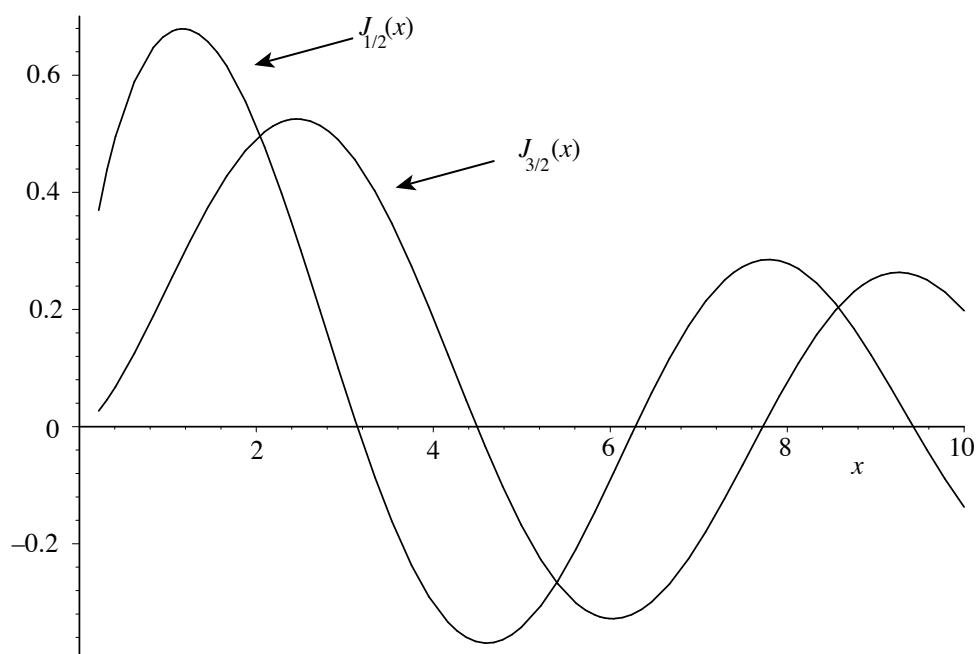


Figure [1]

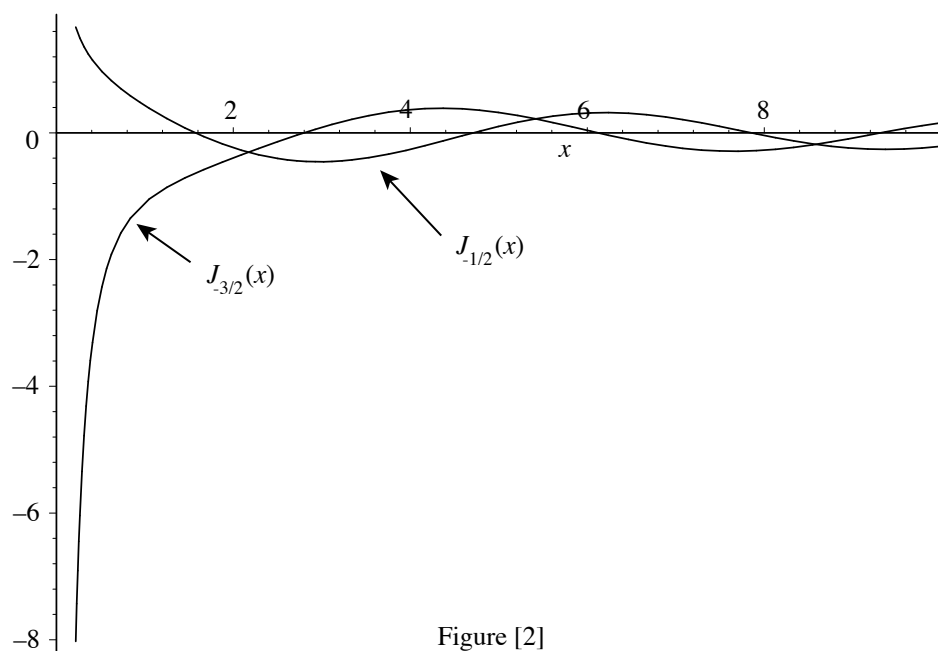


Figure [2]

Théorème 1 Si $\nu \notin \mathbf{Z}$, alors la solution générale de l'équation de Bessel (équ. [1]) est de la forme $AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z)$, où $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont les fonctions de Bessel du premier type de paramètre ν et $-\nu$ respectivement et A, B sont des nombres réels quelconques.

Preuve. Il suffit de vérifier que les deux fonctions $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont des solutions de l'équation [1] et qu'en plus elles sont linéairement indépendantes.

Nous avons que $z^2 J''_{\pm\nu}(z) + z J'_{\pm\nu}(z) - (\pm\nu)^2 J_{\pm\nu}(z)$ est égale à

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m \pm \nu)(2m \pm \nu - 1)}{m! \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m \pm \nu}} z^{2m \pm \nu} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m + \pm\nu)}{m! \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m \pm \nu}} z^{2m \pm \nu} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\pm\nu)^2}{m! \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m \pm \nu}} z^{2m \pm \nu}.$$

Ainsi nous obtenons en regroupant les termes que $z^2 J''_{\pm\nu}(z) + z J'_{\pm\nu}(z) - (\pm\nu)^2 J_{\pm\nu}(z)$ est égal à

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m [(2m \pm \nu)(2m \pm \nu - 1) + (2m \pm \nu) - (\pm\nu)^2]}{m! \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m \pm \nu}} z^{2m \pm \nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 4m (m \pm \nu)}{m! \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m \pm \nu}} z^{2m \pm \nu} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 4m (m \pm \nu)}{m! \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m \pm \nu}} z^{2m \pm \nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 4(m+1) (m \pm \nu + 1)}{(m+1)! \Gamma(\pm\nu + m + 2) 2^{2(m+1) \pm \nu}} z^{2m \pm \nu + 2} \\ &= (-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m \pm \nu}} z^{2m \pm \nu + 2} = (-1) z^2 J_{\pm\nu}(z). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que $z^2 J''_{\pm\nu}(z) + z J'_{\pm\nu}(z) + (z^2 - (\pm\nu)^2) J_{\pm\nu}(z) = 0$. Ainsi $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont des solutions de l'équation de Bessel d'ordre ν .

Pour montrer que les fonctions $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont linéairement indépendantes, une façon est de calculer leur wronskien

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z) \\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix}$$

et montrer que cette fonction n'est pas nulle. Nous ne ferons pas ce calcul dans ces notes, mais il est possible de montrer que

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \frac{-2 \sin(\nu\pi)}{\pi z}.$$

Parce que $\nu \notin \mathbf{Z}$, alors $\sin(\nu\pi) \neq 0$ et le wronskien $W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z))$ est non nul. De ceci, nous pouvons conclure que $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel de paramètre ν et que la solution générale de cette équation est $AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z)$ (si $\nu \notin \mathbf{Z}$). $\square$

Nous n'avons pas expliqué comment ces fonctions ont été obtenues. Il faut utiliser la méthode de Frobenius, i.e. que nous supposons que la solution est de la forme $z^\mu \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ avec $a_0 \neq 0$, en dérivant terme-à-terme et en remplaçant dans l'équation de Bessel de paramètre ν , nous obtenons

$$a_0(\mu^2 - \nu^2) z^\mu + a_1(\mu^2 + 2\mu + 1 - \nu^2) z^{\mu+1} + \sum_{m=2}^{\infty} a_m[(m + \mu)^2 - \nu^2] + a_{m-2} z^{m+\mu} = 0.$$

Chacun des coefficients devant les $z^{m+\mu}$ doit être 0. Comme $a_0 \neq 0$ et que $a_0(\mu^2 - \nu^2) = 0$, nous pouvons conclure que $\mu = \nu$ ou $-\nu$. Si nous considérons maintenant $a_1(\mu^2 + 2\mu + 1 - \nu^2) = 0$ pour $\mu = \nu$ ou $-\nu$, nous obtenons $a_1 = 0$. Plus précisément si $\nu \neq -1/2$, nous obtenons que $a_1 = 0$. Si $\nu = -1/2$, nous pourrions avoir $a_1 \neq 0$, mais dans ce cas, la somme $z^{-1/2} \sum_m a_m z^m$, avec m impair dans la somme, sera un multiple de $J_{1/2}(z)$. Comme ses termes sont déjà pris en compte, nous pouvons aussi supposer dans ce cas de $\nu = -1/2$ que $a_1 = 0$. Finalement de $a_m[(m + \mu)^2 - \nu^2] + a_{m-2} = 0$, nous obtenons la relation de récurrence

$$a_m = \frac{-1}{(m \pm \nu)^2 - \nu^2} a_{m-2} \quad \text{si } m \geq 2.$$

De ceci et du fait que $a_1 = 0$, nous obtenons facilement que $a_m = 0$ si m est impaire. Nous obtenons $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ en prenant

$$a_0 = \frac{1}{2^{\pm\nu} \Gamma(\pm\nu + 1)}$$

dans la relation de récurrence et en calculant a_m pour tout entier m pair.

Le théorème 1 nous est que partiellement utile. En effet ce que nous avons à résoudre c'est plutôt l'équation de Bessel de paramètre $\nu = 0$. Si $\nu = n \in \mathbf{N}$, alors les fonctions $J_n(z)$ et $J_{-n}(z)$ sont bien des solutions de l'équation de Bessel de paramètre ν , mais ces deux fonctions sont linéairement dépendantes. En effet, comme nous l'avons noté dans la preuve du théorème 1, le wronskien dans ce cas est

$$W(J_n(z), J_{-n}(z)) = \frac{-2 \sin(n\pi)}{\pi z} = 0.$$

Nous avons vérifié au lemme 1 c) que $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$. Il nous faut donc déterminer une autre solution linéairement indépendante de $J_n(z)$ pour nous permettre d'écrire la solution générale de l'équation de Bessel de paramètre $\nu = n \in \mathbf{N}$.

Nous définissons la **fonction de Bessel du deuxième type de paramètre n** comme étant la limite

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \left(\frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \right).$$

Théorème 2 Si $\nu = n \in \mathbf{Z}$, alors la solution générale de l'équation de Bessel (eq. [1]) est de la forme $AJ_n(z) + BY_n(z)$, où $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ sont respectivement les fonctions de Bessel du premier et deuxième type de paramètre n .

Preuve. Il suffit de vérifier que les deux fonctions $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ sont des solutions de l'équation [1] et qu'en plus elles sont linéairement indépendantes. Nous savons déjà que $J_n(z)$ est une fonction. Pour ce qui est de $Y_n(z)$, nous avons que si $\nu \in \mathbf{R}$, alors

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

est aussi une solution de l'équation de Bessel de paramètre ν parce que cette équation est linéaire homogène et que $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont des solutions. Ainsi

$$z^2 Y_\nu''(z) + z Y_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2) Y_\nu(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\nu \rightarrow n} z^2 Y_\nu''(z) + z Y_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2) Y_\nu(z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z^2 Y_n''(z) + z Y_n'(z) + (z^2 - n^2) Y_n(z) = 0$$

Disons qu'ici nous trichons un peu. Parce que nous supposons que

$$\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu'(z) = \left(\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) \right)' = Y_n'(z) \quad \text{et} \quad \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu''(z) = \left(\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) \right)'' = Y_n''(z).$$

Mais il y a une autre façon de procéder. Il est possible de déterminer $Y_n(z)$. En effet,

$$\begin{aligned} Y_n(z) = & -\frac{(z/2)^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z^2}{4} \right)^m + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z}{2} \right) J_n(z) \\ & - \frac{(z/2)^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} [\psi(m+1) + \psi(n+m+1)] \frac{(-z^2/4)^m}{m!(n+m)!} \end{aligned}$$

où

$$\psi(1) = -\gamma \text{ (constante d'Euler) i.e } \gamma = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i} - \ln(i) \right) = 0.57721566490 \dots$$

$$\psi(k) = -\gamma + \sum_{m=1}^{k-1} \left(\frac{1}{m} \right) \quad \text{pour } k \geq 2.$$

De cette expression il est alors possible de vérifier que $Y_n(z)$ est bien une solution de l'équation de Bessel de paramètre n . Nous laisserons à l'étudiant le soin de faire cette vérification.

Pour montrer que les fonctions $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ sont linéairement indépendantes, une façon est de calculer leur wronskien

$$W(J_n(z), Y_n(z)) = \begin{vmatrix} J_n(z) & Y_n(z) \\ J'_n(z) & Y'_n(z) \end{vmatrix}$$

et montrer que cette fonction n'est pas nulle. Nous ne ferons pas ce calcul dans ces notes, mais il est possible de vérifier que

$$W(J_n(z), Y_n(z)) = \frac{2}{\pi z}.$$

Donc le wronskien $W(J_n(z), Y_n(z))$ est non nul. De ceci, nous pouvons conclure que $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel de paramètre n et que la solution générale de cette équation est $AJ_n(z) + BY_n(z)$ (si $\nu = n \in \mathbf{N}$). $\square$

Nous avons tracé à la figure [3] le graphe des fonctions $J_0(z)$, $J_1(z)$ et $J_2(z)$ pour $z \in [0, 10]$ et à la figure [4] le graphe des fonctions $Y_0(z)$ et $Y_1(z)$ pour $z \in [0, 10]$.

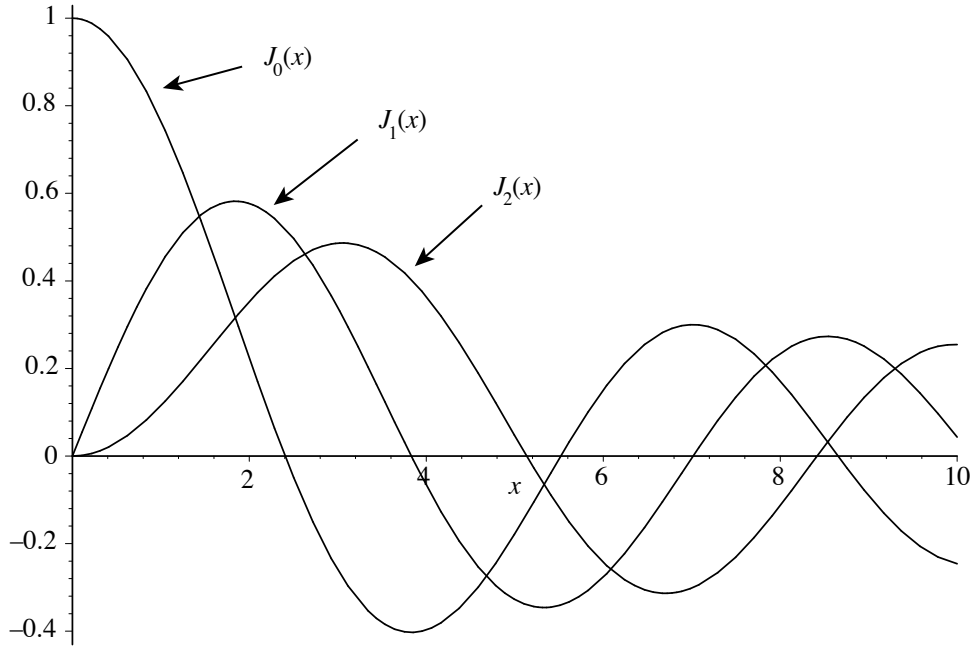


Figure [3]

Cette dernière figure illustre un point qui sera important pour nous, c'est que la limite de $Y_n(z)$ approche $-\infty$ si z approche 0^+ . En effet,

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} Y_n(z) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \lim_{\nu \rightarrow n} \left(\frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \right) = \lim_{\nu \rightarrow n} \lim_{z \rightarrow 0^+} \left(\frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \right) = -\infty$$

parce que $J_\nu(0) = 1$ si $\nu = 0$ et 0 si $\nu \neq 0$, alors que $\lim_{z \rightarrow 0^+} J_{-\nu}(z) = \infty$ si $\Gamma(-\nu + 1) > 0$ et $-\infty$ si $\Gamma(-\nu + 1) < 0$. Mais $\Gamma(-\nu + 1) > 0$ si et seulement si $\sin(\nu\pi) > 0$. Nous obtenons bien que $\lim_{z \rightarrow 0^+} Y_n(z) = -\infty$. Dans cet argument, nous trichons un peu parce qu'à un certain point nous intervertissons la limite lorsque z approche 0^+ et la limite lorsque ν approche n . Une autre façon de vérifier que $Y_n(z)$ approche $-\infty$ est de considérer l'expression donnée à la page 82 de $Y_n(z)$. Cette expression contient entre autres un terme de la forme $2 \ln(z/2) J_n(z) / \pi$ et ce dernier diverge vers $-\infty$ lorsque $z \rightarrow 0^+$.

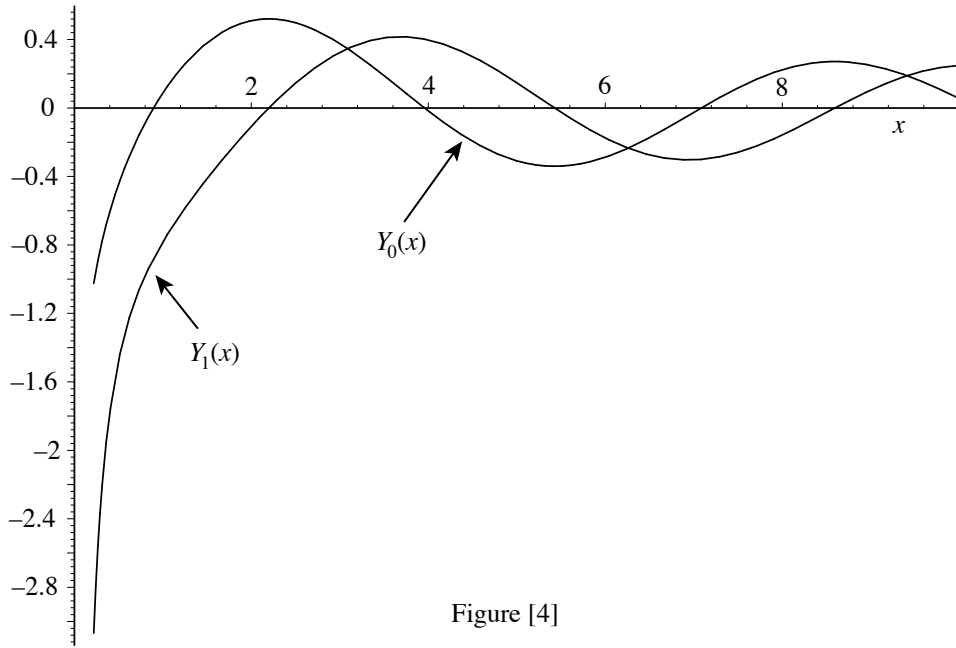


Figure [4]

Il est possible de montrer que si les valeurs de z sont près de 0, alors

$$J_0(z) \approx 1, \quad J_1(z) \approx z/2, \quad J_2(z) \approx z^2/8, \quad Y_0(z) \approx 2\ln(z)/\pi, \quad Y_1(z) \approx -2/(\pi z), \quad Y_2(z) \approx -4/(\pi z^2).$$

Pour des valeurs de z très grandes, ($z \rightarrow \infty$), alors

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Il y aurait encore beaucoup à écrire, mais nous allons maintenant fermer notre parenthèse sur l'équation de Bessel et les fonctions de Bessel.

Si nous revenons à l'équation d'onde pour une membrane circulaire, nous en étions à l'équation suivante:

$$s^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + s \frac{dF}{ds} + s^2 F = 0.$$

Donc F comme fonction de s sera de la forme $AJ_0(s) + BY_0(s)$ où A et B sont des nombres réels, parce que ceci est la solution générale de l'équation de Bessel de paramètre $\nu = 0$. Comme $s = pr$, alors F comme fonction de r est $F(r) = AJ_0(pr) + BY_0(pr)$. Rappelons que F doit être une fonction bornée pour $r \in [0, R]$. Pour que ceci soit vérifié, il faut nécessairement que $B = 0$. Sinon comme la limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} Y_0(pr) = -\infty,$$

F n'est pas bornée. Conséquemment $F(r) = AJ_0(pr)$. Nous pouvons supposer que $A \neq 0$ de façon à ne pas avoir une solution triviale.

Si nous considérons maintenant la condition $F(R) = 0$, alors $J_0(pR) = 0$, i.e. pR est un zéro de J_0 . Rappelons qu'un nombre réel α est un zéro de J_0 si et seulement si $J_0(\alpha) = 0$. Il est possible de montrer que la fonction de Bessel J_0 a une infinité de zéros réels positifs: $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$. Il existe des

tables des valeurs de ces zéros. Ainsi $\alpha_1 = 2.4048\dots$, $\alpha_2 = 5.5201\dots$, $\alpha_3 = 8.6537\dots$, $\alpha_4 = 11.7915\dots$, $\alpha_5 = 14.9309\dots$ etc. Ces zéros sont disposés irrégulièrement. Donc $pR = \alpha_n$ pour un certain $n \geq 1$.

Conséquemment pour chaque valeur de $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, nous avons

$$p_n = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right), \quad \lambda_n = -p_n^2 = -\left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 \text{ et } F_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)$$

respectivement comme valeurs possibles de p , de λ et de F correspondant à cette valeur propre λ . Il nous reste à considérer l'équation différentielle

$$G'' - \lambda c^2 G = 0 \quad \Rightarrow \quad G'' + \left(\frac{c\alpha_n}{R}\right)^2 G = 0 \quad \text{pour } \lambda = \lambda_n.$$

La solution générale de cette équation est

$$G_n(t) = C \cos\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) + D \sin\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right).$$

De tout ce qui précède et en remplaçant AC et AD par a_n et b_n , nous obtenons que

$$J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) + b_n \sin\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) \right]$$

est une solution du problème intermédiaire

$$(*) \quad \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{avec la condition } u(R, t) = 0. \right.$$

Comme cette EDP est linéaire homogène et que la condition à la frontière est aussi homogène, nous pouvons alors utiliser le principe de superposition pour obtenir la solution formelle

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) + b_n \sin\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) \right]$$

du problème (*).

Si nous voulons en plus qu'une telle solution satisfasse aussi les conditions initiales, nous voulons donc que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) = \tilde{f}(r) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c\alpha_n}{R}\right) b_n J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) = \tilde{g}(r) \quad \text{pour tout } r \in [0, R].$$

En conclusion, si nous voulons complètement déterminer le déplacement vertical d'une membrane circulaire, il nous faut pouvoir exprimer les fonctions $\tilde{f}(r)$ et $\tilde{g}(r)$ comme des sommes de fonctions $J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)$. On dit que de telles sommes sont des séries de Fourier-Bessel.

Nous verrons plus tard que

$$a_n = \left(\frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)}\right) \int_0^R r \tilde{f}(r) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) dr \quad \text{et} \quad b_n = \left(\frac{2}{c\alpha_n R J_1^2(\alpha_n)}\right) \int_0^R r \tilde{g}(r) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) dr$$

pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

Nous obtenons facilement ce qui précède en utilisant les relations d'orthogonalité pour les fonctions de Bessel. Nous allons maintenant seulement énoncer ses relations. Leur preuve sera faite au prochain chapitre sur les problèmes de Sturm-Liouville.

Si $0 < \alpha_{1m} < \alpha_{2m} < \alpha_{3m} < \dots$ sont les zéros positifs (> 0) de la fonction de Bessel $J_m(z)$ de paramètre $m \in \mathbf{N}$ et $\lambda_{nm} = \alpha_{nm}/R$ pour $n = 1, 2, \dots$, alors les fonctions suivantes $J_m(\lambda_{1m}z)$, $J_m(\lambda_{2m}z)$, $J_m(\lambda_{3m}z), \dots$ forment un système orthogonal sur l'intervalle $[0, R]$ par rapport à la fonction de poids $p(z) = z$, i.e.

$$\int_0^R z J_m(\lambda_{nm}z) J_m(\lambda_{km}z) dz = 0 \quad \text{si } k \neq n.$$

Il faut aussi utiliser la norme de ces fonctions, i.e.

$$||J_m(\lambda_{nm}z)||^2 = \int_0^R z J_m^2(\lambda_{nm}z) dz = \frac{R^2}{2} J_{m+1}^2(\lambda_{nm}R).$$

Nous verrons aussi cette formule au prochain chapitre.

Pour clore ce chapitre, il nous faut encore montrer que la constante λ dans le problème

$$r^2 F'' + rF' - \lambda r^2 F = 0 \quad \text{avec } F(R) = 0 \text{ et } F \text{ bornée sur } [0, R]$$

ne peut être que strictement négative, i.e. $\lambda < 0$. Nous avons fait cette hypothèse dans notre étude du problème intermédiaire (*), mais nous ne l'avons toujours pas vérifié. Il nous faut donc exclure les cas $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.

Si nous commençons par le cas $\lambda = 0$, alors $r^2 F'' + rF' = 0$. Donc $F'(r) = cr^{-1}$ avec c une constante et $F(r) = c \ln(r) + c'$ où c' est une autre constante. Pour que F soit bornée sur $[0, R]$, alors $c = 0$. Parce que $F(R) = 0$, nous obtenons $c' = 0$. Ainsi si $\lambda = 0$, nous obtenons que $F \equiv 0$ et comme nous cherchons des solutions non triviales, nous pouvons exclure ce cas.

Si maintenant nous considérons le cas $\lambda = p^2$, alors notre équation différentielle devient $r^2 F'' + rF' - (pr)^2 F = 0$. En considérant la nouvelle variable $s = pr$, nous obtenons en utilisant la règle de chaînes

$$s^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + s \frac{dF}{ds} - s^2 F = 0.$$

Ceci est une équation différentielle de l'équation de Bessel. Nonobstant cette différence, ces équations ont aussi été bien étudiées. La solution générale est de la forme $AI_0(s) + BK_0(s)$ où les fonctions I_0 et K_0 sont les fonctions de Bessel modifiées. Il est connu que $I_0(z) > 0$ pour tout $z \geq 0$, $I_0(0) = 1$ et que $\lim_{z \rightarrow 0^+} K_0(z) = \infty$. Donc nous aurions que $F(r) = AI_0(pr) + BK_0(pr)$ pour tout $r \in [0, R]$. Comme nous voulons que F soit bornée comme fonction de r , alors $B = 0$ sinon, à cause de $\lim_{z \rightarrow 0^+} K_0(z) = \infty$, nous aurions une contradiction. Ainsi $F(r) = AI_0(pr)$. Comme $I_0(z) \neq 0$ si $z \geq 0$ et parce que $F(R) = 0$, nous obtenons alors que $AI_0(R) = 0 \Rightarrow A = 0$. Donc $F \equiv 0$. Mais ceci est impossible si nous voulons que la solution u ne soit pas triviale. Nous devons exclure ce cas.

Nous avons tracé à la figure [5] le graphe de $I_0(z)$ et $K_0(z)$ pour $z \in [0, 3]$.

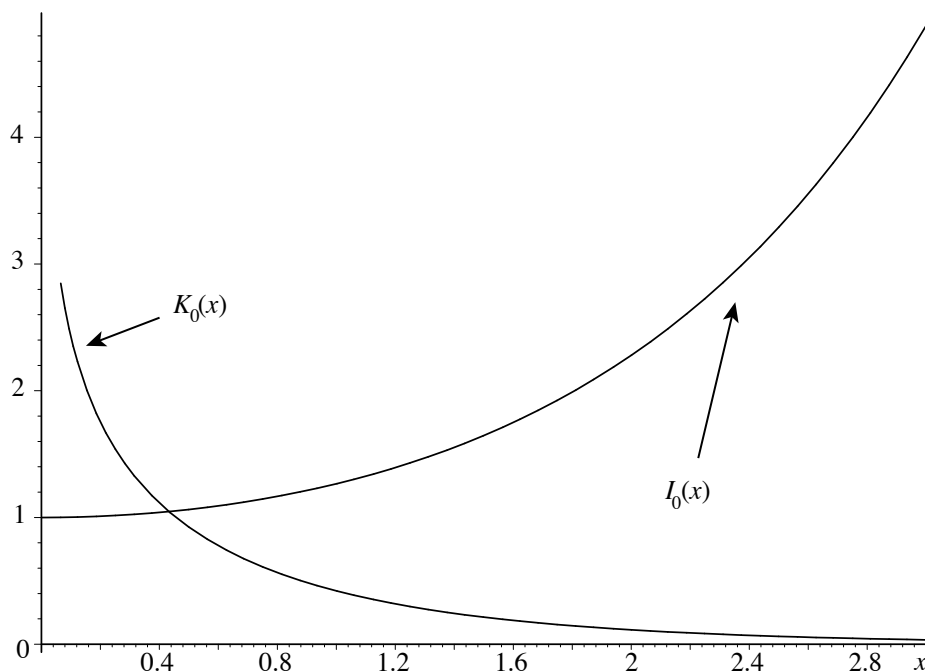


Figure [5]

* * *

Exercice 9.1

Développer les fonctions suivantes $f(x)$ sur l'intervalle $[0, R]$ où $R > 0$ en série de Fourier-Bessel de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\alpha_n x}{R}\right)$$

où J_0 est la fonction de Bessel du premier type de paramètre $\nu = 0$ et α_n est la n ième racine positive de $J_0(x)$ en sachant que $(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$.

a) $f(x) = 1$ pour tout x et $R > 0$ est quelconque.

b) $f(x) = 1 - x^2$ et $R = 1$.

c) $f(x) = 1 - x^4$ et $R = 1$.

Exercice 9.2 (†)

Rappelons que l'équation d'onde en coordonnées polaires est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{où } u = u(r, \theta, t). \quad (\text{éq. [2]})$$

Nous allons résoudre le problème de l'équation d'onde pour une membrane circulaire de rayon R en ne supposant pas que u soit indépendant de θ .

a) En utilisant la substitution $u(r, \theta, t) = F(r, \theta)G(t)$ dans l'équation [2], montrer que nous obtenons les deux équations

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + (ck)^2 G = 0 \quad (\text{éq. [3]})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0 \quad (\text{éq. [4]})$$

où k est une constante.

b) En utilisant la substitution $F(r, \theta) = H(r)L(\theta)$ dans l'équation [4], montrer que nous obtenons les deux équations

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + n^2 L = 0 \quad (\text{éq. [5]})$$

$$r^2 \frac{d^2 H}{dr^2} + r \frac{dH}{dr} + ((kr)^2 - n^2)H = 0 \quad (\text{éq. [6]})$$

où n est une constante.

c) Montrer que

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n}(r, \theta, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n}^*(r, \theta, t)$$

est une solution de l'équation [2] qui satisfait la condition $u(R, \theta, t) = 0$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et $t \geq 0$, où

$$u_{m,n}(r, \theta, t) = \left[A_{m,n} \cos\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) + B_{m,n} \sin\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) \right] J_n\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{R}\right) \cos(n\theta) \quad \text{et}$$

$$u_{m,n}^*(r, \theta, t) = \left[A_{m,n}^* \cos\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) + B_{m,n}^* \sin\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) \right] J_n\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{R}\right) \sin(n\theta).$$

Ici $J_n(z)$ désigne la fonction de Bessel du premier type d'ordre n , $\alpha_{m,n}$ est la m ième racine positive de $J_n(z)$.

Exercice 9.3

Montrer que

$$\exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \quad (\spadesuit)$$

en utilisant le fait que

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 9.4

Montrer que

$$e^{iz \sin(\theta)} = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2n\theta) + 2i \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin((2n-1)\theta) \quad (\heartsuit)$$

$$\cos(z \sin(\theta)) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2n\theta)$$

$$\sin(z \sin(\theta)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin((2n-1)\theta)$$

en posant $t = e^{i\theta}$ dans $(\spadesuit)$, où $i = \sqrt{-1}$.

Exercice 9.5

Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \sin(\theta)) d\theta = J_n(z)$$

en utilisant # 2 et l'orthogonalité des fonctions trigonométriques.

Exercice 9.6

Montrer que

$$e^{iz \cos(\theta)} = J_0(z) - 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n}(z) \cos(2n\theta) \right) + 2i \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(z) \cos((2n-1)\theta) \right)$$

$$\cos(z \cos(\theta)) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n}(z) \cos(2n\theta)$$

$$\sin(z \cos(\theta)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n-1}(z) \cos((2n-1)\theta)$$

Exercice 9.7

Montrer que

$$\frac{d}{dx} \left(J_0(x) \right) = -J_1(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \left(x^\nu J_\nu(x) \right) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad \text{pour tout } \nu \in \mathbf{R}.$$

Exercice 9.8

Posons

$$I_{a,b} = \int_0^\alpha \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right]^a x^b J_{b-1}(x) dx$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, $a, b \in \mathbf{N}$, $b > 0$.

(a) Si $a \geq 1$, alors montrer que

$$I_{a,b} = \left(\frac{2a}{\alpha^2}\right) I_{a-1,b+1}.$$

(b) Montrer que $I_{0,b} = \alpha^b J_b(\alpha)$.

(c) Montrer que $I_{a,b} = 2^a (a!) \alpha^{b-a} J_{a+b}(\alpha)$.

Exercice 9.9

Déterminer la solution $u = u(r, t)$ du problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad \text{avec } 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq t$$

et tel que $u(R, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$,

$$u(r, 0) = \tilde{f}(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^p \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \tilde{g}(r) = 0 \quad \text{pour tout } 0 \leq r \leq R.$$

Ici $p \in \mathbf{N}$, $p > 0$.

CHAPITRE 10

Les problèmes de Sturm-Liouville.

Dans ce chapitre, nous présenterons un cadre général qui permet de montrer que certaines fonctions sont orthogonales entre elles. À plusieurs occasions jusqu'à maintenant, nous avons eu à utiliser l'orthogonalité de certaines fonctions pour obtenir une expression de conditions initiales comme des séries de Fourier ou des généralisations de ces séries, par exemple les séries de Fourier-Bessel. Tous ces cas étudiés sont similaires en ce qu'ils sont des problèmes de Sturm-Liouville.

Nous allons premièrement décrire ce qu'est un problème de Sturm-Liouville. Ensuite nous montrerons l'orthogonalité de solutions non nulles d'un tel problème correspondant à des valeurs propres distincts. Nous terminerons en montrant l'orthogonalité des fonctions de Bessel et en calculant aussi la norme de ces fonctions. Ceci fait, nous aurons ainsi complété les preuves du chapitre précédent.

L'équation de Sturm-Liouville est l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x)) y = 0 \quad \text{où } x \in [a, b]. \quad (\text{éq. [1]})$$

Ici $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$ sont des fonctions données à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$, $r(x) \neq 0$, $y = y(x)$ est une fonction à déterminer, λ est une constante quelconque à déterminer aussi. Bien que l'équation de Sturm-Liouville ait une forme spéciale, beaucoup d'équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 sont équivalentes à une équation de Sturm-Liouville. Plus précisément, si les fonctions $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ et $\alpha_3(x)$ définies sur l'intervalle $[a, b]$ sont telles que $\alpha_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et que la fonction $\alpha_2(x)/\alpha_1(x)$ est intégrable sur $[a, b]$, et si nous définissons

$$r(x) = \exp \left[\int_a^x \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} dt \right], \quad q(x) = \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} r(x), \quad p(x) = \frac{r(x)}{\alpha_1(x)}$$

alors l'équation différentielle ordinaire

$$\alpha_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha_2(x) \frac{dy}{dx} + (\alpha_3(x) + \lambda) y = 0 \quad \text{où } x \in [a, b] \quad (\text{éq. [2]})$$

est équivalente à l'équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x)) y = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) &= r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dr}{dx} \frac{dy}{dx} = r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} \exp \left[\int_a^x \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} dt \right] \frac{dy}{dx} \\ &= r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} r(x) \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

En substituant ceci, ainsi que les expressions pour $p(x)$ et $r(x)$ dans l'équation de Sturm-Liouville, nous obtenons

$$r(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} r(x) \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\alpha_3(x)r(x)}{\alpha_1(x)} + \lambda \frac{r(x)}{\alpha_1(x)} \right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha_2(x) \frac{dy}{dx} + (\alpha_3(x) + \lambda) y = 0.$$

Nous obtenons cette dernière équation en multipliant les deux côtés de la première équation par $\alpha_1(x)/r(x)$. Parce que $r(x)$ est l'exponentielle d'un nombre réel, alors $r(x) > 0$ et qu'ainsi la division par $r(x)$ pour tout

$x \in [a, b]$ est bien définie. Nous avons obtenu l'équation [2]. Si $y = y(x)$ est une solution de l'équation de Sturm-Liouville, alors y sera aussi une solution de l'équation [2]. La réciproque est aussi vraie, i.e. si y est une solution de l'équation [2], alors y est une solution de l'équation de Sturm-Liouville avec les fonctions $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ définies comme ci-dessus.

Un **problème de Sturm-Liouville** est une équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x)) y = 0 \quad \text{où } x \in [a, b],$$

avec en plus des conditions aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$ de la forme

$$(*) \quad \begin{cases} (a) & k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (k_1, k_2) \neq (0, 0) \text{ et} \\ (b) & \ell_1 y(b) + \ell_2 y'(b) = 0 \quad \text{où } \ell_1, \ell_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (\ell_1, \ell_2) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Ici k_1 , k_2 , ℓ_1 et ℓ_2 sont des nombres réels donnés et λ est un paramètre quelconque.

Une solution d'un problème de Sturm-Liouville est une fonction qui satisfait à la fois l'équation de Sturm-Liouville et les conditions (*). La fonction triviale $y \equiv 0$ est clairement une solution pour tout problème de Sturm-Liouville. Les solutions $y \neq 0$ (si elles existent) sont dites être **les fonctions caractéristiques ou encore fonctions propres** du problème et, dans ce cas, la valeur λ pour laquelle une telle solution existe est **la valeur propre ou caractéristique** de cette solution. Ces notions sont les mêmes que celles de l'algèbre linéaire. Si $p(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors nous pouvons considérer l'opérateur linéaire

$$y \mapsto \frac{1}{p(x)} \left[\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y \right] = L(y)$$

défini sur l'espace vectoriel approprié de fonctions. Dans ce cadre, une fonction caractéristique du problème de Sturm-Liouville et sa valeur propre correspondante sont respectivement un vecteur propre de L et la valeur propre associée à ce vecteur propre.

Nous pouvons illustrer ces notions pour le problème de Sturm-Liouville:

$$y'' + \lambda y = 0 \text{ sur l'intervalle } [0, \pi] \text{ avec les conditions: } (*) \quad \begin{cases} y(0) = 0; \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Nous avons rencontré plusieurs fois cette équation avec exactement ces deux conditions. Si $\lambda \leq 0$, alors la seule solution du problème est la solution triviale $y \equiv 0$. Si $\lambda = \nu^2 > 0$, alors la solution générale de l'équation est $y(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)$. Si nous considérons les conditions (*), alors

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{et} \quad y(\pi) = A \cos(\nu \pi) + B \sin(\nu \pi) = 0 \Rightarrow B \sin(\nu \pi) = 0.$$

Comme nous voulons déterminer des solutions non triviales et que $A = 0$, nous pouvons supposer que $B \neq 0$. Conséquemment $\sin(\nu \pi) = 0 \Rightarrow \nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Ainsi les fonctions $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x), \dots, \sin(nx) \dots$ avec $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ sont les fonctions caractéristiques du problème et les valeurs propres correspondantes sont respectivement $\lambda = 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ avec $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Nous n'avons pas à prendre en compte les valeurs de $n \in \mathbf{Z}, n \leq -1$ car $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ pour tout θ et ainsi $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ pour $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.

Les fonctions caractéristiques d'un problème de Sturm-Liouville satisfont une relation d'orthogonalité. Nous allons maintenant énoncer et démontrer ce résultat.

Proposition 1 Soit le problème de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[a, b]$

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x)) y = 0 \quad \text{où } x \in [a, b],$$

avec comme conditions aux extrémités

$$(*) \quad \begin{cases} (a) & k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (k_1, k_2) \neq (0, 0) \text{ et} \\ (b) & \ell_1 y(b) + \ell_2 y'(b) = 0 \quad \text{où } \ell_1, \ell_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (\ell_1, \ell_2) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Nous supposons que les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ et $r'(x)$ sont à valeurs réelles et continues sur l'intervalle $[a, b]$. Si $y_m(x)$ et $y_n(x)$ sont deux fonctions caractéristiques de ce problème correspondant respectivement à des valeurs propres λ_m et λ_n distinctes, alors les fonctions $y_m(x)$ et $y_n(x)$ sont orthogonales sur l'intervalle $[a, b]$ par rapport à la fonction de poids $p(x)$. De plus, si $r(a) = 0$, alors seule la condition (b) suffit pour obtenir l'orthogonalité des fonctions $y_m(x)$ et $y_n(x)$; si $r(b) = 0$, alors seule la condition (a) suffit pour obtenir l'orthogonalité des fonctions $y_m(x)$ et $y_n(x)$. Finalement si $r(a) = r(b)$ et qu'au lieu des conditions (*) nous avons plutôt les conditions

$$(*)' \quad \begin{cases} (a) & y(a) = y(b); \\ (b) & y'(a) = y'(b); \end{cases}$$

alors là aussi nous avons l'orthogonalité des fonctions $y_m(x)$ et $y_n(x)$.

Preuve: Comme $y_m(x)$ et $y_n(x)$ sont des fonctions caractéristiques pour les valeurs propres λ_m et λ_n , alors nous avons

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d(y_m)}{dx} \right) + (q(x) + \lambda_m p(x)) y_m = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d(y_n)}{dx} \right) + (q(x) + \lambda_n p(x)) y_n = 0.$$

En multipliant la première équation par y_n , la seconde par $-y_m$ et en additionnant le tout, nous obtenons

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) p(x) y_m(x) y_n(x) &= y_m \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d(y_n)}{dx} \right) - y_n \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d(y_m)}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d(y_n)}{dx} y_m - r(x) \frac{d(y_m)}{dx} y_n \right). \end{aligned}$$

Parce que les fonctions $r(x)$, $r'(x)$, $y_m(x)$, $y_n(x)$, $y'_m(x)$ et $y'_n(x)$ sont continues sur $[a, b]$, alors

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d(y_n)}{dx} y_m - r(x) \frac{d(y_m)}{dx} y_n \right)$$

est une fonction continue et nous pouvons donc l'intégrer sur l'intervalle $[a, b]$. Noter que $r(x)$ et $r'(x)$ sont continues par hypothèse et que nous supposons aussi que les fonctions $y_m(x)$, $y_n(x)$, $y'_m(x)$, $y'_n(x)$, $y''_m(x)$ et $y''_n(x)$ sont continues sur l'intervalle $[a, b]$. Le fait que $y_m(x)$, $y_n(x)$, $y'_m(x)$ et $y'_n(x)$ sont dérivables nous assure que ces fonctions sont continues. Nous obtenons donc en intégrant

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx &= \int_a^b \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{d(y_n)}{dx} y_m - r(x) \frac{d(y_m)}{dx} y_n \right) dx \\ &= \left(r(x) \frac{d(y_n)}{dx} y_m - r(x) \frac{d(y_m)}{dx} y_n \right) \Big|_a^b \\ &= r(b) [y_m(b) y'_n(b) - y'_m(b) y_n(b)] - r(a) [y_m(a) y'_n(a) - y'_m(a) y_n(a)]. \end{aligned}$$

Vérifions que cette dernière expression est nulle. La condition (a) signifie que le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} y_m(a) & y'_m(a) \\ y_n(a) & y'_n(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en z_1 et z_2 a au moins une solution $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ et ceci n'est possible que si le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_m(a) & y'_m(a) \\ y_n(a) & y'_n(a) \end{vmatrix} = (y_m(a) y'_n(a) - y'_m(a) y_n(a)) = 0.$$

Sinon nous aurions qu'une seule solution $(z_1, z_2) = (0, 0)$. De même, la condition (b) signifie que le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} y_m(b) & y'_m(b) \\ y_n(b) & y'_n(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en z_1 et z_2 a au moins une solution $(\ell_1, \ell_2) \neq (0, 0)$ et ceci n'est possible que si le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_m(b) & y'_m(b) \\ y_n(b) & y'_n(b) \end{vmatrix} = (y_m(b)y'_n(b) - y'_m(b)y_n(b)) = 0.$$

Sinon nous aurions qu'une seule solution $(z_1, z_2) = (0, 0)$.

Donc de ce qui précède, nous pouvons conclure que

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx = 0,$$

parce que $\lambda_m \neq \lambda_n$ signifie que $(\lambda_m - \lambda_n) \neq 0$. Nous avons ainsi montré l'orthogonalité.

Si $r(a) = r(b) = 0$, nous avons aussi que

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx = 0$$

sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux conditions (*).

Si $r(a) = 0$, alors

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx = \frac{1}{(\lambda_m - \lambda_n)} r(b) [y_m(b)y'_n(b) - y'_m(b)y_n(b)]$$

et cette expression est 0 seulement à cause de la condition (b) sans avoir recours à la condition (a).

Si $r(b) = 0$, alors en procédant comme ci-dessus, nous obtenons que

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx = 0$$

à cause de la condition (a) sans avoir recours à la condition (b) cette fois.

Finalement si $r(a) = r(b)$ et que nous avons les conditions (*)' au lieu des conditions (*), alors

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx &= r(b) [y_m(b)y'_n(b) - y'_m(b)y_n(b)] - r(a) [y_m(a)y'_n(a) - y'_m(a)y_n(a)] \\ &= r(b) [y_m(b)y'_n(b) - y'_m(b)y_n(b) - y_m(a)y'_n(a) + y'_m(a)y_n(a)] = 0. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve de la proposition 1. □

Jusqu'à maintenant nous avons toujours supposé que les valeurs propres étaient des nombres réels. Mais comme nous le savons très bien après avoir étudié la notion de valeurs propres en algèbre linéaire, il arrive que des matrices dont toutes les entrées sont des nombres réels ont malgré tout des valeurs propres complexes non réelles. Ceci ne peut pas se produire pour un grand nombre de problèmes de Sturm-Liouville. Dans ces cas, les valeurs propres sont réelles. Nous allons maintenant exposer ce résultat. Ceci est similaire à ce qui se produit pour les matrices symétriques ayant des entrées réelles.

Proposition 2 Soit le problème de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[a, b]$

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x)) y = 0 \quad \text{où } x \in [a, b],$$

avec comme conditions aux extrémités

$$(*) \quad \begin{cases} (a) & k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (k_1, k_2) \neq (0, 0) \text{ et} \\ (b) & \ell_1 y(b) + \ell_2 y'(b) = 0 \quad \text{où } \ell_1, \ell_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (\ell_1, \ell_2) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Supposons que les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ et $r'(x)$ sont à valeurs réelles et continues sur l'intervalle $[a, b]$. Si $p(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$ (ou encore $p(x) < 0$ pour tout $x \in [a, b]$), alors toutes les valeurs propres du problème sont réelles.

Preuve: Supposons que $\lambda = \alpha + \beta i$ est une valeur propre du problème avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $i = \sqrt{-1}$. Notons par $y(x) = u(x) + v(x)i$ une fonction caractéristique correspondant à cette valeur propre λ , où $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions à valeurs réelles. En remplaçant dans l'équation de Sturm-Liouville, nous obtenons

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{du}{dx} + r(x) \frac{dv}{dx} i \right) + (q(x) + \alpha p(x) + \beta p(x) i) (u(x) + v(x) i) = 0.$$

En considérant la partie réelle et la partie imaginaire, nous obtenons deux équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{du}{dx} \right) + (q(x) + \alpha p(x))u(x) - \beta p(x)v(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dv}{dx} \right) + (q(x) + \alpha p(x))v(x) + \beta p(x)u(x) = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $v(x)$, la seconde par $-u(x)$ et en additionnant les deux équations, nous obtenons

$$-\beta(u^2(x) + v^2(x))p(x) = u(x) \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dv}{dx} \right) - v(x) \frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[r(x) u(x) \frac{dv}{dx} - r(x) v(x) \frac{du}{dx} \right].$$

En intégrant sur l'intervalle $[a, b]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\beta \int_a^b (u^2(x) + v^2(x)) p(x) dx &= \left(r(x) u(x) \frac{dv}{dx} - r(x) v(x) \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b \\ &= r(b) [u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] - r(a) [u(a)v'(a) - u'(a)v(a)]. \end{aligned}$$

Mais cette dernière expression est nulle. En effet, si nous considérons les conditions $(*)$, nous aurons

$$k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1(u(a) + v(a)i) + k_2(u'(a) + v'(a)i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u(a)k_1 + u'(a)k_2 = 0; \\ v(a)k_1 + v'(a)k_2 = 0; \end{cases}$$

ainsi que

$$\ell_1 y(b) + \ell_2 y'(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell_1(u(b) + v(b)i) + \ell_2(u'(b) + v'(b)i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u(b)\ell_1 + u'(b)\ell_2 = 0; \\ v(b)\ell_1 + v'(b)\ell_2 = 0. \end{cases}$$

De ceci, nous pouvons conclure que le système d'équations linéaires en z_1 et z_2

$$\begin{pmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a au moins une solution non nulle, à savoir $(z_1, z_2) = (k_1, k_2)$ et conséquemment le déterminant

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = (u(a)v'(a) - u'(a)v(a)) = 0.$$

Sinon seule la solution triviale est possible. De même, le système d'équations linéaires en z_1 et z_2

$$\begin{pmatrix} u(b) & u'(b) \\ v(b) & v'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a au moins une solution non nulle, à savoir $(z_1, z_2) = (\ell_1, \ell_2)$ et conséquemment le déterminant

$$\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ v(b) & v'(b) \end{vmatrix} = (u(b)v'(b) - u'(b)v(b)) = 0.$$

C'est ainsi que nous obtenons que

$$-\beta \int_a^b (u^2(x) + v^2(x)) p(x) dx = 0.$$

Comme y est une fonction caractéristique, alors $y \not\equiv 0$ et $(u^2(x) + v^2(x)) \not\equiv 0$. De plus comme $p(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$ (ou encore $p(x) < 0$ pour tout $x \in [a, b]$), alors

$$\int_a^b (u^2(x) + v^2(x)) p(x) dx \neq 0.$$

Nous pouvons donc conclure que $\beta = 0$ et $\lambda = \alpha \in \mathbf{R}$. □

Nous disons d'un problème de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[a, b]$

$$\frac{d}{dx} \left(r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x)) y = 0 \quad \text{où } x \in [a, b],$$

avec comme conditions aux extrémités

$$(*) \quad \begin{cases} (a) & k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (k_1, k_2) \neq (0, 0) \text{ et} \\ (b) & \ell_1 y(b) + \ell_2 y'(b) = 0 \quad \text{où } \ell_1, \ell_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (\ell_1, \ell_2) \neq (0, 0); \end{cases}$$

qu'il est **régulier** si les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ sont à valeurs réelles et continues sur $[a, b]$ (en incluant les extrémités a et b), que $p(x) > 0$ et $r(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 1 Soit un problème de Sturm-Liouville régulier. Alors

- a) Toutes les valeurs propres du problème sont des nombres réels.
- b) Il existe un nombre infini de valeurs propres: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$. Il existe une plus petite valeur propre, mais il n'y a pas de plus grande valeur propre. Nous avons aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.
- c) Les fonctions caractéristiques dont les valeurs propres sont distinctes sont orthogonales sur l'intervalle $[a, b]$ par rapport à la fonction poids $p(x)$.
- d) Chaque espace propre correspondant à la valeur propre λ_n est de dimension 1 sur $\mathbf{R}$. En d'autres mots, si $y_n(x)$ et $z_n(x)$ sont deux fonctions caractéristiques pour la même valeur propre λ_n , alors il existe une constante k telle que $z_n(x) = k y_n(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. De plus, chacune de ces fonctions caractéristiques a exactement $(n - 1)$ zéros dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. Ici λ_n est la n ième valeur propre.
- e) Si $y_n(x)$ est une fonction caractéristique pour la n ième valeur propre λ_n , alors il est possible d'exprimer toute fonction $f(x)$ lisse par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ comme une série de Fourier (généralisée) de fonctions caractéristiques: $y_n(x), n \in \mathbf{N}, n \geq 1$, i.e. nous pouvons associer à $f(x)$ une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x)$ qui converge vers $(f(x_0+) + f(x_0-))/2$ à $x = x_0 \in]a, b[$.

Nous avons démontré a) et c) pour un grand nombre de problèmes de Sturm-Liouville. Cependant nous ne démontrerons pas les autres énoncés de ce théorème. Une telle preuve nous éloignerait trop de notre étude des équations aux dérivées partielles.

Pour clore ce chapitre, nous allons considérer plus attentivement les fonctions de Bessel. Nous ne pourrions pas utiliser directement la proposition 1 dans ce cas pour démontrer l'orthogonalité. En effet, nous verrons que la fonction $q(x)$ du problème de Sturm-Liouville correspondant aux fonction de Bessel ne sera pas continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Cependant un argument très similaire à celui utilisé dans la preuve de la proposition 1 s'applique ici. Nous avons besoin d'un résultat préliminaire concernant les fonctions de Bessel et leurs dérivées.

Lemme 1 Si $a > 0$, alors

$$\left. \frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] \right|_{x=a} = a^\nu J_{\nu-1}(a); \quad \left. \frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} J_\nu(x) \right] \right|_{x=a} = -a^{-\nu} J_{\nu+1}(a);$$

$$J'_\nu(a) + \frac{\nu}{a} J_\nu(a) = J_{\nu-1}(a); \quad J'_\nu(a) - \frac{\nu}{a} J_\nu(a) = -J_{\nu+1}(a).$$

Preuve: Nous avons défini $J_\nu(x)$ au chapitre 9. Ainsi

$$x^\nu J_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{2m}} \right) x^{2(m+\nu)}.$$

Nous pouvons calculer $(x^\nu J_\nu(x))'$ en dérivant terme-à-terme. Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{2m}} \right) 2(m + \nu) x^{2(m+\nu)-1} \\ &= \frac{x^{2\nu-1}}{2^{\nu-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m) 2^{2m}} \right) x^{2m} = x^\nu J_{\nu-1}(x). \end{aligned}$$

En évaluant à $x = a$, les séries ci-dessus convergent et nous obtenons que

$$\left. \frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] \right|_{x=a} = a^\nu J_{\nu-1}(a).$$

De façon analogue, nous avons

$$x^{-\nu} J_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{2m}} \right) x^{2m}.$$

Nous pouvons calculer $(x^{-\nu} J_\nu(x))'$ en dérivant terme-à-terme. Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} J_\nu(x) \right] &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{2m}} \right) (2m) x^{2m-1} \\ &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m-1)! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{2m-1}} \right) x^{2m-1} \\ &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{m! \Gamma(\nu + m + 2) 2^{2m+1}} \right) x^{2m+1} \\ &= -x^{-\nu} \frac{x^{\nu+1}}{2^{\nu+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{m! \Gamma((\nu + 1) + m + 1) 2^{2m}} \right) x^{2m} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

En évaluant à $x = a$, les séries ci-dessus convergent et nous obtenons que

$$\left. \frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} J_\nu(x) \right] \right|_{x=a} = -a^{-\nu} J_{\nu+1}(a).$$

De l'équation

$$\left. \frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] \right|_{x=a} = a^\nu J_{\nu-1}(a),$$

nous avons $\nu a^{\nu-1} J_\nu(a) + a^\nu J'_\nu(a) = a^\nu J_{\nu-1}(a)$. Après avoir divisé par a^ν , nous obtenons $J'_\nu(a) + \frac{\nu}{a} J_\nu(a) = J_{\nu-1}(a)$.

De l'équation

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} J_\nu(x) \right] \Big|_{x=a} = -a^{-\nu} J_{\nu+1}(a),$$

nous avons $-\nu a^{-\nu-1} J_\nu(a) + a^{-\nu} J'_\nu(a) = -a^{-\nu} J_{\nu+1}(a)$. Nous obtenons $J'_\nu(a) - \frac{\nu}{a} J_\nu(a) = -J_{\nu+1}(a)$ après avoir multiplié par a^ν . Ceci complète la preuve du lemme. $\square$

Nous allons maintenant montrer la relation d'orthogonalité des fonctions de Bessel, ainsi que la norme de ces fonctions.

Proposition 3 Soit $m \in \mathbf{N}$. Notons par $J_m(x)$ (respectivement $J_{m+1}(x)$) : la fonction de Bessel du premier type d'ordre m (respectivement d'ordre $m+1$) et par $0 < \alpha_{1,m} < \alpha_{2,m} < \alpha_{3,m} < \dots < \alpha_{n,m} < \dots$ les zéros positifs de $J_m(x)$ en ordre croissant. Alors

$$a) \int_0^1 x J_m(\alpha_{n,m} x) J_m(\alpha_{k,m} x) dx = 0 \quad \text{si } 1 \leq k, 1 \leq n \text{ et } k \neq n.$$

$$b) \int_0^1 x J_m^2(\alpha_{n,m} x) dx = \frac{J_{m+1}^2(\alpha_{n,m})}{2} \quad \text{si } 1 \leq n.$$

Preuve: a) Rappelons que $J_m(x)$ est une solution de l'équation de Bessel d'ordre m et qu'alors nous avons

$$x^2 J_m''(x) + x J_m'(x) + (x^2 - m^2) J_m(x) = 0. \quad (\text{éq. [3]})$$

Définissons les deux fonctions $u(x) = J_m(\alpha_{n,m} x)$ et $v(x) = J_m(\alpha_{k,m} x)$. En utilisant la règle de chaînes, nous avons $u'(x) = \alpha_{n,m} J_m'(\alpha_{n,m} x)$ et $u''(x) = \alpha_{n,m}^2 J_m''(\alpha_{n,m} x)$. Si nous considérons l'équation [3] au point $\alpha_{n,m} x$, nous avons

$$(\alpha_{n,m} x)^2 J_m''(\alpha_{n,m} x) + (\alpha_{n,m} x) J_m'(\alpha_{n,m} x) + ((\alpha_{n,m} x)^2 - m^2) J_m(\alpha_{n,m} x) = 0.$$

En substituant les expressions équivalentes en fonction de u dans cette dernière équation et après avoir divisé par x^2 , nous obtenons que u satisfait l'équation

$$u''(x) + \frac{1}{x} u' + \left(\alpha_{n,m}^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) u(x) = 0. \quad (\text{éq. [4]})$$

Cette dernière équation est équivalente à l'équation de Sturm-Liouville suivante

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + \left(\frac{-m^2}{x} + \alpha_{n,m}^2 x \right) u(x) = 0$$

où au lieu de λ nous avons écrit plutôt $\alpha_{n,m}^2$.

De façon tout à fait analogue, nous obtenons que v satisfait l'équation

$$v''(x) + \frac{1}{x} v' + \left(\alpha_{k,m}^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) v(x) = 0. \quad (\text{éq. [5]})$$

Cette dernière équation est équivalente à l'équation de Sturm-Liouville suivante

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dv}{dx} \right) + \left(\frac{-m^2}{x} + \alpha_{k,m}^2 x \right) v(x) = 0$$

où au lieu de λ nous avons écrit plutôt $\alpha_{k,m}^2$.

Nous avons ainsi que $u(x)$ et $v(x)$ sont des solutions de l'équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{-m^2}{x} + \lambda x \right) y(x) = 0$$

pour $\lambda = \alpha_{n,m}^2$ et $\alpha_{k,m}^2$ respectivement. La proposition 1 ne peut pas nous être utile parce qu'ici $q(x) = -m^2/x$ n'est pas continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et dans l'énoncé de la proposition nous demandons que $q(x)$ soit continue sur l'intervalle $[a, b]$. Cependant nous pouvons tenter d'adapter la preuve de la proposition 1 à ce cas.

En multipliant les deux côtés de l'équation [4] par $v(x)$, les deux côtés de l'équation [5] par $-u(x)$ et en additionnant le tout, nous obtenons

$$v(x)u''(x) - u(x)v''(x) + \frac{1}{x}(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)) + (\alpha_{n,m}^2 - \alpha_{k,m}^2)u(x)v(x) = 0.$$

Nous pouvons exprimer ceci aussi de la façon suivante:

$$(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))' + \frac{1}{x}(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)) = (\alpha_{k,m}^2 - \alpha_{n,m}^2) u(x) v(x)$$

ou encore après avoir multiplié par x ,

$$\frac{d}{dx} \left[x(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)) \right] = (\alpha_{k,m}^2 - \alpha_{n,m}^2) x u(x) v(x).$$

Cette dernière équation est valable sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Nous pouvons maintenant intégrer sur l'intervalle $[0, 1]$ les deux côtés de cette dernière équation. Donc

$$\begin{aligned} (\alpha_{k,m}^2 - \alpha_{n,m}^2) \int_0^1 x u(x) v(x) dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[x(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)) \right] dx \\ &= \left[x(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)) \right]_0^1 = u'(1)v(1) - u(1)v'(1) = 0. \end{aligned}$$

Nous utilisons le fait que $u(1) = J_m(\alpha_{n,m}) = 0$ et $v(1) = J_m(\alpha_{k,m})$ parce que $\alpha_{n,m}$ et $\alpha_{k,m}$ sont des zéros de $J_m(x)$. Comme $\alpha_{n,m} \neq \alpha_{k,m}$ et que ce sont deux nombres réels positifs, nous avons que $(\alpha_{k,m}^2 - \alpha_{n,m}^2) \neq 0$ et conséquemment

$$\int_0^1 x u(x) v(x) dx = \int_0^1 x J_m(\alpha_{n,m}x) J_m(\alpha_{k,m}x) dx = 0.$$

b) Si nous multiplions maintenant les deux côtés de l'équation [4] par $2x^2u'(x)$, nous obtenons

$$2x^2u'(x)u''(x) + 2x(u'(x))^2 + 2x^2u'(x) \left(\alpha_{n,m}^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) u(x) = 0.$$

Cette dernière expression peut aussi s'écrire

$$\frac{d}{dx} \left[x^2(u'(x))^2 \right] + \frac{d}{dx} \left[\alpha_{n,m}^2 x^2 (u(x))^2 \right] - 2\alpha_{n,m}^2 x(u(x))^2 - \frac{d}{dx} \left[m^2(u(x))^2 \right] = 0,$$

i.e.

$$\frac{d}{dx} \left[x^2(u'(x))^2 + \alpha_{n,m}^2 x^2 (u(x))^2 - m^2(u(x))^2 \right] = 2\alpha_{n,m}^2 x(u(x))^2.$$

En intégrant sur l'intervalle $[0, 1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 2\alpha_{n,m}^2 \int_0^1 x(u(x))^2 dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[x^2(u'(x))^2 + \alpha_{n,m}^2 x^2 (u(x))^2 - m^2(u(x))^2 \right] \\ &= \left[x^2(u'(x))^2 + \alpha_{n,m}^2 x^2 (u(x))^2 - m^2(u(x))^2 \right]_0^1 \\ &= (u'(1))^2 + \alpha_{n,m}^2 (u(1))^2 - m^2(u(1))^2 + m^2(u(0))^2 = (u'(1))^2 \end{aligned}$$

parce que comme nous l'avons fait remarqué ci-dessus $u(1) = J_m(\alpha_{n,m}) = 0$. Nous utilisons aussi le fait que si $m > 0$, alors $u(0) = J_m(0) = 0$ et si $m = 0$, alors $m^2(u(0))^2 = 0^2 J_0^2(0) = (0)(1) = 0$. Nous n'avons plus qu'à calculer $u'(1)$. Notons que $u'(x) = \alpha_{n,m} J'_m(\alpha_{n,m}x)$. Ainsi $u'(1) = \alpha_{n,m} J'_m(\alpha_{n,m})$. Du lemme 1, nous obtenons que

$$J'_m(\alpha_{n,m}) = \frac{m}{\alpha_{n,m}} J_m(\alpha_{n,m}) - J_{m+1}(\alpha_{n,m}) = -J_{m+1}(\alpha_{n,m}).$$

De tout ceci, nous obtenons que

$$\int_0^1 x J_m^2(\alpha_{n,m}x) dx = \frac{(-\alpha_{n,m} J_{m+1}(\alpha_{n,m}))^2}{2\alpha_{n,m}^2} = \frac{J_{m+1}^2(\alpha_{n,m})}{2}.$$

Ceci complète la preuve de b). □

Les formules énoncées au chapitre 9 sont légèrement différentes. Elles sont énoncées pour l'intervalle $[0, R]$ au lieu de $[0, 1]$. Il suffit seulement de faire un simple changement de coordonnées. Le corollaire suivant présente cette situation.

Corollaire 1 Soient $m \in \mathbf{N}$ et R , un nombre réel > 0 . Notons par $J_m(z)$ (respectivement $J_{m+1}(z)$) : la fonction de Bessel du premier type d'ordre m (respectivement d'ordre $m+1$), par $0 < \alpha_{1,m} < \alpha_{2,m} < \alpha_{3,m} < \dots < \alpha_{n,m} < \dots$ les zéros positifs de $J_m(x)$ en ordre croissant et par $\lambda_{n,m} = \alpha_{n,m}/R$. Alors

a) $\int_0^R z J_m(\lambda_{n,m}z) J_m(\lambda_{k,m}z) dz = 0$ si $1 \leq k, 1 \leq n$ et $k \neq n$.

b) $\int_0^R z J_m^2(\lambda_{n,m}z) dz = \frac{R^2 J_{m+1}^2(\lambda_{n,m}R)}{2}$ si $1 \leq n$.

Preuve: a) Considérons la nouvelle variable $x = z/R$. Alors $dx = (1/R)dz$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^R z J_m(\lambda_{n,m}z) J_m(\lambda_{k,m}z) dz &= \int_0^1 (Rx) J_m(\alpha_{n,m}x) J_m(\alpha_{k,m}x) R dx \\ &= R^2 \int_0^1 x J_m(\alpha_{n,m}x) J_m(\alpha_{k,m}x) dx = 0 \end{aligned}$$

par la proposition 3 a). Noter qu'ici, nous utilisons le fait que

$$\lambda_{n,m}z = \frac{\alpha_{n,m}}{R} Rx = \alpha_{n,m}x \quad \text{et} \quad \lambda_{k,m}z = \frac{\alpha_{k,m}}{R} Rx = \alpha_{k,m}x.$$

b) Considérons la nouvelle variable $x = z/R$. Alors $dx = (1/R)dz$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^R z J_m^2(\lambda_{n,m}z) dz &= \int_0^1 (Rx) J_m^2(\alpha_{n,m}x) R dx = R^2 \int_0^1 x J_m^2(\alpha_{n,m}x) dx \\ &= \frac{R^2 J_{m+1}^2(\alpha_{n,m})}{2} = \frac{R^2 J_{m+1}^2(\lambda_{n,m}R)}{2} \end{aligned}$$

par la proposition 3 b). □

Nous verrons dans le prochain chapitre un autre exemple classique d'équations de Sturm-Liouville. Il s'agira de l'équation de Legendre. Il existe de nombreux autres exemples classiques d'équations de Sturm-Liouville. Par exemple, l'équation de Chebyshev

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{(1-x^2)} \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda}{\sqrt{(1-x^2)}} y = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[;$$

l'équation d'Hermite

$$\frac{d}{dx} \left[\exp(-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda \exp(-x^2) y = 0 \quad \text{sur } \mathbf{R};$$

et l'équation de Laguerre

$$\frac{d}{dx} \left[x e^{-x} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x} y = 0, \quad \text{sur } [0, \infty[.$$

Nous ne traiterons pas de ces équations et de leurs fonctions caractéristiques dans ces notes.

* * *

Exercice 10.1

Déterminer les valeurs propres et les fonctions caractéristiques pour chacun des problèmes de Sturm-Liouville suivant:

- a) $y'' + \lambda y = 0$ sur l'intervalle $[0, \ell]$ avec $y(0) = 0$ et $y'(\ell) = 0$.
- b) $y'' + \lambda y = 0$ sur l'intervalle $[0, \ell]$ avec $y'(0) = 0$ et $y'(\ell) = 0$.
- c) $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$ sur l'intervalle $[1, e]$ avec $y(1) = 0$ et $y(e) = 0$.
- d) $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ avec $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$.

Exercice 10.2

Étant donné l'équation différentielle ordinaire $y'' + 3y' + (\lambda - 5)y = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$ avec les conditions aux extrémités $y(0) = 0$ et $y(1) = 0$.

- (a) Déterminer l'équation de Sturm-Liouville équivalente à cette dernière équation.
- (b) Déterminer les fonctions caractéristiques et les valeurs propres de ce problème de Sturm-Liouville.

Exercice 10.3(†)

Étant donné l'équation de Chebyshev

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} y = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[$$

- (a) Montrer que le polynôme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(2k)! (n-2k)!} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k,$$

où $\lfloor a \rfloor$ est la partie entière de $a \in \mathbf{R}$, est une fonction caractéristique de l'équation de Chebyshev et déterminer sa valeur propre.

- (b) Montrer que

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

CHAPITRE 11

L'équation du potentiel.

Dans ce chapitre, nous allons illustrer la méthode de séparation de variables pour une dernière fois dans un exemple classique: l'équation de Laplace à l'intérieur d'une sphère. Cette fois-ci, l'expression générale de la solution se fera au moyen des polynômes de Legendre (mathématicien français, Paris, 1752 - *id.*, 1833). Nous décrirons ces derniers dans ce chapitre. Ce sont des solutions d'une équation de Sturm-Liouville qui satisfont une relation d'orthogonalité.

Souvent en physique un champ de force $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ est décrit comme le gradient ∇u d'une fonction $u = u(x, y, z)$, i.e.

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \nabla u,$$

appelée le potentiel. Dans certains cas, ces champs de force sont tels que u satisfait une équation aux dérivées partielles. Un tel exemple apparait en électrostatique. Si un conducteur électrique de forme sphérique est chargé électriquement, qu'un équilibre est atteint de façon à ce qu'il n'y ait pas de courant électrique sur la sphère et que la distribution du potentiel électrique sur le conducteur est connue, pour déterminer la force électrique sur une particule chargée située à l'intérieur de la sphère, il suffit alors de déterminer le potentiel u .

Soient $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, la sphère de rayon $R > 0$ centrée à l'origine et $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, la boule fermée de rayon R centrée à l'origine. Alors pour déterminer u , il nous faut mathématiquement déterminer la fonction $u = u(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{pour } (x, y, z) \in B$$

avec la condition $u(x, y, z) = \psi(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in S$ où $\psi(x, y, z)$ est une fonction donnée définie sur la sphère S . Cette EDP est l'équation de Laplace.

Nous n'allons pas considérer ce problème si général. Mais plutôt un cas plus particulier en imposant des conditions à la fonction ψ . Nous supposons que cette fonction est indépendante de la longitude du point sur la sphère et ne dépend que de sa latitude. Nous serons plus précis plus loin.

Pour étudier ce problème, il est préférable d'utiliser les coordonnées sphériques plutôt que les coordonnées cartésiennes. Rappelons ce que sont les coordonnées sphériques. À un point $P = (x, y, z)$ dans $\mathbf{R}^3$, nous pouvons associer ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . La coordonnée r est la distance du point P à l'origine $O = (0, 0, 0)$, la coordonnée θ est la mesure de l'angle fait par la demi-droite issue de l'origine et passant par la projection orthogonale du point P sur le plan des x, y et la demi-droite des x positifs et finalement la coordonnée ϕ est la mesure de l'angle fait par la demi-droite issue de l'origine et passant par le point P et la demi-droite des z positifs. Ces valeurs satisfont les inégalités: $0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$ et $0 \leq \phi \leq \pi$. Les coordonnées cartésiennes et sphériques sont reliées entre elles par les équations

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\phi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ z = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \end{cases}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, l'équation de Laplace devient alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (\text{éq. [1]})$$

En effet, par la règle de chaînes et de la définition des coordonnées sphériques ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \cos(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r \sin(\phi)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi}; \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \sin(\theta) \sin(\phi) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r \sin(\phi)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\sin(\theta) \cos(\phi)}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi}; \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \cos(\phi) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi}; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2(\theta) \cos^2(\phi)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - 2 \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \\
&\quad + 2 \frac{\cos^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} - 2 \frac{\sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi)}{r^2 \sin(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} \\
&\quad + \left(\frac{\sin^2(\theta)}{r} + \frac{\cos^2(\theta) \cos^2(\phi)}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad + \left(\frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2 \sin^2(\phi)} + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi)}{r^2 \sin^2(\phi)} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&\quad + \left(-2 \frac{\cos^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)}{r^2} + \frac{\sin^2(\theta) \cos(\phi)}{r^2 \sin(\phi)} \right) \frac{\partial u}{\partial \phi}; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + 2 \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \\
&\quad + 2 \frac{\sin^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} + 2 \frac{\sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi)}{r^2 \sin(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} \\
&\quad + \left(\frac{\cos^2(\theta)}{r} + \frac{\sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad - \left(\frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2 \sin^2(\phi)} + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi)}{r^2 \sin^2(\phi)} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&\quad + \left(-2 \frac{\sin^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)}{r^2} + \frac{\cos^2(\theta) \cos(\phi)}{r^2 \sin(\phi)} \right) \frac{\partial u}{\partial \phi}; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \cos^2(\phi) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - 2 \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} + \frac{\sin^2(\phi)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}.
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation de Laplace, nous obtenons bien l'équation [1]. Ainsi le problème que nous aimerions étudier est de déterminer une fonction $u = u(r, \theta, \phi)$ avec $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta < \pi$ et $0 \leq \phi \leq \pi$ qui satisfait l'équation [1] et telle que $u(R, \theta, \phi) = \tilde{\psi}(\theta, \phi)$ est une fonction donnée. Nous allons restreindre notre étude à un cas particulier de ce problème. Nous allons supposer que la fonction $\tilde{\psi}$ donnée est indépendante de θ et que nous cherchons à déterminer les solutions u qui sont aussi indépendantes de θ . Avec ces hypothèses, nous avons que $u = u(r, \phi)$ et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{dans l'équation [1].}$$

En résumé, nous allons maintenant étudier le problème plus restreint qui est de déterminer une solution $u = u(r, \phi)$ avec $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \phi \leq \pi$ qui satisfait l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{éq. [2]})$$

ainsi que la condition $u(R, \phi) = f(\phi)$, où f est une fonction donnée définie sur l'intervalle $[0, \pi]$. Nous supposons aussi que $u(r, \phi)$ est une fonction bornée.

Si nous utilisons la méthode de séparation de variables, nous commençons par étudier le problème intermédiaire

$$(*) \quad \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad \text{et} \quad u(r, \phi) \text{ est une fonction bornée,} \right.$$

où $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \phi \leq \pi$. Pour l'instant, nous ne considérons pas la condition à la frontière. Nous cherchons à déterminer des solutions de ce problème intermédiaire (*) de la forme $u(r, \phi) = F(r)G(\phi)$. En substituant dans l'EDP, nous obtenons

$$F''G + \frac{2}{r}F'G + \frac{1}{r^2}FG'' + \frac{\cotan(\phi)}{r^2}FG' = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \left(\frac{F''}{F} + \frac{2}{r} \frac{F'}{F} \right) = - \left(\frac{G''}{G} + \cotan(\phi) \frac{G'}{G} \right)$$

après avoir divisé par FG/r . Ici F' et F'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de F par rapport à r , alors que G' et G'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de G par rapport à ϕ . Le terme de gauche de cette dernière équation est une fonction de r seulement, alors que le terme de droite est une fonction de ϕ seulement. Nous avons ainsi séparé les variables. Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut que chacun des termes soit égal à une constante λ :

$$r^2 \left(\frac{F''}{F} + \frac{2}{r} \frac{F'}{F} \right) = - \left(\frac{G''}{G} + \cotan(\phi) \frac{G'}{G} \right) = \lambda.$$

De ce fait, nous obtenons deux équations différentielles ordinaires

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + 2r \frac{dF}{dr} - \lambda F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 G}{d\phi^2} + \cotan(\phi) \frac{dG}{d\phi} + \lambda G = 0.$$

Il nous faut donc étudier ces équations différentielles pour déterminer les valeurs possibles de λ et les solutions $F(r)$ et $G(\phi)$ non triviales correspondantes.

L'équation

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + 2r \frac{dF}{dr} - \lambda F = 0 \quad (\text{éq. [3]})$$

est une équation bien connue, l'équation de Cauchy. Elle est aussi connue sous le nom d'équation d'Euler. Il est possible en faisant un changement de variables de transformer l'équation [3] en une équation à coefficient constant. En effet, posons $z = \ln(r)$, alors

$$\frac{dF}{dr} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dF}{dz}, \quad \frac{d^2 F}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dz} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dF}{dz} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{dz^2}$$

et, en substituant dans l'équation [3], nous obtenons

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{dF}{dz} + 2 \frac{dF}{dz} - \lambda F = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{dF}{dz} - \lambda F = 0.$$

Il est alors possible d'analyser les solutions F par rapport au paramètre λ en exprimant celles-ci en fonction de z dans un premier temps et ensuite en fonction de r .

Si nous voulons décrire la solution générale de

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{dF}{dz} - \lambda F = 0, \quad (\text{éq. [4]})$$

nous devons considérer les racines du polynôme en D suivant: $D^2 + D - \lambda 1$. Ces racines sont

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}.$$

Il y a donc trois cas à considérer: soit les deux racines sont complexes et non réelles, soit la racine est réelle et double, soit les deux racines sont réelles et distinctes.

Dans le premier cas, si ces deux racines sont complexes et non réelles, i.e. $(1 + 4\lambda) = -p^2 < 0$ avec $p > 0$, alors ces racines sont égales à $(-1 \pm p \sqrt{-1})/2$ et la solution générale de l'équation [4] est de la forme

$$Ae^{-z/2} \cos\left(\frac{p}{2}z\right) + Be^{-z/2} \sin\left(\frac{p}{2}z\right).$$

Conséquemment la solution générale de l'équation [3] est

$$Ar^{-1/2} \cos\left(\frac{p}{2} \ln(r)\right) + Br^{-1/2} \sin\left(\frac{p}{2} \ln(r)\right),$$

parce que $z = \ln(r)$. Parce que la solution $u(r, \phi)$ doit être bornée, nous obtenons de cette condition que la fonction $F(r)$ doit aussi être bornée. Mais ici la fonction

$$Ar^{-1/2} \cos\left(\frac{p}{2} \ln(r)\right) + Br^{-1/2} \sin\left(\frac{p}{2} \ln(r)\right)$$

n'est pas bornée lorsque $(A, B) \neq (0, 0)$. Il suffit de considérer le comportement de cette fonction lorsque $r \rightarrow 0$. Nous devons donc rejeter ce premier cas.

Dans le second cas, si la racine est réelle et double, i.e. $(1 + 4\lambda) = 0$, alors la racine est égale à $-1/2$ et la solution générale de l'équation [4] est de la forme

$$Ae^{-z/2} + Bze^{-z/2}.$$

Conséquemment la solution générale de l'équation [3] est

$$Ar^{-1/2} + Br^{-1/2} \ln(r),$$

parce que $z = \ln(r)$. Comme ci-dessus, nous devons rejeter ce second cas parce que la fonction

$$Ar^{-1/2} + Br^{-1/2} \ln(r)$$

n'est pas bornée lorsque $(A, B) \neq (0, 0)$. Il suffit de considérer le comportement de cette fonction lorsque $r \rightarrow 0$.

Dans le troisième cas, si les deux racines sont des nombres réels distincts, i.e. $(1 + 4\lambda) = p^2 > 0$ avec $p > 0$, alors ces racines sont égales à $(-1 \pm p)/2$ et la solution générale de l'équation [4] est de la forme

$$A \exp\left(\frac{(-1+p)}{2}z\right) + B \exp\left(\frac{(-1-p)}{2}z\right).$$

Conséquemment la solution générale de l'équation [3] est

$$Ar^{(-1+p)/2} + Br^{(-1-p)/2},$$

parce que $z = \ln(r)$. Comme ci-dessus, nous voulons que la fonction $F(r)$ soit bornée, alors nous devons rejeter les cas où $p < 1$. Parce que si $p < 1$, alors les deux exposants $(-1+p)/2$ et $(-1-p)/2$ sont négatifs et, en considérant le comportement de la solution générale pour $(A, B) \neq (0, 0)$ lorsque $r \rightarrow 0$, nous voyons alors que la fonction $F(r)$ n'est pas bornée. Donc $(1 + 4\lambda) = p^2 \geq 1$ et $\lambda \geq 0$. Posons

$$\nu = \frac{(-1+p)}{2}.$$

Alors ν est une des racines, l'autre racine est

$$\frac{(-1-p)}{2} = -(\nu + 1) \quad \text{parce que} \quad \nu = \frac{(-1+p)}{2} \quad \Rightarrow \quad p = (2\nu + 1).$$

Comme $p \geq 1$, nous avons $\nu \geq 0$ et $-(\nu + 1) \leq -1$. Nous pouvons aussi exprimer λ en fonction de ν . En effet, nous obtenons

$$\nu = \frac{(-1 + p)}{2} = \frac{(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda})}{2} \Rightarrow (2\nu + 1) = \sqrt{1 + 4\lambda} \Rightarrow (2\nu + 1)^2 = (1 + 4\lambda) \Rightarrow \lambda = \nu(\nu + 1).$$

Si nous revenons à la solution $F(r)$ de l'équation [3], nous avons que $F(r) = Ar^\nu + Br^{-(\nu+1)}$. Comme $\nu \geq 0$ et que nous voulons que $F(r)$ soit bornée, alors $B = 0$. Finalement si nous résumons ce que nous avons obtenu ci-dessus, $\lambda = \nu(\nu + 1)$ avec $\nu \geq 0$ et $F(r) = Ar^\nu$ pour $0 \leq r \leq R$.

Il nous faut donc maintenant considérer l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2G}{d\phi^2} + \cotan(\phi) \frac{dG}{d\phi} + \lambda G = 0. \quad (\text{éq. [5]})$$

Nous pouvons considérer une nouvelle variable $w = \cos(\phi)$ avec $-1 \leq w \leq 1$. Il est possible de déterminer l'équation différentielle équivalente à l'équation [5]. En effet,

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{dG}{dw} \frac{dw}{d\phi} = -\sin(\phi) \frac{dG}{dw} \quad \text{et}$$

$$\frac{d^2G}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi} \left(-\sin(\phi) \frac{dG}{dw} \right) = -\cos(\phi) \frac{dG}{dw} - \sin(\phi) \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dG}{dw} \right) = -\cos(\phi) \frac{dG}{dw} + \sin^2(\phi) \frac{d^2G}{dw^2}.$$

Conséquemment après substitution, nous obtenons

$$\sin^2(\phi) \frac{d^2G}{dw^2} - \cos(\phi) \frac{dG}{dw} - \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} \sin(\phi) \frac{dG}{dw} + \lambda G = 0 \Rightarrow (1 - \cos^2(\phi)) \frac{d^2G}{dw^2} - 2\cos(\phi) \frac{dG}{dw} + \lambda G = 0.$$

Finalement comme $w = \cos(\phi)$ et $\lambda = \nu(\nu + 1)$, nous obtenons l'équation différentielle

$$(1 - w^2) \frac{d^2G}{dw^2} - 2w \frac{dG}{dw} + \nu(\nu + 1)G = 0. \quad (\text{éq. [6]})$$

Cette équation est une équation classique et très connue: l'équation de Legendre. Il est aussi possible d'écrire cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dw} \left((1 - w^2) \frac{dG}{dw} \right) + \nu(\nu + 1)G = 0. \quad (\text{éq. [7]})$$

Si $\nu \notin \mathbf{N}$, alors il est possible de montrer que toute solution non-triviale de l'équation [6] n'est pas bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$. Nous ne ferons pas la preuve de ceci. Disons seulement qu'une façon de montrer ceci est d'utiliser les fonctions hypergéométriques, généralisation de la série géométrique en reliant l'équation [6] avec l'équation différentielle hypergéométrique. Nous allons maintenant considérer l'équation [6] avec $\nu = n \in \mathbf{N}$.

Rappelons ce qu'est l'équation de Legendre et ce que sont les polynômes de Legendre. **L'équation de Legendre d'ordre $n \in \mathbf{N}$ est**

$$(1 - z^2) \frac{d^2f}{dz^2} - 2z \frac{df}{dz} + n(n + 1)f = 0,$$

où $f = f(z)$ est une fonction définie sur l'intervalle $] -1, 1[$ et possiblement aux extrémités aussi. C'est une équation linéaire homogène d'ordre 2. Conséquemment pour décrire toutes les solutions de l'équation de Legendre, il nous faut déterminer deux solutions f_1 et f_2 linéairement indépendantes et toutes les solutions seront alors des combinaisons linéaires $Af_1 + Bf_2$.

Si $k \in \mathbf{N}$, nous noterons par $P_k(z)$, le polynôme suivant

$$P_k(z) = \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2k - 2m)!}{m! (k - m)! (k - 2m)!} z^{k-2m} \quad \text{où } M = \begin{cases} k/2, & \text{si } k \text{ est pair;} \\ (k - 1)/2, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

$P_k(z)$ est le **polynôme de Legendre de degré k** . Nous noterons aussi par $Q_k(z)$, la fonction

$$Q_k(z) = \frac{1}{2}P_k(z) \ln \left(\frac{(1+z)}{(1-z)} \right) - W_{k-1}(z)$$

$$\text{où } W_{-1}(z) = 0 \quad \text{et} \quad W_{k-1}(z) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} P_{m-1}(z) P_{k-m}(z) \quad \text{si } k \geq 1.$$

$Q_n(z)$ est la **fonction de Legendre du deuxième type de degré k** .

Nous pouvons calculer quelques-unes des fonctions:

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1, & P_1(z) &= z, & P_2(z) &= (3z^2 - 1)/2, \\ P_3(z) &= (5z^3 - 3z)/2, & P_4(z) &= (35z^4 - 30z^2 + 3)/8, & P_5(z) &= (63z^5 - 70z^3 + 15z)/8 \\ Q_0(z) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{1-z} \right), & Q_1(z) &= \frac{z}{2} \ln \left(\frac{z+1}{1-z} \right) - 1, & Q_2(z) &= \frac{(3z^2-1)}{4} \ln \left(\frac{z+1}{1-z} \right) - \frac{(2z^2-1)}{2} \\ Q_3(z) &= \frac{(5z^3-3z)}{4} \ln \left(\frac{z+1}{1-z} \right) - \frac{(15z^2-4)}{6}, & Q_4(z) &= \frac{(35z^4-30z^2+3)}{16} \ln \left(\frac{z+1}{1-z} \right) - \frac{(105z^3-55z)}{24}. \end{aligned}$$

Nous avons aussi tracé à la figure [1] le graphe de $P_n(z)$ pour $n = 0, 1, \dots, 5$ et $-1 \leq z \leq 1$.

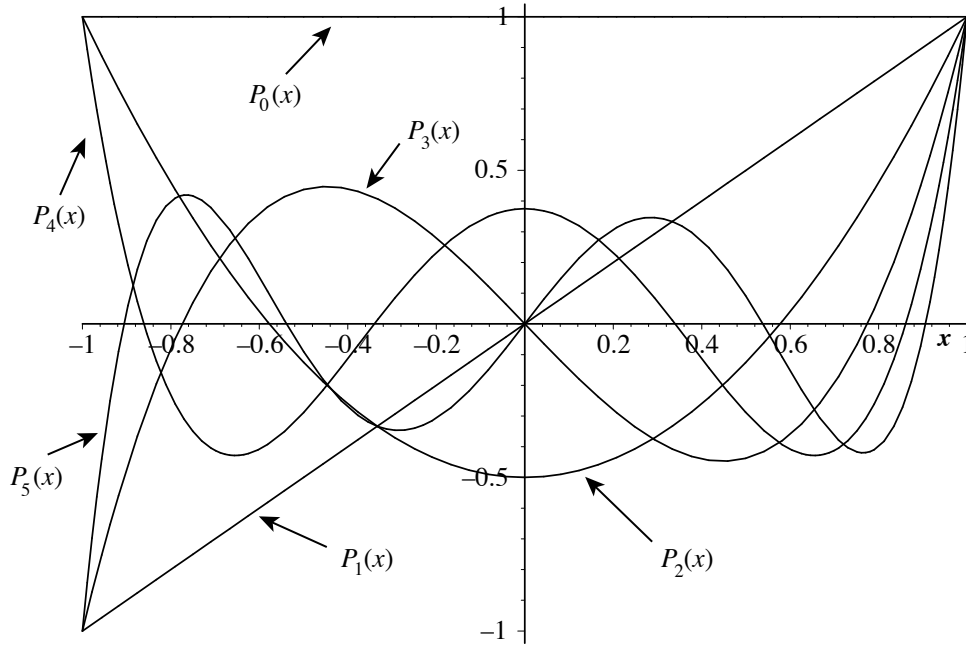


Figure [1]

Théorème 1 La solution générale de l'équation de Legendre d'ordre n :

$$(1 - z^2) \frac{d^2 f}{dz^2} - 2z \frac{df}{dz} + n(n+1)f = 0$$

est $AP_n(z) + BQ_n(z)$, où $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont respectivement le polynôme de Legendre et la fonction de Legendre du deuxième type de degré n .

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Il suffit de vérifier que $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont deux solutions linéairement indépendantes. Pour vérifier que ce sont des solutions, il faut calculer les dérivées première et seconde de ces fonctions et s'assurer que toutes ces fonctions satisfont l'équation de Legendre. Ceci est un exercice simple étant donné les expressions pour $P_n(z)$ et $Q_n(z)$. Pour vérifier que ces deux solutions sont bien linéairement indépendantes, il suffit de calculer le wronskien $W(P_n(z), Q_n(z))$ et de vérifier qu'il n'est pas nul. Il est possible de montrer que

$$W(P_n(z), Q_n(z)) = \begin{vmatrix} P_n(z) & Q_n(z) \\ P'_n(z) & Q'_n(z) \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-z^2)} \neq 0.$$

Si nous revenons à l'équation [6] avec $\nu = n$, alors nous avons que $G(w) = AP_n(w) + BQ_n(w)$. Mais comme nous voulons que la fonction $u(r, \phi)$ soit bornée, ceci a comme conséquence que la fonction $G(w)$ doit aussi être bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$. Comme $Q_n(w)$ n'est pas bornée sur $[-1, 1]$ et que $P_n(w)$ est bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$, alors $B = 0$. Donc G est égale à $A P_n(w)$ comme fonction de w et à $A P_n(\cos(\phi))$ comme fonction de ϕ . Ainsi pour chaque $n \in \mathbf{N}$, nous obtenons une solution $u(r, \phi) = a_n r^n P_n(\cos(\phi))$ du problème (*). Comme ce problème est linéaire et homogène, nous pouvons utiliser le principe de superposition.

Conséquemment

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos(\phi))$$

est une solution du problème

$$(*) \quad \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad \text{et} \quad u(r, \phi) \text{ est une fonction bornée,} \right.$$

Pour qu'une telle solution satisfasse le problème de départ, à savoir le problème (*) avec en plus la condition à la frontière $u(R, \phi) = f(\phi)$, il faut alors que

$$u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos(\phi)) = f(\phi).$$

En d'autres mots, il faut pouvoir écrire f en fonction des polynômes de Legendre.

Nous allons maintenant expliquer comment obtenir une telle expression. Les polynômes de Legendre forment un système orthogonal et il est aussi possible de calculer leur norme. Il nous faut un résultat préliminaire.

Lemme 1 Avec les notations précédentes, nous avons

a) $P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n]$. (formule de Rodrigues)

b) $\frac{d^k}{dz^k} [(z^2 - 1)^n] \Big|_{z=\pm 1} = 0$ si $k < n$.

Preuve: a) Calculons $\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n]$. À cause de la formule de développement du binôme, nous avons

$$(z^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} z^{2(n-k)}.$$

Si n est pair, i.e. $n = 2r$ avec $r \in \mathbf{N}$, alors $2n - 2k < n \Rightarrow r < k$. Si n est impair, i.e. $n = 2r + 1$, avec $r \in \mathbf{N}$, alors $2n - 2k < n \Rightarrow n < 2k \Rightarrow r < k$. De ceci, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n] &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} z^{2(n-k)} \right] \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} (2n-2k)(2n-2k-1) \cdots (2n-2k-n+1) z^{2(n-k)-n} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{n! (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} z^{n-2k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} z^{n-2k} \\ &= P_n(z) \end{aligned}$$

en comparant les deux formules. Ici $M = r$ dans les deux cas.

b) Nous avons par la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dz^k}[(z^2 - 1)^n] &= \frac{d^k}{dz^k}[(z - 1)^n(z + 1)^n] = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m! (k - m)!} \frac{d^m}{dz^m}[(z - 1)^n] \frac{d^{k-m}}{dz^{k-m}}[(z + 1)^n] \\ &= \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m! (k - m)!} \frac{n!}{(n - m)!} (z - 1)^{n-m} \frac{n!}{(n - k + m)!} (z + 1)^{n-k+m}.\end{aligned}$$

Dans cette somme, il est facile de vérifier que l'exposant de $(z - 1)$ est ≥ 1 et que l'exposant de $(z + 1)$ est aussi ≥ 1 , parce que $k < n$. De ceci, nous pouvons alors affirmer que

$$\left. \frac{d^k}{dz^k} [(z^2 - 1)^n] \right|_{z=\pm 1} = 0 \quad \text{si } k < n.$$

□

Proposition 1 Avec les notations précédentes, nous avons

a) $\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = 0$ si $m, n \in \mathbf{N}$ et $m \neq n$.

b) $\int_{-1}^1 P_n^2(z) dz = 2/(2n + 1)$ si $n \in \mathbf{N}$.

Preuve: a) Nous savons que $P_m(z)$ et $P_n(z)$ sont des solutions de l'équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dz} \left((1 - z^2) \frac{df}{dz} \right) + \lambda f = 0$$

pour $\lambda = m(m + 1)$ et $n(n + 1)$ respectivement. Dans ce problème de Sturm-Liouville, nous avons que $r(z) = (1 - z^2)$, $q(z) \equiv 0$, $p(z) \equiv 1$. En utilisant la proposition 1 du chapitre 10 et parce que $r(-1) = r(1) = 0$, nous avons l'orthogonalité des fonctions caractéristiques correspondant à des valeurs propres distinctes sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour la fonction poids $p(z) \equiv 1$. Mais ici $P_m(z)$ est une fonction caractéristique correspondant à la valeur propre $m(m + 1)$, alors que $P_n(z)$ est une fonction caractéristique correspondant à la valeur propre $n(n + 1)$. Comme $m \neq n$, alors $m(m + 1) \neq n(n + 1)$. En effet, $m(m + 1) - n(n + 1) = (m - n)(m + n + 1) \neq 0$ lorsque $m, n \in \mathbf{N}$ et $m \neq n$. Donc parce qu'il précède, nous obtenons que $\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = 0$.

b) Nous savons par le lemme 1 que

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n]. \quad (\text{formule de Rodrigues})$$

Si $S(z)$ est un polynôme en z , alors en utilisant l'intégration par parties plusieurs fois nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 S(z) P_n(z) dz &= \left(\frac{1}{2^n n!} \right) \int_{-1}^1 S(z) \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n] dz \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!} \right) \left\{ \left(S(z) \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z^2 - 1)^n] \right) \Big|_{z=-1}^{z=1} - \int_{-1}^1 \frac{dS}{dz} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z^2 - 1)^n] dz \right\} \\ &= - \left(\frac{1}{2^n n!} \right) \int_{-1}^1 \frac{dS}{dz} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z^2 - 1)^n] dz \\ &= - \left(\frac{1}{2^n n!} \right) \left\{ \left(\frac{dS}{dz} \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} [(z^2 - 1)^n] \right) \Big|_{z=-1}^{z=1} - \int_{-1}^1 \frac{d^2 S}{dz^2} \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} [(z^2 - 1)^n] dz \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!} \right) \int_{-1}^1 \frac{d^2 S}{dz^2} \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} [(z^2 - 1)^n] dz \\ &\vdots \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!} \right) \int_{-1}^1 \frac{d^n S}{dz^n} (z^2 - 1)^n dz.\end{aligned}$$

Mais si $S(z)$ est le polynôme $P_n(z)$ de degré n , alors

$$\frac{d^n S}{dz^n} = \frac{d^n P_n}{dz^n} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}.$$

Donc

$$\int_{-1}^1 P_n^2(z) dz = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!} \right) \left(\frac{(2n)!}{2^n(n!)} \right) \int_{-1}^1 (z^2 - 1)^n dz = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right) \int_{-1}^1 (1 - z^2)^n dz.$$

Cette dernière intégrale $\int_{-1}^1 (1 - z^2)^n dz$ peut être évaluée de plusieurs façons. Par exemple, nous pouvons utiliser la substitution $z = \sin(\theta)$ et alors

$$\int_{-1}^1 (1 - z^2)^n dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta$$

et ensuite d'évaluer cette dernière intégrale en intégrant par partie. Mais il est aussi facile de considérer la substitution $v = (z + 1)/2$, alors $dz = 2 dv$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - z^2)^n dz &= \int_{-1}^1 (1 - z)^n (1 + z)^n dz = 2 \int_0^1 (2v)^n (2 - 2v)^n dv \\ &= 2^{2n+1} \int_0^1 v^n (1 - v)^n dv = 2^{2n+1} B(n+1, n+1) \end{aligned}$$

où $B(p, q) = \int_0^1 v^{p-1} (1 - v)^{q-1} dv$ est la fonction bêta. Il est bien connu que cette fonction est reliée à la fonction gamma, i.e. $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$. Donc ici

$$B(n+1, n+1) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{(n!)(n!)}{(2n+1)!}$$

parce que $n \in \mathbf{N}$ et $\Gamma(m+1) = m!$ si $m \in \mathbf{N}$. Donc

$$\int_{-1}^1 (1 - z^2)^n dz = 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 P_n^2(z) dz = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right) \left(\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \right) = \frac{2}{(2n+1)}.$$

□

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour exprimer le potentiel à l'intérieur de la sphère.

Proposition 2 La solution formelle du problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad \text{où} \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

avec comme condition à la frontière $u(R, \phi) = f(\phi)$ et telle que la fonction $u(r, \phi)$ est bornée, est

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos(\phi))$$

où

$$a_n = \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos(\phi)) \sin(\phi) d\phi = \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw.$$

Ici $\tilde{f}(w)$ désigne la fonction f comme fonction de $w = \cos(\phi)$, i.e. $\tilde{f}(w) = f(\arccos(w))$.

Preuve: Nous avons vu que la solution formelle est de la forme

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos(\phi)) \quad \text{et qu'en plus} \quad u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos(\phi)) = f(\phi).$$

Si nous exprimons cette dernière égalité dans la variable $w = \cos(\phi)$, nous obtenons $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = \tilde{f}(w)$. À cause de la proposition 1, nous avons

$$\int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_m(w) dw = \int_{-1}^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w) \right) P_m(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \int_{-1}^1 P_n(w) P_m(w) dw = \frac{2a_m R^m}{(2m+1)}.$$

Nous obtenons donc

$$a_m = \frac{(2m+1)}{2R^m} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_m(w) dw = \frac{(2m+1)}{2R^m} \int_0^{\pi} f(\phi) P_m(\cos(\phi)) \sin(\phi) d\phi.$$

Cette dernière égalité est obtenue en substituant $w = \cos(\phi)$ et $dw = -\sin(\phi) d\phi$. $\square$

Il est aussi possible de considérer le problème du potentiel à l'extérieur de la sphère. En d'autres mots, de déterminer la solution $u = u(r, \phi)$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad \text{où} \quad R \leq r, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

avec comme condition à la frontière $u(R, \phi) = f(\phi)$ et, telle que la fonction $u(r, \phi) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$. La méthode de séparation de variables peut aussi être utilisée. Après une analyse du même type que ce que nous avons fait précédemment, nous obtenons

Proposition 3 La solution formelle du problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad \text{où} \quad R \leq r, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

avec comme condition à la frontière $u(R, \phi) = f(\phi)$ et, telle que la fonction $u(r, \phi) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$, est

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos(\phi))$$

où

$$b_n = \frac{(2n+1)}{2} R^{n+1} \int_0^{\pi} f(\phi) P_n(\cos(\phi)) \sin(\phi) d\phi = \frac{(2n+1)}{2} R^{n+1} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw.$$

Ici $\tilde{f}(w)$ désigne la fonction f comme fonction de $w = \cos(\phi)$, i.e. $\tilde{f}(w) = f(\arccos(w))$.

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Nous avons décrit le problème du potentiel dans un exemple provenant de l'électrostatique, mais nous aurions aussi pu décrire ce problème dans un autre contexte, celui de la température à l'équilibre à l'intérieur ou encore à l'extérieur d'une sphère étant donnée la température sur la sphère connue.

* * *

Exercice 11.1

Déterminer la solution formelle $u(r, \phi)$ du problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0 \quad \text{où} \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

avec comme condition à la frontière $u(R, \phi) = f(\phi)$ et, telle que la fonction $u(r, \phi)$ est bornée, si $f(\phi)$ est

a) $f(\phi) = \cos(3\phi)$; b) $f(\phi) = \sin(\phi) \sin(3\phi)$; c) $f(\phi) = \cos(4\phi)$; d) $f(\phi) = \sin(\phi) \sin(4\phi)$;

e) (†) $f(\phi) = \begin{cases} c, & \text{si } 0 \leq \phi < \pi/2; \\ 0, & \text{si } \phi = \pi/2; \\ -c, & \text{si } \pi/2 < \phi \leq \pi. \end{cases}$ où c est une constante.

Exercice 11.2

Montrer que la valeur de la solution formelle u du problème du potentiel à l'intérieur de la sphère (apparaissant à la proposition 2) au centre de la sphère est la valeur moyenne des valeurs de u sur la sphère.

Exercice 11.3

Soient $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ le disque de rayon R centré à l'origine et $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$, le cercle de rayon R centré à l'origine.

a) Montrer que la solution u formelle du problème suivant: u satisfait l'équation de Laplace sur le disque D , i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{où } (x, y) \in D,$$

avec comme condition à la frontière $u(x, y) = f(x, y)$ pour $(x, y) \in S$, où f est une fonction donnée définie sur S et u est une fonction bornée sur D , est

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \sin(n\theta) \quad (\text{en coordonnées polaires})$$

où $r \leq R$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad \text{si } n \geq 1.$$

Ici $\tilde{f}(\theta) = f(x, y)$ où θ est la coordonnée polaire du point (x, y) sur le cercle S . En d'autres mots, $\tilde{f}(\theta) = f(R \cos(\theta), R \sin(\theta))$.

Indice: Exprimer le problème en coordonnées polaires.

b) Montrer que la valeur de cette solution u au centre du disque est la valeur moyenne des valeurs de u sur le cercle.

CHAPITRE 12

Introduction aux méthodes numériques.

Dans ce chapitre, nous présenterons des méthodes nous permettant d'obtenir des solutions explicites d'équations aux dérivées partielles. Nous allons illustrer ceci pour le problème de la chaleur tel que formulé au chapitre 7. Dans ce cas, nous pouvons calculer exactement la solution étant donnée la température initiale connue. Nous serons ainsi en mesure de comparer la solution explicite obtenue des méthodes numériques avec la solution exacte et d'analyser l'erreur due à l'approximation liée aux méthodes numériques.

Rappelons premièrement le théorème du développement de Taylor pour des fonctions à valeurs réelles d'une seule variable réelle. Soient $n \in \mathbf{N}$, $f(x)$ une fonction dérivable $(n+1)$ fois dans un intervalle ouvert I contenant $x = x_0$ et $h \in \mathbf{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i + R_n \quad \text{où} \quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} h^{(n+1)}.$$

Par la suite, nous supposons toujours que $f(x)$ est suffisamment dérivable.

Ceci nous permet d'approximer $f(x_0 + h)$ lorsque $h \approx 0$. En effet, nous obtenons que

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i \quad (\text{éq. [1]})$$

et le terme d'erreur dans l'utilisation de cette approximation est

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} h^{(n+1)}.$$

De plus si $f^{(n+1)}(x)$ est continue dans un voisinage de x_0 , alors $f^{(n+1)}(\alpha) \approx f^{(n+1)}(x_0)$ et nous avons

$$R_n \approx \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} h^{(n+1)} \quad \Rightarrow \quad |R_n| \leq C h^{n+1} \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

L'équation [1] nous permet de formuler plusieurs approximations de la dérivée première $f'(x_0)$. Ainsi en prenant $h > 0$, disons $h = \Delta x > 0$,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) (\Delta x) \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

et nous dirons alors que

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

est l'approximation de $f'(x_0)$ par différence finie progressive. Nous pouvons évaluer le terme d'erreur E_p dans l'utilisation de cette approximation. E_p est obtenu par

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) (\Delta x) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2} (\Delta x)^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2} (\Delta x)$$

où α est compris entre x_0 et $x_0 + \Delta x$. Ainsi

$$E_p = -\frac{f^{(2)}(\alpha)}{2} (\Delta x) \quad \text{et} \quad |E_p| = \frac{|f^{(2)}(\alpha)|}{2} (\Delta x).$$

Par contre, si nous prenons $h < 0$, disons $h = -\Delta x$ avec $\Delta x > 0$, alors

$$f(x_0 - \Delta x) \approx f(x_0) - f'(x_0)(\Delta x) \Rightarrow f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

et nous dirons que

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

est l'approximation de $f'(x_0)$ par différence finie régressive. Nous pouvons aussi évaluer le terme d'erreur E_r dans l'utilisation de cette approximation. E_r est obtenu par

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f^{(2)}(\beta)}{2}(\Delta x)^2 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{f^{(2)}(\beta)}{2}(\Delta x)$$

où β est compris entre $x_0 - \Delta x$ et x_0 . Ainsi

$$E_r = \frac{f^{(2)}(\beta)}{2}(\Delta x) \quad \text{et} \quad |E_r| = \frac{|f^{(2)}(\beta)|}{2}(\Delta x).$$

Nous pouvons aussi faire la moyenne arithmétique de ces deux approximations de $f'(x_0)$ pour obtenir l'approximation de $f'(x_0)$ par différence finie centrée. Plus précisément, nous avons

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(\Delta x)^2 \quad \text{et} \\ f(x_0 - \Delta x) &\approx f(x_0) - f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième expression de la première, nous obtenons

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) \approx 2f'(x_0)(\Delta x) \Rightarrow f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2(\Delta x)}$$

et nous disons que

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2(\Delta x)}$$

est l'approximation de $f'(x_0)$ par différence finie centrée. Nous pouvons aussi évaluer le terme d'erreur E_c dans l'utilisation de cette approximation. Nous avons que

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + \frac{f^{(3)}(\alpha')}{6}(\Delta x)^3 \quad \text{et} \\ f(x_0 - \Delta x) &= f(x_0) - f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(\Delta x)^2 - \frac{f^{(3)}(\beta')}{6}(\Delta x)^3 \end{aligned}$$

où α' est compris entre x_0 et $x_0 + \Delta x$, alors que β' est compris entre $x_0 - \Delta x$ et x_0 . En soustrayant la deuxième équation de la première, nous obtenons

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) = 2f'(x_0)(\Delta x) + \left[\frac{f^{(3)}(\alpha') + f^{(3)}(\beta')}{6} \right] (\Delta x)^3$$

et conséquemment

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2(\Delta x)} - \left[\frac{f^{(3)}(\alpha') + f^{(3)}(\beta')}{12} \right] (\Delta x)^2$$

Donc

$$E_c = - \left[\frac{f^{(3)}(\alpha') + f^{(3)}(\beta')}{12} \right] (\Delta x)^2 \quad \text{et} \quad |E_c| = \frac{|f^{(3)}(\alpha') + f^{(3)}(\beta')|}{12} (\Delta x)^2.$$

Si $f^{(3)}(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, alors il existe $\gamma' \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ tel que

$$f^{(3)}(\gamma') = \frac{f^{(3)}(\alpha') + f^{(3)}(\beta')}{2}.$$

En effet, il suffit d'utiliser la connexité de l'intervalle $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, du fait que l'image d'un ensemble connexe par une fonction continue est connexe et que

$$\frac{f^{(3)}(\alpha') + f^{(3)}(\beta')}{2}$$

est le milieu du segment d'extrémités: $f^{(3)}(\alpha')$ et $f^{(3)}(\beta')$. Conséquemment

$$E_c = - \frac{f^{(3)}(\gamma')}{6} (\Delta x)^2 \quad \text{et} \quad |E_c| = \frac{|f^{(3)}(\gamma')|}{6} (\Delta x)^2.$$

Ces trois approximations de $f'(x_0)$ sont consistantes, i.e. si $\Delta x \rightarrow 0$, alors chacune de ces approximations par différence finie approche $f'(x_0)$.

Nous pouvons illustrer ceci dans un exemple. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ autour de $x_0 = 0$. Comme $f'(x) = 1/2\sqrt{1+x}$, alors $f'(0) = 1/2$. Si nous utilisons chacune des approximations ci-dessus pour $\Delta x = 0.1$, nous obtenons pour l'approximation par différence finie progressive

$$f'(0) \approx \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1.1} - 1}{0.1} = 0.4881$$

et l'erreur relative est 2.38%; pour l'approximation par différence finie régressive

$$f'(0) \approx \frac{f(0) - f(-\Delta x)}{\Delta x} = \frac{1 - \sqrt{0.9}}{0.1} = 0.513167$$

et l'erreur relative est 2.6334% et finalement pour l'approximation par différence finie centrée

$$f'(0) \approx \frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2(\Delta x)} = \frac{\sqrt{1.1} - \sqrt{0.9}}{2(0.1)} = 0.500628$$

et l'erreur relative est 0.1256%.

Ceci n'est pas trop surprenant parce que le terme d'erreur pour les approximations par différence finie progressive et régressive est de l'ordre de Δx , alors que celui de l'approximation par différence finie centrée est de l'ordre de $(\Delta x)^2$. Plus précisément, comme

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} \quad \text{et} \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}},$$

nous avons pour l'approximation par différence finie progressive

$$|E_p| = \left| \frac{-1}{4\sqrt{(1+\alpha)^3}} \right| \frac{\Delta x}{2} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq \Delta x \quad \Rightarrow \quad |E_p| \leq \frac{\Delta x}{8}.$$

Dans ce cas, l'erreur relative est

$$\left| \frac{E_p}{f'(0)} \right| = 2|E_p| \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{E_p}{f'(0)} \right| \leq \frac{\Delta x}{4}.$$

Cette dernière expression est inférieure à 2.5% lorsque $\Delta x = 0.1$. Pour l'approximation par différence finie régressive,

$$|E_r| = \left| \frac{-1}{4\sqrt{(1+\beta)^3}} \right| \frac{\Delta x}{2} \quad \text{avec} \quad -\Delta x \leq \beta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |E_r| \leq \frac{\Delta x}{8\sqrt{(1-\Delta x)^3}}.$$

Cette dernière expression est égale à 0.014640174353 lorsque $\Delta x = 0.1$. Dans ce cas, l'erreur relative est

$$\left| \frac{E_r}{f'(0)} \right| = 2|E_r| \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{E_r}{f'(0)} \right| \leq \frac{\Delta x}{4\sqrt{(1-\Delta x)^3}}.$$

Cette dernière expression est inférieure à 2.93% lorsque $\Delta x = 0.1$. Finalement pour l'approximation par différence finie centrée,

$$|E_c| = \left| \frac{3}{8\sqrt{(1+\gamma')^5}} \right| \frac{(\Delta x)^2}{6} \quad \text{avec} \quad -\Delta x \leq \gamma' \leq \Delta x \quad \Rightarrow \quad |E_c| \leq \frac{(\Delta x)^2}{16\sqrt{(1-\Delta x)^5}}.$$

Cette dernière expression est égale à 0.00081334302 lorsque $\Delta x = 0.1$. Dans ce cas, l'erreur relative est

$$\left| \frac{E_c}{f'(0)} \right| = 2|E_c| \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{E_c}{f'(0)} \right| \leq \frac{(\Delta x)^2}{8\sqrt{(1-\Delta x)^5}}.$$

Cette dernière expression est inférieure à 0.163% lorsque $\Delta x = 0.1$.

À partir des bornes supérieures obtenues pour le terme d'erreur, nous pourrions déterminer Δx pour obtenir une approximation de $f'(0)$ avec le degré de précision désiré.

Il est aussi possible d'approximer la dérivée seconde $f''(x_0)$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(\Delta x)^3 + \frac{f^{(4)}(\alpha'')}{24}(\Delta x)^4 \quad \text{et} \\ f(x_0 - \Delta x) &= f(x_0) - f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(\Delta x)^2 - \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(\Delta x)^3 + \frac{f^{(4)}(\beta'')}{24}(\Delta x)^4 \end{aligned}$$

où $\alpha'' \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ et $\beta'' \in [x_0 - \Delta x, x_0]$. En additionnant ces deux équations et en laissant tomber les dérivées quatrièmes, nous obtenons

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) \approx 2f(x_0) + f^{(2)}(x_0)(\Delta x)^2 \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}.$$

Nous dirons que

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

est l'approximation par différence finie centrée de la dérivée seconde $f''(x_0)$. Il est aussi possible de déterminer le terme d'erreur $E_c^{(2)}$ dans l'utilisation de cette approximation. Nous avons en additionnant les deux équations ci-dessus

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + f^{(2)}(x_0)(\Delta x)^2 + \left[\frac{f^{(4)}(\alpha'') + f^{(4)}(\beta'')}{24} \right] (\Delta x)^4$$

et conséquemment

$$f^{(2)}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \left[\frac{f^{(4)}(\alpha'') + f^{(4)}(\beta'')}{24} \right] (\Delta x)^2.$$

Ainsi le terme d'erreur est

$$E_c^{(2)} = - \left[\frac{f^{(4)}(\alpha'') + f^{(4)}(\beta'')}{24} \right] (\Delta x)^2 \quad \text{et} \quad |E_c^{(2)}| = \frac{|f^{(4)}(\alpha'') + f^{(4)}(\beta'')|}{24} (\Delta x)^2.$$

Si $f^{(4)}(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, alors il existe $\lambda'' \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ tel que

$$f^{(4)}(\lambda'') = \frac{f^{(4)}(\alpha'') + f^{(4)}(\beta'')}{2}$$

et le terme d'erreur est

$$E_c^{(2)} = - \left[\frac{f^{(4)}(\lambda'')}{12} \right] (\Delta x)^2 \quad \text{et} \quad |E_c^{(2)}| = \frac{|f^{(4)}(\lambda'')|}{12} (\Delta x)^2.$$

Jusqu'à présent, nous avons décrit des approximations des dérivées première et seconde pour une fonction d'une seule variable. Mais bien entendu, nous pouvons aussi utiliser ces approximations pour les dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables. Ceci est possible à cause de la définition de ces dérivées dans laquelle toutes les variables sont constantes sauf celle relativement à laquelle nous dérivons. Par exemple, si $u = u(x, y)$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \approx \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{2(\Delta x)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \approx \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 - \Delta y)}{2(\Delta y)}$$

où $\Delta x > 0$ et $\Delta y > 0$, lorsque nous utilisons les approximations par différence finie centrée.

Mais nous aurions tout aussi bien pu utiliser les autres approximations. Ce choix dépendra du problème à étudier. Dans tous les cas, nous pouvons déterminer le terme d'erreur. Nous allons maintenant illustrer comment ces approximations peuvent être utilisées pour le problème de la chaleur étudié au chapitre 7, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0 \quad \text{avec} \\ u(0, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \\ u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et} \\ u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell] \end{array} \right.$$

Fixons $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$. Alors par ce que nous avons vu précédemment

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, \alpha) \quad \text{avec } t \leq \alpha \leq t + \Delta t$$

si nous voulons utiliser l'approximation par différence finie progressive pour

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta, t) \quad \text{avec } x - \Delta x \leq \beta \leq x + \Delta x$$

si nous voulons utiliser l'approximation par différence finie centrée pour

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Donc l'équation de la chaleur devient

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = c^2 \left(\frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} \right) + E$$

où le terme d'erreur de discrétisation E est

$$E = \frac{(\Delta t)}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, \alpha) \right] - \frac{c^2(\Delta x)^2}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta, t) \right].$$

Nous avons supposé ci-dessus que les dérivées partielles sont continues. Ainsi nous avons comme approximation

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \approx c^2 \left(\frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} \right).$$

Nous cherchons à déterminer une approximation $\tilde{u}(x, t)$ de la solution exacte $u(x, t)$. Bien entendu, nous voulons que cette approximation $\tilde{u}(x, t)$ soit le plus près de la solution exacte $u(x, t)$. Il est alors naturel d'exiger que cette approximation $\tilde{u}(x, t)$ satisfasse l'équation

$$\frac{\tilde{u}(x, t + \Delta t) - \tilde{u}(x, t)}{\Delta t} = c^2 \left(\frac{\tilde{u}(x + \Delta x, t) - 2\tilde{u}(x, t) + \tilde{u}(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} \right). \quad (\text{éq. [2]})$$

Plutôt que de déterminer $\tilde{u}(x, t)$ pour tout $x \in [0, \ell]$ et $t \geq 0$, nous allons résoudre l'équation [2] pour les points d'un maillage de notre domaine.

Subdivisons l'intervalle $[0, \ell]$ en N sous-intervalles égaux de longueur $\Delta x = \ell/N$. Les extrémités de ces sous-intervalles sont $x_0 = 0$, $x_1 = (\Delta x)$, $x_2 = 2(\Delta x)$, $\dots$, $x_i = i(\Delta x)$, $\dots$, $x_N = N(\Delta x) = \ell$. De façon similaire, nous pouvons subdiviser l'intervalle $[0, \infty[$ en sous-intervalles égaux de longueur Δt . Dans ce cas, le nombre de sous-intervalles est infini et les extrémités de ces sous-intervalles sont $t_0 = 0$, $t_1 = (\Delta t)$, $t_2 = 2(\Delta t)$, $\dots$, $t_j = j(\Delta t)$, $\dots$. Ainsi nous obtenons un maillage de notre domaine dont les points sont (x_i, t_j) pour $0 \leq i \leq N$ et $j \geq 0$.

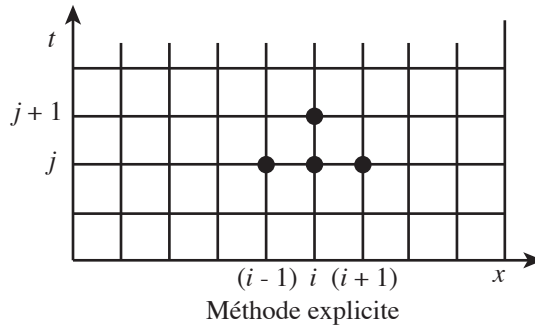
Posons $\tilde{u}(x_i, t_j) = U_i^{(j)}$ où $0 \leq i \leq N$ et $j \geq 0$. Dans ce cas, l'équation [2] devient pour les points (x_i, t_j) du maillage

$$\frac{U_i^{(j+1)} - U_i^{(j)}}{\Delta t} = c^2 \left(\frac{U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}}{(\Delta x)^2} \right) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq (N-1), j \geq 0$$

Cette dernière équation nous permet de calculer $U_i^{(j+1)}$ en fonction de $U_k^{(j)}$ pour $k = (i-1), i, (i+1)$. En effet,

$$U_i^{(j+1)} = U_i^{(j)} + \left[\frac{c^2(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \right] (U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}). \quad (\text{éq. [3]})$$

Nous avons illustré ci-dessous les points du maillage qui interviennent dans cette équation [3].



De plus il nous est possible de préciser les valeurs de $U_i^{(j)}$ lorsque $j = 0$ ou encore lorsque $i = 0$ et $i = N$ pour tenir compte des conditions au bord et de la condition initiale. Parce que $u(0, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, alors nous posons comme condition $U_0^{(j)} = 0$ pour tout $j \geq 0$. Parce que $u(\ell, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, alors nous posons comme condition $U_N^{(j)} = 0$ pour tout $j \geq 0$. Finalement $u(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in [0, \ell]$, alors nous posons comme condition $U_i^{(0)} = f(x_i)$ pour tout $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

Si nous tenons compte de ces valeurs pour les points au bord du maillage et de l'équation [3], nous pouvons complètement déterminer les valeurs $U_i^{(j)}$ et cette solution est unique. Nous avons ainsi une méthode explicite. Ce qualificatif “explicite” sera mieux compris lorsque nous décrirons plus tard une méthode implicite, par exemple celle de Crank-Nicolson.

Nous allons illustrer ceci dans l'exemple suivant. Considérons le problème:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad \text{avec}$$

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(1, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et}$$

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25; \\ (x - 0.25), & \text{si } 0.25 \leq x \leq 0.5; \\ (0.75 - x), & \text{si } 0.5 \leq x \leq 0.75; \\ 0, & \text{si } 0.75 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell].$$

Ici $\ell = 1$ et $c = 1$. Il est possible de déterminer la solution exacte de ce problème avec les résultats obtenus au chapitre 7. Nous obtenons ainsi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \left[-\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right] \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

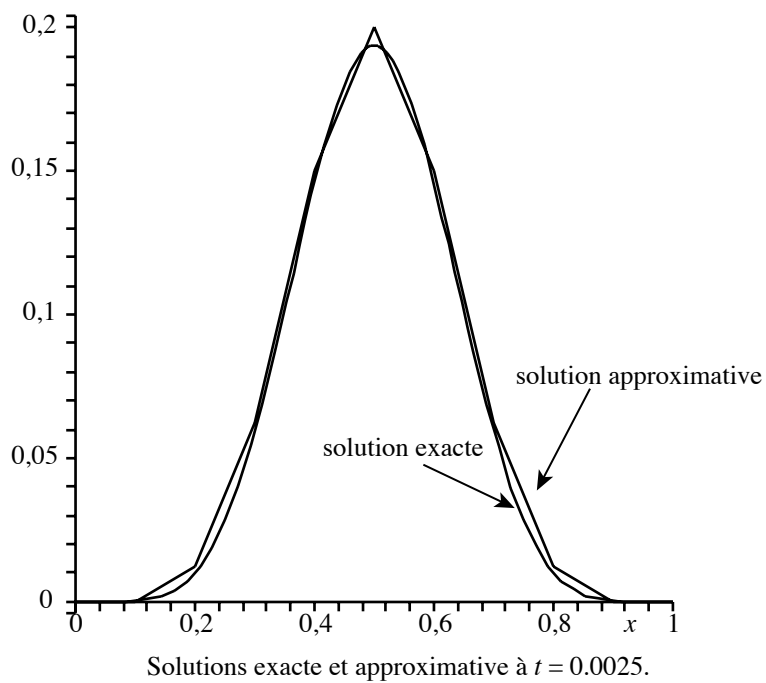
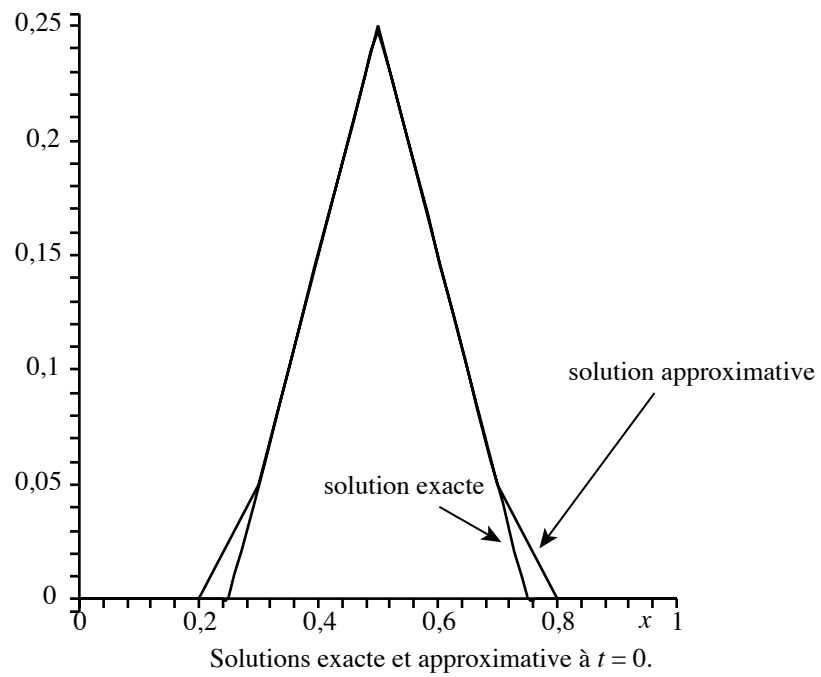
Pour le calcul des valeurs $U_i^{(j)}$, il nous faut fixer Δx et Δt . Prenons $\Delta x = 0.1$ et $\Delta t = 0.0025$, alors l'équation [3] devient dans ce cas particulier

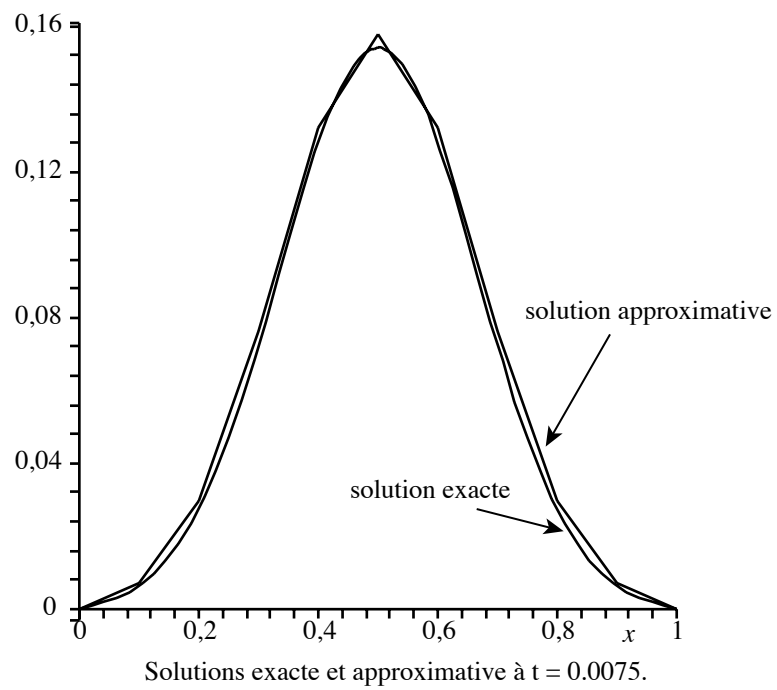
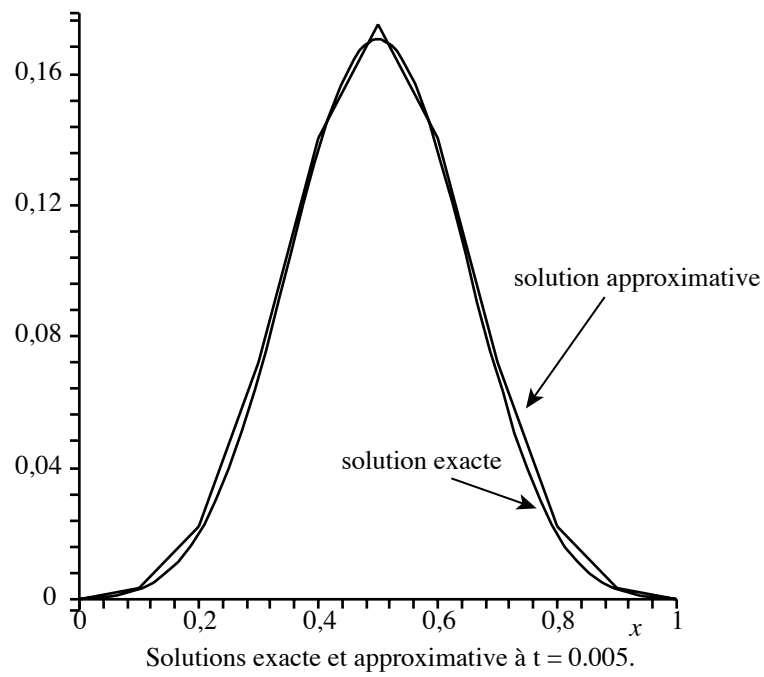
$$U_i^{(j+1)} = U_i^{(j)} + \left[\frac{1^2 (0.0025)}{(0.1)^2} \right] (U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}) = 0.25U_{i+1}^{(j)} + 0.5U_i^{(j)} + 0.25U_{i-1}^{(j)}.$$

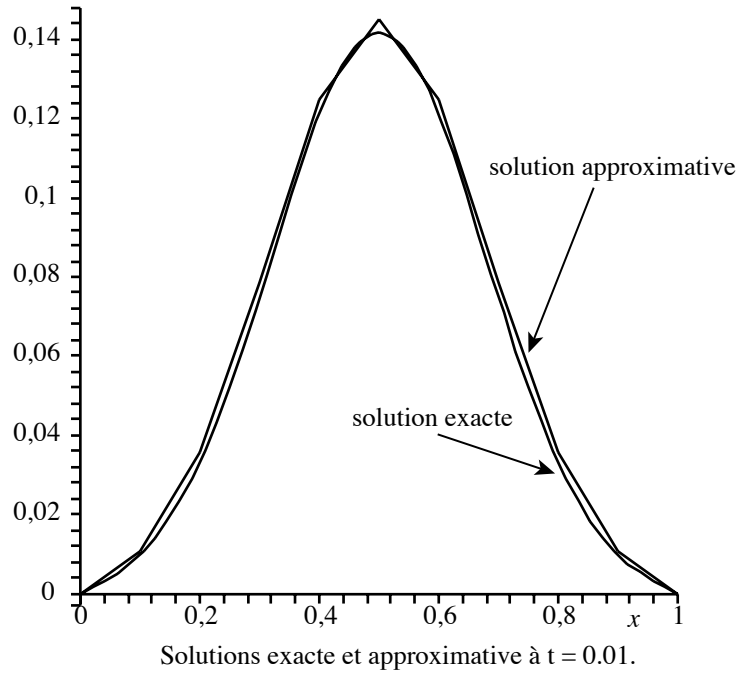
À cette équation, il nous faut aussi ajouter les conditions $U_0^{(j)} = U_{10}^{(j)} = 0$ pour $j \geq 0$ et $U_i^{(0)} = f(i/10)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$. Nous obtenons ainsi le tableau suivant des valeurs des $U_i^{(j)}$.

i	$U_i^{(0)}$	$U_i^{(1)}$	$U_i^{(2)}$	$U_i^{(3)}$	$U_i^{(4)}$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0.003125	0.00703125	0.0109375
2	0	0.0125	0.021875	0.0296875	0.003574219
3	0.05	0.0625	0.071875	0.0765625	0.07871094
4	0.15	0.15	0.140625	0.13203125	0.12460938
5	0.25	0.2	0.175	0.1578125	0.14492188
6	0.15	0.15	0.140625	0.13203125	0.12460938
7	0.05	0.0625	0.071875	0.0765625	0.07871094
8	0	0.0125	0.021875	0.0296875	0.003574219
9	0	0	0.003125	0.00703125	0.0109375
10	0	0	0	0	0

En traçant les graphes de la solution exacte pour les valeurs de t suivantes: $t = 0$, $t = \Delta t = 0.0025$, $t = 2(\Delta t) = 0.005$, $t = 3(\Delta t) = 0.0075$ et $t = 4(\Delta t) = 0.01$ et en comparant avec les valeurs des $U_i^{(j)}$ ci-dessus, nous vérifions que ces dernières sont de bonnes approximations.







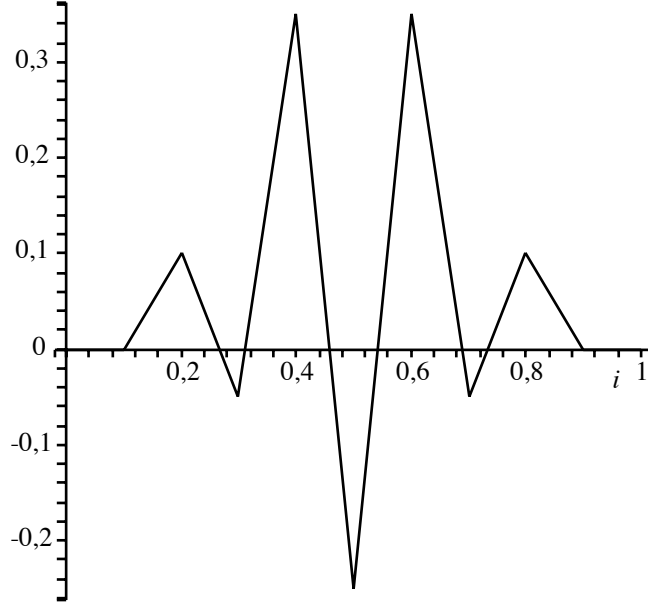
Nous pourrions penser que si Δx et Δt sont presque nuls, l'approximation devrait être bonne. Cependant ceci n'est pas suffisant. Il faut aussi tenir compte d'un problème d'instabilité dans ces situations. Nous allons maintenant illustrer ce phénomène. Considérons toujours le même problème. Mais si, pour le calcul des valeurs $U_i^{(j)}$, nous avons fixé $\Delta x = 0.1$ et $\Delta t = 0.01$, alors l'équation [3] devient dans ce cas particulier

$$U_i^{(j+1)} = U_i^{(j)} + \left[\frac{1^2 (0.01)}{(0.1)^2} \right] (U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}) = U_{i+1}^{(j)} - U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}.$$

Nous obtenons ainsi le tableau suivant des valeurs des $U_i^{(j)}$.

i	$U_i^{(0)}$	$U_i^{(1)}$	$U_i^{(2)}$	$U_i^{(3)}$	$U_i^{(4)}$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0.05	0	0.1
2	0	0.05	0.05	0.1	-0.15
3	0.05	0.1	0.1	-0.05	0.5
4	0.15	0.15	0	0.35	-0.65
5	0.25	0.05	0.25	-0.25	0.95
6	0.15	0.15	0	0.35	-0.65
7	0.05	0.1	0.1	-0.05	0.5
8	0	0.05	0.05	0.1	-0.15
9	0	0	0.05	0	0.1
10	0	0	0	0	0

Ces valeurs ne peuvent correspondre à notre problème. Nous devrions voir une décroissance exponentielle et ce n'est pas du tout ce qui se passe pour ces valeurs. Pour illustrer ceci, nous avons tracé le graphe de $U_i^{(3)}$ ci-dessous.



Grphe de $U_i^{(3)}$

Il y a là un phénomène d'instabilité, qui est associé à la valeur prise par $\sigma = c^2(\Delta t)/(\Delta x)^2$. Nous allons maintenant expliquer les raisons de cette instabilité et sa relation avec σ .

Pour bien analyser la solution approximative $U_i^{(j)}$, il faut revenir à l'équation[3] et d'obtenir la solution générale du problème intermédiaire ($\clubsuit$) suivant:

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} (U_i^{(j+1)} - U_i^{(j)}) = U_i^{(j)} + \sigma(U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}) \\ \text{avec les conditions } U_0^{(j)} = 0 \text{ et } U_N^{(j)} = 0 \text{ pour tout } j \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons laissé de côté la condition initiale $U_i^{(0)} = f(i\Delta x)$. Nous ajouterons celle-ci plus tard à notre analyse.

L'équation de différences finies ci-dessus est linéaire, i.e. les combinaisons linéaires de deux solutions de l'équation sont aussi des solutions. Pour résoudre le problème ($\clubsuit$) ci-dessus, il est possible d'utiliser une variante de la méthode de séparation de variables pour obtenir des solutions et ensuite de considérer les combinaisons linéaires de ces solutions. Nous allons maintenant développer ceci.

Considérons des solutions non triviales du problème ($\clubsuit$) ci-dessus de la forme $U_i^{(j)} = F(i)G(j)$, où $F: \{0, 1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbf{R}$ et $G: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. Après avoir substitué ceci dans l'équation, nous obtenons

$$F(i) (G(j+1) - G(j)) = \sigma (F(i+1) - 2F(i) + F(i-1)) G(j) \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq (N-1), j \geq 0.$$

Si nous divisons les deux côtés de cette dernière équation par $\sigma F(i)G(j)$, nous obtenons

$$\frac{G(j+1) - G(j)}{\sigma G(j)} = \frac{F(i+1) - 2F(i) + F(i-1)}{F(i)} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq (N-1), j \geq 0.$$

Le terme de gauche est une fonction de j , alors que celui de droite est une fonction de i . Pour que cette dernière équation soit possible, il faut que chacun de ces termes soit constant. Donc

$$\frac{G(j+1) - G(j)}{\sigma G(j)} = \frac{F(i+1) - 2F(i) + F(i-1)}{F(i)} = \lambda \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq (N-1), j \geq 0$$

pour un λ et nous avons ainsi deux équations à différences finies

$$\left\{ \begin{array}{ll} G(j+1) - (1 + \sigma\lambda)G(j) = 0 & \text{pour tout } j \geq 0 \\ F(i+1) - (2 + \lambda)F(i) + F(i-1) = 0 & \text{pour tout } 1 \leq i \leq (N-1) \end{array} \right.$$

Si nous considérons les conditions au bord $U_0^{(j)} = 0$ et $U_N^{(j)} = 0$ pour tout $j \geq 0$, alors nous pouvons déduire de ces conditions que $F(0) = 0$ et $F(N) = 0$. Nous avons donc à résoudre le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} G(j+1) - (1 + \sigma\lambda)G(j) = 0 & \text{pour tout } j \geq 0 \\ F(i+1) - (2 + \lambda)F(i) + F(i-1) = 0 & \text{pour tout } 1 \leq i \leq (N-1) \\ \text{avec } F(0) = 0 \text{ et } F(N) = 0. \end{array} \right.$$

Nous devons maintenant rappeler que la solution générale d'une relation de récurrence d'ordre 2 de la forme $H(i+2) + aH(i+1) + bH(i) = 0$ pour tout $i \geq 0$, où $a, b \in \mathbf{R}$, est obtenue en considérant les racines du polynôme $x^2 + ax + b$. Il y a trois cas à considérer:

- 1) Si $x^2 + ax + b$ a deux racines réelles distinctes: r_1, r_2 , alors la solution générale de $H(i+2) + aH(i+1) + bH(i) = 0$ est $H(i) = Ar_1^i + Br_2^i$, où A et B sont des constantes.
- 2) Si $x^2 + ax + b$ a une racine réelle double: r , alors la solution générale de $H(i+2) + aH(i+1) + bH(i) = 0$ est $H(i) = Ar^i + B i r^i$, où A et B sont des constantes.
- 3) Si $x^2 + ax + b$ a deux racines complexes non réelles: r_1, r_2 , alors celles-ci sont conjuguées et de la forme $r_1 = \rho \exp(\sqrt{-1}\theta)$, $r_2 = \rho \exp(-\sqrt{-1}\theta)$, où $\rho \in \mathbf{R}, \rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$ et, dans ce cas, la solution générale de $H(i+2) + aH(i+1) + bH(i) = 0$ est $H(i) = A\rho^i \cos(i\theta) + B\rho^i \sin(i\theta)$, où A et B sont des constantes.

Si maintenant nous revenons au système à différences finies ci-dessus, il faut alors considérer le polynôme $x^2 - (2 + \lambda)x + 1$ pour résoudre l'équation $F(i+1) - (2 + \lambda)F(i) + F(i-1) = 0$. Le polynôme $x^2 - (2 + \lambda)x + 1$ a comme racines:

$$r_1 = \frac{(2 + \lambda) + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{(2 + \lambda) - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2}.$$

Si $\lambda < -4$ ou $\lambda > 0$, alors r_1 et r_2 sont deux racines réelles distinctes et la solution générale de $F(i+1) - (2 + \lambda)F(i) + F(i-1) = 0$ est $F(i) = Ar_1^i + Br_2^i$. Mais si nous tenons compte maintenant des conditions au bord, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0) = A + B = 0 \\ F(N) = Ar_1^N + Br_2^N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = B = 0.$$

En effet, nous avons que $r_1 \neq r_2$ et $r_1 \neq -r_2$. Dans ce dernier cas, c'est parce que $r_1 + r_2 = (2 + \lambda)$ et $\lambda \neq -2$. Maintenant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1^N & r_2^N \end{vmatrix} = r_2^N - r_1^N = r_1^N \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^N - 1 \right] \neq 0$$

car $r_1 \neq 0$ et $(r_2/r_1)^N = 1 \Rightarrow r_2 = \pm r_1$. Mais ceci est absurde. Nous devons ainsi exclure le cas où $\lambda < -4$ ou $\lambda > 0$.

Si $\lambda = -4$ ou $\lambda = 0$, alors $r_1 = r_2 = r$ est une racine réelle double et la solution générale de $F(i+1) - (2 + \lambda)F(i) + F(i-1) = 0$ est $F(i) = Ar^i + B i r^i$. Mais si nous tenons compte maintenant des conditions au bord, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0) = A = 0 \\ F(N) = Ar^N + B N r^N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0 \text{ et } B r^N = 0 \Rightarrow A = B = 0.$$

En effet, $r = -1$ ou 1 et $r \neq 0$.

Il nous reste à considérer le cas où $-4 < \lambda < 0$. Alors r_1 et r_2 sont deux racines complexes distinctes non réelles conjuguées. Dans ce cas, ces racines sont de la forme $r_1 = \rho \exp(\sqrt{-1} \theta)$ et $r_2 = \rho \exp(-\sqrt{-1} \theta)$. Nous pouvons être plus précis pour ρ . En effet,

$$\rho = \sqrt{\frac{(2 + \lambda)^2 + (-\lambda^2 - 4\lambda)}{4}} = 1$$

Parce que $\rho = 1$, nous obtenons que la solution générale de $F(i + 1) - (2 + \lambda)F(i) + F(i - 1) = 0$ est $F(i) = A \cos(i\theta) + B \sin(i\theta)$. Mais si nous tenons compte des conditions au bord, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0) = A = 0 \\ F(N) = A \cos(N\theta) + B \sin(N\theta) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0; \\ B \sin(N\theta) = 0. \end{array} \right\}$$

Comme nous cherchons à déterminer une solution non triviale et que $A = 0$, nous pouvons supposer que $B \neq 0$. Ainsi nous obtenons que $\sin(N\theta) = 0$. Conséquemment $\theta = (n\pi/N)$ où $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ et nous obtenons que $F(i) = B \sin(n\pi i/N)$. De plus nous pouvons calculer $\lambda = \lambda_n$ correspondant à cet angle θ . En effet,

$$\frac{(2 + \lambda) + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2} = \exp\left(\frac{n\pi\sqrt{-1}}{N}\right) \Rightarrow \frac{(2 + \lambda)}{2} = \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) \Rightarrow \lambda_n = 2 \left[\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) - 1 \right].$$

Comme $-4 < \lambda = \lambda_n < 0$, nous pouvons alors ajouter la condition: $n \not\equiv 0 \pmod{N}$

Avant de considérer l'équation $G(j + 1) - (1 + \sigma\lambda_n)G(j) = 0$, rappelons que la solution générale d'une relation de récurrence d'ordre 1 de la forme $H(i + 1) = aH(i) + b$ est

$$H(i) = \begin{cases} A' a^i + b \left(\frac{a^i - 1}{a - 1} \right), & \text{si } a \neq 1; \\ A' + bi, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant utiliser cette dernière remarque. Notons premièrement que $(1 + \sigma\lambda_n) \neq 1$. Sinon $\sigma\lambda_n = 0$ et $\lambda_n < 0 \Rightarrow \sigma = 0$. Ceci est absurde, car $\Delta t, \Delta x$ et c sont > 0 . Nous pouvons donc écrire que $G(j) = A' (1 + \sigma\lambda_n)^j$.

Notons $(1 + \sigma\lambda_n)$ par κ_n . Il est possible de calculer κ_n :

$$\kappa_n = (1 + \sigma\lambda_n) = \left(1 - 2\sigma \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) \right) \right)$$

Pour chaque $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ et $n \not\equiv 0 \pmod{N}$, nous obtenons donc des solutions du problème (♣):

$$U_i^{(j)} = a_n \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) (\kappa_n)^j \quad \text{où } a_n \text{ est une constante.}$$

Il est possible de restreindre les valeurs de n pour obtenir une base des solutions. Plus précisément, nous pouvons nous restreindre aux valeurs de n entre 1 et $N - 1$.

Finalement nous obtenons que la solution générale du problème (♣) est

$$U_i^{(j)} = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) (\kappa_n)^j$$

Si nous ajoutons la condition initiale $U_i^{(0)} = f(x_i)$, alors nous pouvons déterminer les coefficients a_n en considérant le système de $(N - 1)$ équations linéaires à $(N - 1)$ inconnues:

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_n \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) = f(x_i) \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, (N - 1).$$

Lemme 1 Le déterminant D de la matrice $n \times n$ suivante:

$$A = \begin{pmatrix} \sin(x) & \sin(2x) & \cdots & \sin(qx) & \cdots & \sin(nx) \\ \sin(2x) & \sin(4x) & \cdots & \sin(2qx) & \cdots & \sin(2nx) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(px) & \sin(2px) & \cdots & \sin(pqx) & \cdots & \sin(pnx) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(nx) & \sin(2nx) & \cdots & \sin(nqx) & \cdots & \sin(n^2x) \end{pmatrix}$$

est

$$D = \det(A) = 2^{n(n-1)/2} \left[\prod_{i=1}^n \sin(ix) \right] \left[\prod_{1 \leq j < k \leq n} (\cos(kx) - \cos(jx)) \right].$$

En particulier, ce déterminant ne s'annule pas si $x = \pi/N$ et $n = N - 1$.

Esquisse de preuve: Nous n'allons qu'esquisser cette preuve. Il faut premièrement noter qu'en utilisant la formule de de Moivre:

$$\left(\cos(\theta) + \sin(\theta)\sqrt{-1} \right)^k = \left(\cos(k\theta) + \sin(k\theta)\sqrt{-1} \right),$$

nous pouvons montrer que $\sin(k\theta) = \sin(\theta)P_k(\cos(\theta))$, où P_k est un polynôme de degré $(k-1)$ dont le coefficient de la plus grande puissance, celle de degré $(k-1)$, est 2^{k-1} . Par exemple,

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta) \left[2 \cos(\theta) \right], \quad \sin(3\theta) = \sin(\theta) \left[4 \cos^2(\theta) - 1 \right] \quad \text{et} \quad \sin(4\theta) = \sin(\theta) \left[8 \cos^3(\theta) - 4 \cos(\theta) \right].$$

Si nous considérons la p^e ligne, nous obtenons que

$$\left(\sin(px), \sin(2px), \dots, \sin(pqx), \dots, \sin(pnx) \right) = \sin(px) \left(1, P_2(\cos(px)), \dots, P_q(\cos(px)), \dots, P_n(\cos(px)) \right).$$

En factorisant $\sin(px)$ de la p^e ligne et en faisant des opérations colonnes, nous obtenons que le déterminant recherché D est $\prod_{1 \leq i \leq n} \sin(ix)$ fois le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cos(x) & \cdots & 2^{q-1} \cos^{q-1}(x) & \cdots & 2^{n-1} \cos^{n-1}(x) \\ 1 & 2 \cos(2x) & \cdots & 2^{q-1} \cos^{q-1}(2x) & \cdots & 2^{n-1} \cos^{n-1}(2x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \cos(px) & \cdots & 2^{q-1} \cos^{q-1}(px) & \cdots & 2^{n-1} \cos^{n-1}(px) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \cos(nx) & \cdots & 2^{q-1} \cos^{q-1}(nx) & \cdots & 2^{n-1} \cos^{n-1}(nx) \end{pmatrix}$$

Mais il est facile d'obtenir le déterminant de cette dernière matrice. Il s'agit de

$$2^{1+2+\cdots+(n-1)} = 2^{n(n-1)/2} \times \text{déterminant de Vandermonde}$$

évalué aux valeurs $x_1 = \cos(x)$, $x_2 = \cos(2x)$, $\dots$, $x_n = \cos(nx)$. Ce déterminant est bien connu et nous obtenons finalement que

$$D = 2^{n(n-1)/2} \left[\prod_{i=1}^n \sin(ix) \right] \left[\prod_{1 \leq j < k \leq n} \left(\cos(kx) - \cos(jx) \right) \right].$$

Pour terminer la preuve du lemme, il suffit de noter que si $x = (\pi/N)$ et $n = N - 1$, chacun des termes

$$\sin\left(\frac{i\pi}{N}\right) \neq 0 \quad \text{si } i = 1, 2, \dots, (N-1) \quad \text{et} \quad \left(\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) - \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) \right) \neq 0 \quad \text{si } 1 \leq j < k \leq (N-1)$$

□

Comme nous voulons que la solution décroisse exponentiellement, peu importe le choix de la condition initiale, une condition nécessaire pour ceci est que $|\kappa_n| < 1$ pour $n = 1, 2, \dots, (N-1)$. Sinon nous aurions pour certaines fonctions $f(x)$ des solutions comportant des oscillations très grandes pour des j suffisamment grands.

Nous dirons donc que notre méthode numérique est **stable** si $|\kappa_n| < 1$ pour tout $n = 1, 2, \dots, (N-1)$. Sinon elle est **instable**. Comme

$$\kappa_n = \left(1 - 2\sigma \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) \right) \right)$$

et $\sigma > 0$, nous avons toujours $\kappa_n < 1$ pour $n = 1, 2, \dots, (N-1)$. Pour la stabilité de notre méthode, nous devons donc avoir que $\kappa_n > -1$. Ainsi

$$\kappa_n = \left(1 - 2\sigma \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) \right) \right) > -1 \quad \Rightarrow \quad \sigma < \frac{1}{\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) \right)} \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \dots, (N-1).$$

Le terme de droite de cette dernière inégalité décroît avec n . Il suffit alors que

$$\sigma < \frac{1}{\left(1 - \cos\left(\frac{(N-1)\pi}{N}\right) \right)}$$

Lorsque N est grand, nous avons que $\cos((N-1)\pi/N) \approx -1$. Nous avons en fait que

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\left(1 - \cos\left(\frac{(N-1)\pi}{N}\right) \right)} \quad \text{pour tout } N \in \mathbf{N}, N > 0.$$

Si nous prenons $\sigma \leq (1/2)$, alors notre méthode numérique sera stable. Dans nos exemples numériques précédents, nous avons premièrement

$$\sigma = \frac{1^2 (0.0025)}{(0.1)^2} = \frac{1}{4} \quad \text{si } \Delta x = 0.1 \text{ et } \Delta t = 0.0025$$

et nos calculs illustraient la stabilité; alors que

$$\sigma = \frac{1^2 (0.01)}{(0.1)^2} = 1 \quad \text{si } \Delta x = 0.1 \text{ et } \Delta t = 0.01$$

dans la deuxième situation et nos calculs illustraient bien l'instabilité.

Nous devons considérer aussi la question de la convergence de la solution numérique. Fixons $\sigma = c^2 (\Delta t)/(\Delta x)^2$ dans notre méthode numérique. L'équation [3] est alors

$$U_i^{(j+1)} = U_i^{(j)} + \sigma (U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)})$$

et considérons des maillages de notre domaine tels que $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$ (avec σ fixé), i.e. que les mailles deviennent de plus en plus fines, nous dirons alors que la méthode numérique converge si pour tout point (x, t) dans notre domaine et $(x_i, t_j) = (i(\Delta x), j(\Delta t)) \rightarrow (x, t)$, alors $U_i^{(j)} \rightarrow u(x, t)$. Ici nous supposons que $x \neq 0, \ell$ et $t > 0$.

Nous allons premièrement esquisser un argument heuristique justifiant la convergence. Supposons que le point (x, t) appartient à tous les maillages sur lesquels nous considérons la limite, i.e. $x = x_i = i(\Delta x)$ et $t = t_j = j(\Delta t)$. Nous pouvons toujours nous restreindre à ce cas à cause de la continuité de $u(x, t)$. Nous avons vu plus tôt que $U_i^{(j)}$ est une somme finie de fonctions de la forme

$$\sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \kappa_n^j = \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \left[1 - 2\sigma \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right)\right]^j,$$

alors que $u(x, t)$ est une somme infinie de fonctions de la forme

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t\right].$$

Dans ce dernier cas, il faut noter que la convergence de la série est très rapide et que $u(x, t)$ est approximativement égal à une somme finie. Maintenant esquissons la preuve que

$$\sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \kappa_n^j \rightarrow \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t\right]$$

lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$ en supposant que $(n/N) \ll 1$, i.e. (n/N) est petit relativement à 1. En effet,

$$N(\Delta x) = \ell \quad \text{et} \quad i(\Delta x) = x \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) = \sin\left(\frac{n\pi i(\Delta x)}{\ell}\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

De même, parce que

$$\frac{n}{N} \ll 1, \quad \sigma = \frac{c^2(\Delta t)}{(\Delta x)^2}, \quad N(\Delta x) = \ell \quad \text{et} \quad t = j(\Delta t) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{N}\right)^2 \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \kappa_n^j &= \left[1 - 2\sigma \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right)\right]^j \approx \left[1 - \sigma \left(\frac{n\pi}{N}\right)^2\right]^j = \left[1 - \frac{c^2(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \left(\frac{n\pi(\Delta x)}{\ell}\right)^2\right]^j \\ &\approx \left[1 - \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 (\Delta t)\right]^j = \left[1 - \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 \left(\frac{t}{j}\right)\right]^j. \end{aligned}$$

Mais $(\Delta x \rightarrow 0 \text{ et } i(\Delta x) = x) \Rightarrow i \rightarrow \infty$, car $x \neq 0$. De même, $(\Delta t \rightarrow 0 \text{ et } j(\Delta t) = t) \Rightarrow j \rightarrow \infty$, car $t \neq 0$. Avant de considérer la limite, rappelons que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{a}{j}\right]^j = e^a \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{R}.$$

Finalement si nous considérons la limite lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$, i.e. $i \rightarrow \infty$ et $j \rightarrow \infty$, alors

$$\sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \kappa_n^j \approx \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \left[1 - \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 \left(\frac{t}{j}\right)\right]^j \rightarrow \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t\right].$$

Ainsi la somme finie

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_n \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \kappa_n^j$$

est approximativement égale à la somme

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t\right]$$

qui est approximativement égale à $u(x, t)$.

Si nous voulons être plus précis, il faut tenir compte des termes d'erreur. C'est ce que nous allons maintenant faire. Nous allons vérifier que si $\sigma < 1/2$, alors $U_i^{(j)}$ converge vers $u(x_i, t_j)$. Dans ce qui suivra, nous allons supposer que les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

sont continues sur tout domaine de la forme $[0, 1] \times [0, t_F]$ où $t_F \in \mathbf{R}$, $t_F > 0$.

Étant donné $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$, nous avons vu au début du chapitre que

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) (\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, \alpha) (\Delta t)^2 \quad (\text{éq. [4]})$$

et

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) (\Delta x)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta, t) (\Delta x)^4 \quad (\text{éq. [5]})$$

où $t \leq \alpha \leq t + \Delta t$ et $x - \Delta x \leq \beta \leq x + \Delta x$. En multipliant l'équation [4] par $1/(\Delta t)$, l'équation [5] par $c^2/(\Delta x)^2$ et en soustrayant ces deux équations, nous obtenons pour une solution u de l'équation de la chaleur

$$\frac{1}{(\Delta t)} u(x, t + \Delta t) - \frac{c^2}{(\Delta x)^2} (u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t))$$

est égal à

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)} - \frac{2c^2}{(\Delta x)^2} \right] u(x, t) + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, \alpha) (\Delta t) - \frac{c^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta, t) (\Delta x)^2 \right].$$

Nous avons utilisé le fait que u est une solution de l'équation de la chaleur, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Rappelons que $\sigma = c^2(\Delta t)/(\Delta x)^2$. Alors

$$u(x, t + \Delta t) = [\sigma u(x + \Delta x, t) + (1 - 2\sigma) u(x, t) + \sigma u(x - \Delta x, t)] + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, \alpha) (\Delta t)^2 - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta, t) (\Delta t)^2 \right].$$

Noter que

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, \alpha) (\Delta t)^2 - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta, t) (\Delta t)^2 \right] = E(\Delta t),$$

où E est le terme d'erreur de discrétisation

Nous allons maintenant analyser le terme d'erreur $\epsilon_i^{(j)} = u(x_i, t_j) - U_i^{(j)}$ pour $1 \leq i \leq (N - 1)$ et $j \geq 0$. Ici $x_i = i(\Delta x)$ et $t_j = j(\Delta t)$. Ainsi avec l'équation ci-dessus et l'équation [3] définissant $U_i^{(j)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{(j+1)} &= u(x_i, t_{j+1}) - U_i^{(j+1)} \\ &= \sigma u(x_{i+1}, t_j) + (1 - 2\sigma) u(x_i, t_j) + \sigma u(x_{i-1}, t_j) + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \alpha_j) (\Delta t)^2 - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, t_j) (\Delta t)^2 \right] \\ &\quad - [\sigma U_{i+1}^{(j)} + (1 - 2\sigma) U_i^{(j)} + \sigma U_{i-1}^{(j)}] \\ &= \sigma \epsilon_{i+1}^{(j)} + (1 - 2\sigma) \epsilon_i^{(j)} + \sigma \epsilon_{i-1}^{(j)} + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \alpha_j) (\Delta t)^2 - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, t_j) (\Delta t)^2 \right] \end{aligned}$$

où $x_i - (\Delta x) \leq \beta_i \leq x_i + (\Delta x)$ et $t_j \leq \alpha_j \leq t_j + (\Delta t)$.

Soit $M^{(j)} = \max\{|\epsilon_i^{(j)}| \mid i = 1, 2, \dots, (N-1)\}$, l'erreur maximum en valeur absolue pour un temps donné t_j . En utilisant l'inégalité du triangle et le fait que les coefficients σ et $(1-2\sigma)$ sont ≥ 0 parce que $0 < \sigma < (1/2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\epsilon_i^{(j+1)}| &\leq |\sigma \epsilon_{i+1}^{(j)}| + |(1-2\sigma) \epsilon_i^{(j)}| + |\sigma \epsilon_i^{(j)}| + \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \alpha_j) (\Delta t)^2 - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, t_j) (\Delta t)^2 \right| \\ &\leq \sigma M^{(j)} + (1-2\sigma) M^{(j)} + \sigma M^{(j)} + \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \alpha_j) (\Delta t)^2 - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, t_j) (\Delta t)^2 \right| \\ &\leq M^{(j)} + \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \alpha_j) - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, t_j) \right| (\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Comme les points (x_i, α_j) , (β_i, t_j) appartiennent à un domaine $[0, 1] \times [0, t_F]$ pour un certain $t_F > 0$ et que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

est continue sur ce domaine compact (i.e. un ensemble borné et fermé), alors cette fonction est bornée, en particulier il existe un nombre réel positif R tel que

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \alpha_j) - \frac{c^4}{12\sigma} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i, t_j) \right| \leq R \quad \text{pour tout } i, j.$$

Ainsi $|\epsilon_i^{(j+1)}| \leq M^{(j)} + R(\Delta t)^2$ et conséquemment $M^{(j+1)} \leq M^{(j)} + R(\Delta t)^2$ pour tout $j \geq 0$. Nous avons que $M^{(0)} = 0$ par notre choix de $U_i^{(0)}$. Il est alors facile de déduire par récurrence que $M^{(j)} \leq j R(\Delta t)^2$. Comme précédemment, nous supposons que (x, t) est un des points de maillage pour lesquels nous calculons la limite, i.e. $t = j(\Delta t)$ et $M^{(j)} \leq R t(\Delta t)$. Donc si $(\Delta t) \rightarrow 0$, alors $j \rightarrow \infty$ et $M^{(j)} \rightarrow 0$. Ceci montre que l'algorithme converge si $\sigma < (1/2)$.

Pour clore ce chapitre, nous allons présenter une autre méthode numérique pour approximer la solution $u(x, t)$, celle de Crank-Nicolson.

Une approche à laquelle nous pourrions penser pour notre problème de la chaleur est d'utiliser l'approximation par différence finie centrée pour la dérivée partielle de u relativement à t . Celle-ci a été proposée par Richardson en 1910. En d'autres mots, nous aurions alors que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \approx \frac{u(x, t + (\Delta t)) - u(x, t - (\Delta t))}{2(\Delta t)}$$

et nous aurions comme équation à résoudre

$$\frac{U_i^{(j+1)} - U_i^{(j-1)}}{2(\Delta t)} = \frac{c^2}{(\Delta x)^2} [U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}].$$

Noter que dans ce cas, il nous faut ajouter les conditions: $U_0^{(j)} = U_0^{(N)} = 0$ pour tout $j \geq 0$, ainsi que des conditions initiales permettant de déterminer $U_i^{(0)}$ et $U_i^{(1)}$ pour $i = 1, 2, \dots, (N-1)$. Cependant cette méthode n'est maintenant jamais utilisée, parce qu'elle est instable peu importe les valeurs de c^2 , Δx et Δt .

John Crank et Phyllis Nicolson ont proposé en 1947 une méthode alternative. Il est possible de visualiser l'approximation par différence finie progressive pour la dérivée partielle de u relativement à t comme étant l'approximation par différence finie centrée autour de $t + (\Delta t/2)$. Pour la dérivée partielle d'ordre deux par rapport à x , nous voudrions l'évaluer à $t + (\Delta t/2)$, nous faisons la moyenne arithmétique des approximations de cette dérivée évaluée à (x, t) et $(x, t + \Delta t)$. Dans ce cas, la méthode de Crank-Nicolson est

$$\frac{U_i^{(j+1)} - U_i^{(j)}}{(\Delta t)} = \frac{c^2}{2} \left[\frac{U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i+1}^{(j+1)} - 2U_i^{(j+1)} + U_{i-1}^{(j+1)}}{(\Delta x)^2} \right].$$

Cette méthode est différente de la première méthode présentée au début du chapitre. Elle est implicite plutôt qu'explicite.

En effet, l'équation ci-dessus est équivalente à

$$-\frac{\sigma}{2}U_{i+1}^{(j+1)} + (1 + \sigma)U_i^{(j+1)} - \frac{\sigma}{2}U_{i-1}^{(j+1)} = \frac{\sigma}{2}U_{i+1}^{(j)} + (1 - \sigma)U_i^{(j)} + \frac{\sigma}{2}U_{i-1}^{(j)} \quad (\text{éq. [6]})$$

pour $1 \leq i \leq (N-1)$ et $j \geq 0$. Il est aussi possible de généraliser la méthode de Crank-Nicolson en considérant au lieu de la moyenne arithmétique des approximations de la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x un point quelconque entre ces deux valeurs approximatives. Nous parlerons alors de la θ -méthode. Ainsi

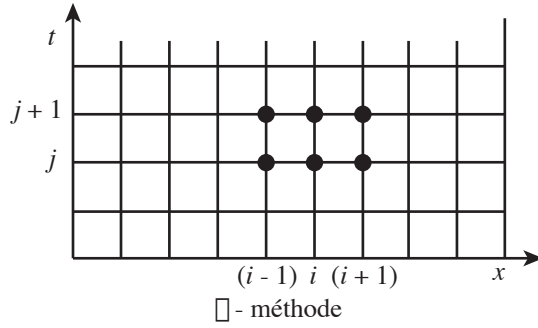
$$\frac{U_i^{(j+1)} - U_i^{(j)}}{(\Delta t)} = c^2 \left[(1 - \theta) \left(\frac{U_{i+1}^{(j)} - 2U_i^{(j)} + U_{i-1}^{(j)}}{(\Delta x)^2} \right) + \theta \left(\frac{U_{i+1}^{(j+1)} - 2U_i^{(j+1)} + U_{i-1}^{(j+1)}}{(\Delta x)^2} \right) \right],$$

pour $1 \leq i \leq (N-1)$ et $j \geq 0$ et où $0 \leq \theta \leq 1$ dans cette dernière méthode. Cette équation est équivalente à

$$-\theta\sigma U_{i+1}^{(j+1)} + (1 + 2\theta\sigma)U_i^{(j+1)} - \theta\sigma U_{i-1}^{(j+1)} = (1 - \theta)\sigma U_{i+1}^{(j)} + (1 - 2(1 - \theta)\sigma)U_i^{(j)} + (1 - \theta)\sigma U_{i-1}^{(j)} \quad (\text{éq. [7]})$$

pour $1 \leq i \leq (N-1)$ et $j \geq 0$. Il nous faut aussi ajouter les conditions: $U_0^{(j)} = U_N^{(j)} = 0$ pour $j \geq 0$ et $U_i^{(0)} = f(i \Delta x)$ pour $1 \leq i \leq (N-1)$. Si $\theta = (1/2)$, nous obtenons la méthode de Crank-Nicolson, i.e. l'équation [6], alors que si $\theta = 0$, nous avons la méthode explicite, i.e. l'équation [3]

Nous avons illustré ci-dessous les points du maillage qui interviennent dans les équations [6] et [7].



Il faut donc résoudre un système d'équations linéaires pour déterminer $U_i^{(j)}$ dans la θ -méthode (lorsque $0 < \theta \leq 1$). C'est l'explication du qualificatif "implicite" pour décrire ces méthodes. Plus précisément, en supposant que $U_i^{(j)}$ connu pour tout $0 \leq i \leq N$, alors nous avons à résoudre un système de $(N-1)$ équations linéaires dont les inconnues sont $U_1^{(j+1)}, U_2^{(j+1)}, \dots, U_{N-1}^{(j+1)}$. Ce système est de la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} (1 + 2\theta\sigma) & -\theta\sigma & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\theta\sigma & (1 + 2\theta\sigma) & -\theta\sigma & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\theta\sigma & (1 + 2\theta\sigma) & -\theta\sigma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\theta\sigma & (1 + 2\theta\sigma) & -\theta\sigma & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\theta\sigma & (1 + 2\theta\sigma) & -\theta\sigma \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\theta\sigma & (1 + 2\theta\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{(j+1)} \\ U_2^{(j+1)} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{(j+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^{(j)}$$

où $\mathbf{V}^{(j)}$ est un vecteur colonne $(N-1) \times 1$ fonction des valeurs $U_i^{(j)}$, $1 \leq i \leq (N-1)$.

Ce système d'équations linéaires peut être résolu sans trop de peine. La matrice du système est tridiagonale et diagonalement dominante, i.e. chaque entrée sur la diagonale est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des autres entrées sur la ligne ou la colonne la contenant. Cette θ -méthode pour $0 < \theta \leq 1$ nécessite plus de travail que la méthode explicite ($\theta = 0$), mais elle a des avantages quant à la stabilité. C'est ce que nous allons maintenant étudier.

Proposition 1

(a) Soit $(1/2) \leq \theta \leq 1$. Alors la θ -méthode est numériquement stable. Nous disons alors que la θ -méthode est inconditionnellement stable.

(b) Soit $0 \leq \theta < (1/2)$. Si $\sigma \leq (1/2(1-2\theta))$, alors la θ -méthode est numériquement stable. Nous disons alors que la θ -méthode est conditionnellement stable.

Preuve: Le cas où $\theta = 0$ a été étudié précédemment, il s'agit de la méthode explicite, et nous avons montré que la méthode est numériquement stable si $\sigma \leq (1/2)$. Donc la partie (b) de la proposition pour $\theta = 0$ est vérifiée. Par la suite, nous supposons que $\theta > 0$.

Pour étudier la stabilité, nous procéderons comme pour la méthode explicite. Considérons le problème intermédiaire suivant:

$$(\spadesuit) \quad \begin{cases} -\theta\sigma U_{i+1}^{(j+1)} + (1+2\theta\sigma)U_i^{(j+1)} - \theta\sigma U_{i-1}^{(j+1)} = (1-\theta)\sigma U_{i+1}^{(j)} + (1-2(1-\theta)\sigma)U_i^{(j)} + (1-\theta)\sigma U_{i-1}^{(j)} \\ \text{pour } 1 \leq i \leq (N-1) \text{ et } j \leq 0 \text{ avec la condition } U_0^{(j)} = U_N^{(j)} = 0 \text{ pour tout } j \geq 0 \end{cases}$$

Par rapport à la θ -méthode, nous avons laissé tomber la condition initiale $U_i^{(0)} = f(i\Delta x)$ pour $1 \leq i \leq (N-1)$. Nous allons déterminer des solutions non triviales du système $(\spadesuit)$ de la forme $U_i^{(j)} = F(i)G(j)$. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons

$$-\theta\sigma F(i+1)G(j+1) + (1+2\theta\sigma)F(i)G(j+1) - \theta\sigma F(i-1)G(j+1)$$

est égal

$$(1-\theta)\sigma F(i+1)G(j) + (1+2\theta\sigma-2\sigma)F(i)G(j) + (1-\theta)\sigma F(i-1)G(j).$$

Nous pouvons séparer ces deux fonctions et nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{G(j+1)}{G(j)} &= \frac{(1-\theta)\sigma F(i+1) + (1+2\theta\sigma-2\sigma)F(i) + (1-\theta)\sigma F(i-1)}{-\theta\sigma F(i+1) + (1+2\theta\sigma)F(i) - \theta\sigma F(i-1)} \\ &= \left[\frac{\sigma F(i+1) - 2\sigma F(i) + \sigma F(i-1)}{-\theta\sigma F(i+1) + (1+2\theta\sigma)F(i) - \theta\sigma F(i-1)} \right] + 1. \end{aligned}$$

Le terme de gauche est une fonction de j et celui de droite est une fonction de i . Pour que l'équation ci-dessus soit vérifiée, il faut que chacun des termes soit constant. Donc

$$\frac{G(j+1)}{G(j)} = \left[\frac{\sigma F(i+1) - 2\sigma F(i) + \sigma F(i-1)}{-\theta\sigma F(i+1) + (1+2\theta\sigma)F(i) - \theta\sigma F(i-1)} \right] + 1 = \lambda$$

où λ est une constante. Posons $\lambda' = \lambda - 1$. Nous obtenons ainsi deux équations:

$$\sigma(1+\theta\lambda')F(i+1) - (2\sigma+\lambda'+2\theta\sigma\lambda')F(i) + \sigma(1+\theta\lambda')F(i-1) = 0 \quad \text{et} \quad G(j+1) = \lambda G(j)$$

pour $1 \leq i \leq (N-1)$ et $j \leq 0$. À ceci, il faut ajouter les conditions suivantes:

$$U_0^{(j)} = F(0)G(j) = 0, \quad \forall j \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F(0) = 0 \quad \text{et} \quad U_N^{(j)} = F(N)G(j) = 0, \quad \forall j \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F(N) = 0.$$

En résumé, nous devons résoudre

$$\sigma(1 + \theta\lambda')F(i+1) - (2\sigma + \lambda' + 2\theta\sigma\lambda')F(i) + \sigma(1 + \theta\lambda')F(i-1) = 0 \quad \text{avec } F(0) = F(N) = 0 \text{ et} \\ G(j+1) = \lambda G(j)$$

pour $1 \leq i \leq (N-1)$ et $j \leq 0$.

Si $(1 + \theta\lambda') = 0$, i.e. $\lambda' = -\theta^{-1}$, alors la première équation équivalente à $F(i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq (N-1)$. Comme nous cherchons des solutions non triviales, nous pouvons donc supposer par la suite que $(1 + \theta\lambda') \neq 0$, i.e. $\lambda' \neq -\theta^{-1}$.

Si $(1 + \theta\lambda') \neq 0$, i.e. $\lambda' \neq -\theta^{-1}$, alors la première équation est d'ordre 2 et elle est équivalente à

$$F(i+1) - \left[2 + \frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')}\right] F(i) + F(i-1) = 0$$

après avoir divisé par $\sigma(1 + \theta\lambda')$. Il nous faut étudier les racines du polynôme

$$x^2 - \left[2 + \frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')}\right] x + 1 = 0.$$

Nous avons trois cas: (i) deux racines réelles distinctes; (ii) une racine réelle double; (iii) deux racines complexes non réelles distinctes. Dans les deux premiers cas (i) et (ii), à cause de la condition $F(0) = F(N) = 0$, nous obtenons que $F(i) = 0$ pour $1 \leq i \leq (N-1)$ et il nous faut rejeter ces deux cas. Il nous faut donc considérer seulement le cas (iii). Ces deux racines sont

$$1 + \frac{\lambda'}{2\sigma(1 + \theta\lambda')} + \sqrt{\frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')} \left[\frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')} + 4 \right]} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{\lambda'}{2\sigma(1 + \theta\lambda')} - \sqrt{\frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')} \left[\frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')} + 4 \right]}.$$

Parce que ces racines sont complexes non réelles, nous devons avoir que

$$\frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')} \left[\frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')} + 4 \right] < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 < \frac{\lambda'}{\sigma(1 + \theta\lambda')} < 0$$

Si ρ est la norme de ces deux racines, alors comme pour le cas explicite et à cause de la condition $F(0) = F(N) = 0$, nous obtenons que

$$F(i) = \rho^i \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \quad \text{avec } n \in \mathbf{N}, n > 0, n \not\equiv 0 \pmod{N}$$

Nous pourrions calculer explicitement ρ , mais ceci ne sera pas nécessaire pour la stabilité. Pour la deuxième équation $G(j+1) = \lambda G(j)$, nous obtenons que la solution est $G(j) = A\lambda^j$. Nous obtenons donc que

$$U_i^{(j)} = A\rho^i \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \lambda^j$$

avec $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$, $n \not\equiv 0 \pmod{N}$, est une solution du système ($\spadesuit$), où $0 \leq i \leq N$ et $j \geq 0$. Ici ρ et λ dépendent de n et nous écrirons ρ_n et λ_n pour souligner cette dépendance. Il est possible de restreindre n entre 1 et $N-1$. Finalement nous obtenons que la solution de ($\spadesuit$) est de la forme

$$U_i^{(j)} = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \rho_n^i \sin\left(\frac{n\pi i}{N}\right) \lambda_n^j.$$

Pour la stabilité, il faut s'assurer que $|\lambda_n| < 1$. Rappelons que $\lambda_n = \lambda'_n + 1$. Conséquemment pour la stabilité, il faut que s'assurer que $-2 < \lambda'_n < 0$. Nous avons montré ci-dessus que

$$-4 < \frac{\lambda'_n}{\sigma(1 + \theta\lambda'_n)} < 0 \quad (\text{inégalité [1]})$$

Noter que $\sigma > 0$. Si $(1 + \theta\lambda'_n) > 0$, i.e. $\lambda'_n > -\theta^{-1}$, alors nous obtenons de l'inégalité [1]:

$$-4\sigma(1 + \theta\lambda'_n) < \lambda'_n < 0 \quad \Rightarrow \quad -4\sigma < (1 + 4\sigma\theta)\lambda'_n < 4\sigma\theta\lambda'_n \quad \Rightarrow \quad -\frac{4\sigma}{(1 + 4\sigma\theta)} < \lambda'_n < 0.$$

Si $(1 + \theta\lambda'_n) < 0$, i.e. $\lambda'_n < -\theta^{-1}$, alors nous obtenons de l'inégalité [1]: $-4\sigma(1 + \theta\lambda'_n) > \lambda'_n > 0$. Nous avons alors une contradiction, car $\theta > 0 \Rightarrow \lambda'_n < 0$ et aussi $\lambda'_n > 0$. Ainsi nous avons l'inégalité

$$-\frac{4\sigma}{(1 + 4\sigma\theta)} < \lambda'_n < 0.$$

Si maintenant

$$-2 \leq -\frac{4\sigma}{(1 + 4\sigma\theta)},$$

alors nous aurons la stabilité de la θ -méthode. Nous avons les équivalences suivantes

$$-2 \leq -\frac{4\sigma}{(1 + 4\sigma\theta)} \quad \Longleftrightarrow \quad -2(1 + 4\sigma\theta) \leq -4\sigma \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq -2\sigma(1 - 2\theta). \quad (\text{inégalité [2]})$$

Montrons maintenant (a). Soit $(1/2) \leq \theta \leq 1$. Alors $(1 - 2\theta) \leq 0$ et $-2\sigma(1 - 2\theta) \geq 0$. Conséquemment l'inégalité [2] est vérifiée et par le fait même la θ -méthode est numériquement stable.

Montrons maintenant (b). Soit $0 < \theta < (1/2)$. Si

$$\sigma \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)} \quad \Rightarrow \quad 2\sigma(1 - 2\theta) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -2\sigma(1 - 2\theta) \geq -1$$

car $(1 - 2\theta) > 0$. Ainsi l'inégalité [2] est vérifiée et par le fait même la θ -méthode est numériquement stable si

$$\sigma \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}.$$

□

ANNEXE 1

Solutions des exercices.

Chapitre 1

Exercice 1.1

a) Cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2. Pour montrer que l'EDP est linéaire, considérons l'opérateur

$$u \mapsto L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Celui-ci est linéaire. En effet, prenons $a, b \in \mathbf{R}$ et u, v deux fonctions. Alors il nous faut vérifier que $L(au + bv) = aL(u) + bL(v)$. Mais par les propriétés des dérivées partielles, nous obtenons

$$L(au + bv) = \frac{\partial^2(au + bv)}{\partial x^2} + x \frac{\partial(au + bv)}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + ax \frac{\partial u}{\partial y} + bx \frac{\partial v}{\partial y} = aL(u) + bL(v).$$

Ceci complète la preuve que L est un opérateur linéaire. Comme notre équation est de la forme $L(u) = y$, nous pouvons conclure que l'EDP est linéaire. À cause aussi de cette forme, l'EDP est non homogène. Comme la dérivée partielle d'ordre supérieure est d'ordre 2, alors l'EDP est d'ordre 2.

b) Cette EDP n'est pas linéaire. Elle est d'ordre 1. Cette EDP est de la forme $T(u) = 1$ où T est l'opérateur

$$u \mapsto T(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Pour vérifier que cette EDP n'est pas linéaire, il suffit de montrer que T n'est pas un opérateur linéaire. Il nous faut donc trouver deux nombres réels a et b , ainsi que deux fonctions u et v tels que $T(au + bv) \neq aT(u) + bT(v)$. Prenons $a = b = 1$, $u = (2x + y)$ et $v = y^2$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(2x + y + y^2) = \left(\frac{\partial(2x + y + y^2)}{\partial x} \right)^2 + (2x + y + y^2) \left(\frac{\partial(2x + y + y^2)}{\partial y} \right) \\ &= 2^2 + (2x + y + y^2)(1 + 2y) = 4 + 2x + y + 2y^3 + 3y^2 + 4xy; \end{aligned}$$

$$T(u) = T(2x + y) = \left(\frac{\partial(2x + y)}{\partial x} \right)^2 + (2x + y) \left(\frac{\partial(2x + y)}{\partial y} \right) = 2^2 + (2x + y) = 4 + 2x + y \quad \text{et} \quad$$

$$T(v) = T(y^2) = \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial y^2}{\partial y} \right) = 0 + y^2(2y) = 2y^3$$

Nous voyons bien dans ce cas que $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$. Ceci montre que l'EDP n'est pas linéaire. Comme la dérivée partielle d'ordre supérieure est d'ordre 1, alors l'EDP est d'ordre 1.

Pour c), d) et e), nous allons seulement donner les réponses. Il suffit de procéder comme ci-dessus dans chacun de ces cas, nous laissons aux étudiant(e)s le soin de faire ces vérifications.

c) Cette EDP est linéaire, homogène et d'ordre 4.

d) Cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2.

e) Cette EDP n'est pas linéaire. Elle est d'ordre 2.

Exercice 1.2

Si $u(x, y) = x^2 - y^2$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

montre que u est bien une solution.

Si $u(x, y) = e^x \sin(y)$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

montre que u est bien une solution.

Exercice 1.3

Rappelons que l'équation différentielle ordinaire $Y''(y) + Y(y) = 0$ pour laquelle $Y = Y(y)$ est une fonction de la variable y et $Y''(y)$ désigne la dérivée seconde par rapport à y a comme solution générale $Y(y) = a \cos(y) + b \sin(y)$ où a et b sont des nombres réels quelconques. Nous pouvons maintenant adapter ce résultat. Ainsi l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0 \quad \text{avec } u = u(x, y),$$

a comme solution générale $u(x, y) = a(x) \cos(y) + b(x) \sin(y)$ où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions quelconques de x .

Exercice 1.4

Si $\xi = x + y$ et $\eta = x - y$, alors en utilisant la règle de chaines nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right] (1) + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] (1) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right] (1) + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] (-1) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Conséquemment

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{devient} \quad 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Il nous suffit donc de résoudre l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Mais nous avons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta) \quad \text{et } u(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + g(\xi) = h(\eta) + g(\xi),$$

où f , g et h sont des fonctions dérivables arbitraires. Donc la solution générale est $u(x, y) = g(x+y) + h(x-y)$, avec g et h comme ci-dessus.

Exercice 1.5

Rappelons que nous avons

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan(y/x).$$

En utilisant la règle de chaines, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2 + y^2)} \frac{\partial u}{\partial \theta};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)} \right] \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{y}{(x^2 + y^2)} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \\ &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{(x^2 + y^2)} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)} \right] \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{x}{(x^2 + y^2)} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] \\ &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Donc après substitution et simplification, nous obtenons que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{est équivalent à} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

Comme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, l'équation de la chaleur en coordonnées polaires est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

Chapitre 2

Exercice 2.1

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda \right) u - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} + 2\lambda u \right) - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial t} \right) + c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\quad - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

en supposant que les dérivées partielles d'ordre 2 de u sont continues. Cette dernière hypothèse a comme conséquence que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}.$$

Si nous considérons

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda \right) u - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x}}_v = 0,$$

alors

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Nous obtenons donc le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} + 2\lambda u = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Mais ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v - 2\lambda u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} - 2c\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.2

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = c.$$

Nous pouvons résoudre ces équations par séparation de variables:

$$\frac{dt}{ds} = 1 \Rightarrow dt = ds \Rightarrow \int dt = \int ds + \text{constante} \Rightarrow t = s + t_0$$

et

$$\frac{dx}{ds} = c \Rightarrow dx = c ds \Rightarrow \int dx = c \int ds + \text{constante} \Rightarrow x = cs + x_0.$$

Si nous considérons la fonction u recherchée comme fonction de s , i.e. $u(s) = u(x(s), t(s))$, alors en utilisant la règle de chaînes et le fait que u est une solution de l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0,$$

nous obtenons

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} = c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda u$$

Nous pouvons résoudre cette dernière équation différentielle ordinaire par séparation de variables

$$\frac{du}{ds} = -\lambda u \Rightarrow \frac{du}{u} = -\lambda ds \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\lambda \int ds + \text{constante} \Rightarrow \ln(u) = -\lambda s + \text{constante}.$$

Si nous fixons $u(0) = u_0$, alors nous aurons $u(s) = u_0 e^{-\lambda s}$. Ainsi les courbes caractéristiques sont

$$s \mapsto (x(s), t(s), u(s)) = (cs + x_0, s + t_0, u_0 e^{-\lambda s}).$$

Si nous considérons les conditions initiales: $x_0 = \tau$, $t_0 = 0$ et $u_0 = f(\tau)$, alors nous obtenons les courbes caractéristiques:

$$s \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau), u(s, \tau)) = (cs + \tau, s, f(\tau) e^{-\lambda s}).$$

Il est possible de déterminer la fonction inverse de $(s, \tau) \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau))$. En effet

$$\left\{ \begin{array}{l} cs + \tau = x \\ s = t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = t \\ \tau = x - cs = x - ct \end{array} \right\}.$$

Donc si nous exprimons u en fonction de x et t plutôt que s et τ , nous obtenons $u(x, t) = f(x - ct) e^{-\lambda t}$. Cette fonction est la solution du problème. Nous pouvons vérifier ceci facilement. En effet nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x - ct)e^{-\lambda t} + (-\lambda)f(x - ct)e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - ct)e^{-\lambda t}.$$

Conséquemment

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = -cf'(x - ct)e^{-\lambda t} + (-\lambda)f(x - ct)e^{-\lambda t} + cf'(x - ct)e^{-\lambda t} + \lambda f(x - ct)e^{-\lambda t} = 0$$

et $u(x, 0) = f(x - c(0)) e^{-\lambda 0} = f(x)$.

Exercice 2.3

a) Si $f(x) = x$ et $g(x) = 0$, alors la solution de d'Alembert est

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} 0 d\lambda + \frac{1}{2}((x+ct) + (x-ct)) = x.$$

b) Si $f(x) = 0$ et $g(x) = x$, alors la solution de d'Alembert est

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \lambda d\lambda + \frac{1}{2}(0+0) \\ &= \frac{1}{2c} \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \Big|_{\lambda=x-ct}^{\lambda=x+ct} = \frac{1}{4c} ((x+ct)^2 - (x-ct)^2) = xt. \end{aligned}$$

c) Si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = -c \cos(x)$, alors la solution de d'Alembert est

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} -c \cos(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) \\ &= \frac{1}{2c} \left(-c \sin(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=x-ct}^{\lambda=x+ct} + \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) \\ &= -\frac{1}{2}(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)) + \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) = \sin(x-ct). \end{aligned}$$

d) Si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = c \cos(x)$, alors la solution de d'Alembert est

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} c \cos(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) \\ &= \frac{1}{2c} \left(c \sin(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=x-ct}^{\lambda=x+ct} + \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)) + \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) = \sin(x+ct). \end{aligned}$$

Exercice 2.4

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = e^x.$$

Nous pouvons résoudre ces équations par séparation de variables:

$$\frac{dt}{ds} = 1 \Rightarrow dt = ds \Rightarrow \int dt = \int ds + \text{constante} \Rightarrow t = s + t_0$$

et

$$\frac{dx}{ds} = e^x \Rightarrow \frac{dx}{e^x} = ds \Rightarrow \int e^{-x} dx = \int ds + \text{constante} \Rightarrow -e^{-x} = s + \text{constante} \Rightarrow$$

$$x(s) = -\ln(-s + \text{constante}) \Rightarrow x(s) = -\ln(-s + e^{-x_0}) = \ln\left(\frac{1}{e^{-x_0} - s}\right).$$

Dans ce dernier cas, nous avons posé comme condition initiale $x(0) = x_0$.

Si nous considérons maintenant u comme une fonction de s , i.e. $u(s) = u(x(s), t(s))$, alors par la règle de chaînes et le fait que u est une solution de l'EDP, nous obtenons

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} = e^x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Cette équation différentielle ordinaire peut facilement être résolue. Nous obtenons $u(s) = u_0$.

Si nous prenons maintenant comme condition initiale: $x_0 = \tau$, $t_0 = 0$ et $u_0 = \tau$, nous obtenons pour chaque τ , la courbe caractéristique

$$s \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau), u(s, \tau)) = \left(\ln\left(\frac{1}{e^{-\tau} - s}\right), s, \tau\right).$$

La fonction $(s, \tau) \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau))$ a une fonction inverse. En effet, $s = t$ et

$$x = \ln\left(\frac{1}{e^{-\tau} - s}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-\tau} - t}\right) \Rightarrow e^{-x} = (e^{-\tau} - t) \Rightarrow e^{-x} + t = e^{-\tau} \Rightarrow \ln(e^{-x} + t) = -\tau$$

nous permet de conclure finalement que

$$\tau = \ln\left(\frac{1}{e^{-x} + t}\right).$$

La solution du problème est

$$u(x, t) = \ln\left(\frac{1}{e^{-x} + t}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{1 + te^x}\right) = x - \ln(1 + te^x)$$

en substituant l'expression pour τ dans $u(s, \tau) = \tau$ par leurs valeurs en fonction de x et t .

Nous pouvons vérifier que cette fonction est bien une solution du problème. En effet, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \left(\frac{1}{1 + te^x}\right) te^x \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{1}{1 + te^x}\right) e^x.$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + e^x \frac{\partial u}{\partial x} = -\left(\frac{1}{1 + te^x}\right) e^x + e^x \left(1 - \left(\frac{1}{1 + te^x}\right) te^x\right) = 0$$

et $u(x, 0) = x$.

Exercice 2.5

a) Nous pouvons écrire l'EDP sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = F(x, t).$$

En effet, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)\end{aligned}$$

en supposant que les dérivées partielles d'ordre 2 de u sont continues et conséquemment que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}.$$

Si nous considérons

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_v = F(x, t)$$

nous obtenons bien le système

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = F(x, t). \end{cases}$$

b) Pour déterminer la solution u , il nous faut premièrement déterminer v tel que

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = F(x, t).$$

Les conditions initiales $u(x, 0) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ signifient en utilisant la première équation de (*) que

$$v(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) - c\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x) - cf'(x).$$

Nous avons donc comme problème à résoudre

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = F(x, t) \quad \text{avec comme condition initiale} \quad v(x, 0) = g(x) - cf'(x).$$

Il nous faut donc considérer le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = c.$$

Ces équations peuvent être résolues par séparation de variables:

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \Rightarrow \quad dt = ds \quad \Rightarrow \quad \int dt = \int ds + \text{constante} \quad \Rightarrow \quad t = s + t'_0$$

et

$$\frac{dx}{ds} = c \Rightarrow dx = c ds \Rightarrow \int dx = c \int ds + \text{constante} \Rightarrow x = cs + x'_0.$$

Si nous considérons v comme fonction de s , i.e. $v(s) = v(x(s), t(s))$, nous obtenons

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{ds} = c \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = F(x(s), t(s)) = F(cs + x'_0, s + t'_0).$$

Par le théorème fondamental du calcul, nous obtenons qu'il y a une seule solution telle que $v(0) = v_0$ et celle-ci est

$$v(s) = \left(\int_0^s F(c\omega + x'_0, \omega + t'_0) d\omega \right) + v_0.$$

Si nous considérons les valeurs initiales $x'_0 = \tau$, $t'_0 = 0$ et $v_0 = g(\tau) - cf'(\tau)$, nous obtenons pour chaque τ la courbe caractéristique

$$s \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau), v(s, \tau)) = \left(cs + \tau, s, \left(\int_0^s F(c\omega + \tau, \omega) d\omega \right) + g(\tau) - cf'(\tau) \right).$$

La fonction $(s, \tau) \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau))$ a une fonction inverse $(x, t) \mapsto (s, \tau) = (t, x - ct)$, car $s = t$ et $x = cs + \tau \Rightarrow \tau = x - cs = x - ct$. En remplaçant ces valeurs dans l'expression pour v , nous obtenons la solution

$$v(x, t) = \left(\int_0^t F(c\omega + x - ct, \omega) d\omega \right) + g(x - ct) - cf'(x - ct).$$

Nous pouvons maintenant considérer le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v \quad \text{avec la condition initiale} \quad u(x, 0) = f(x).$$

Ici v est comme ci-dessus.

Il nous faut donc considérer le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = -c.$$

Ces équations peuvent être résolues par séparation de variables:

$$\frac{dt}{ds} = 1 \Rightarrow dt = ds \Rightarrow \int dt = \int ds + \text{constante} \Rightarrow t = s + t_0$$

et

$$\frac{dx}{ds} = -c \Rightarrow dx = -c ds \Rightarrow \int dx = -c \int ds + \text{constante} \Rightarrow x = -cs + x_0.$$

Si nous considérons u comme une fonction de s , nous obtenons avec la règle de chaines

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} = -c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = v(x(s), t(s)) \\ &= \left[\int_0^{s+t_0} F(c\omega + (x_0 - cs) - c(s + t_0), \omega) d\omega \right] + g((x_0 - cs) - c(s + t_0)) - cf'((x_0 - cs) - c(s + t_0)) \\ &= \left[\int_0^{s+t_0} F(c\omega - 2cs + x_0 - ct_0, \omega) d\omega \right] + g(-2cs + x_0 - ct_0) - cf'(-2cs + x_0 - ct_0). \end{aligned}$$

Donc la seule solution $u(s)$ telle que $u(0) = u_0$ est

$$u(s) = \int_0^s \int_0^{\sigma+t_0} F(c\omega - 2c\sigma + x_0 - ct_0, \omega) d\omega d\sigma + \int_0^s g(-2c\sigma + x_0 - ct_0) d\sigma - c \int_0^s f'(-2c\sigma + x_0 - ct_0) d\sigma + u_0.$$

Maintenant si nous prenons comme valeurs initiales: $x_0 = \tau$, $t_0 = 0$ et $u_0 = f(\tau)$, nous obtenons pour chaque τ la courbe caractéristique: $s \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau), u(s, \tau))$ avec $x(s, \tau) = \tau - cs$, $t(s, \tau) = s$ et

$$u(s, \tau) = \int_0^s \int_0^\sigma F(c\omega - 2c\sigma + \tau, \omega) d\omega d\sigma + \int_0^s g(-2c\sigma + \tau) d\sigma - c \int_0^s f'(-2c\sigma + \tau) d\sigma + f(\tau).$$

Nous pouvons faire des substitutions pour chacune de ces intégrales. Posons $\lambda = -2c\sigma + \tau$, alors $d\lambda = -2c d\sigma$ et avec cette substitution dans chacune des intégrales simples nous obtenons

$$\int_0^s g(-2c\sigma + \tau) d\sigma = \int_\tau^{\tau-2cs} g(\lambda) \left(\frac{-1}{2c} \right) d\lambda = \frac{1}{2c} \int_{\tau-2cs}^\tau g(\lambda) d\lambda$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^s f'(-2c\sigma + \tau) d\sigma &= \int_\tau^{\tau-2cs} f'(\lambda) \left(\frac{-1}{2c} \right) d\lambda = \frac{1}{2c} \int_{\tau-2cs}^\tau f'(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2c} \left(f(\lambda) \right)_{\lambda=\tau-2cs}^{\lambda=\tau} \\ &= \frac{1}{2c} (f(\tau) - f(\tau - 2cs)) \end{aligned}$$

Pour l'intégrale double, nous avons

$$\int_0^s \int_0^\sigma F(c\omega - 2c\sigma + \tau, \omega) d\omega d\sigma = \iint_R F(c\omega - 2c\sigma + \tau, \omega) d\omega d\sigma$$

où R est l'intérieur du triangle dans le plan des σ, ω dont les sommets sont $(0, 0)$, $(s, 0)$ et (s, s) , i.e. $R = \{(\sigma, \omega) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq \omega \leq \sigma \leq s\}$. Considérons les nouvelles coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = c\omega - 2c\sigma + \tau \\ \beta = \omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega = \beta \\ \sigma = -\alpha/2c + \beta/2 + \tau/2c \end{array} \right\}$$

Le jacobien de ce changement de coordonnées est

$$\frac{\partial(\omega, \sigma)}{\partial(\alpha, \beta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} & \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} & \frac{\partial\sigma}{\partial\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1/2c & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2c.$$

Avec ce changement de coordonnées, nous obtenons

$$\int_0^s \int_0^\sigma F(c\omega - 2c\sigma + \tau, \omega) d\omega d\sigma = \iint_{R'} F(\alpha, \beta) \left(\frac{1}{2c} \right) d\alpha d\beta$$

avec

$$R' = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq \beta \leq \frac{-\alpha}{2c} + \frac{\beta}{2} + \frac{\tau}{2c} \leq s \right\}$$

Donc

$$u(s, \tau) = \frac{1}{2c} \iint_{R'} F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \frac{1}{2c} \int_{\tau-2cs}^\tau g(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2} (f(\tau) - f(\tau - 2cs)) + f(\tau).$$

Nous pouvons aussi noter que la fonction $(s, \tau) \mapsto (x(s, \tau), t(s, \tau))$ a un inverse. En effet,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \tau - cs \\ t = s \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = t \\ \tau = x + ct \end{array} \right\}.$$

En remplaçant dans l'expression pour u , nous obtenons

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_{R'} F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)),$$

avec $R' = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq \beta, -\frac{\alpha}{2c} - \frac{\beta}{2} \geq \frac{-(ct+x)}{2c}, -\frac{\alpha}{2c} + \frac{\beta}{2} \leq \frac{(ct-x)}{2c} \right\}$.

Comme $c > 0$, alors $R' = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq \beta, \alpha + c\beta \leq (x + ct), \alpha - c\beta \geq (x - ct)\}$ et R' est l'intérieur dans le plan des α, β du triangle dont les sommets: $(x - ct, 0)$, $(x + ct, 0)$ et (x, t) . Nous obtenons finalement que

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-ct+c\beta}^{x+ct-c\beta} F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct))$$

Chapitre 3

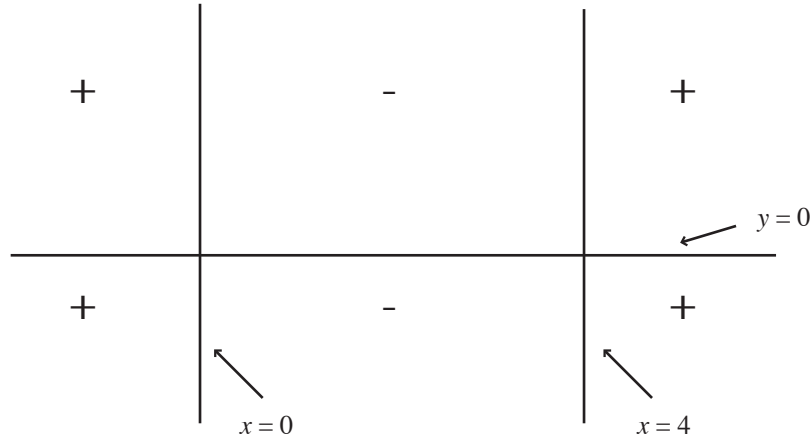
Exercice 3.1

i) Pour l'équation

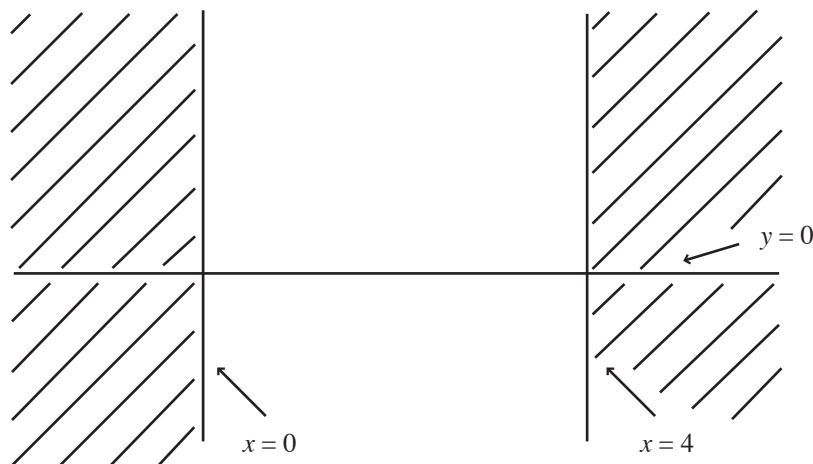
$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

alors $B^2 - 4AC = (-xy)^2 - 4(x)(y^2) = x^2y^2 - 4xy^2 = xy^2(x - 4)$. Pour déterminer le signe de $B^2 - 4AC$, il nous faut premièrement déterminer les points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $B^2 - 4AC = xy^2(x - 4) = 0$. Nous obtenons ainsi que soit $x = 0$, soit $y = 0$ ou soit $x = 4$.

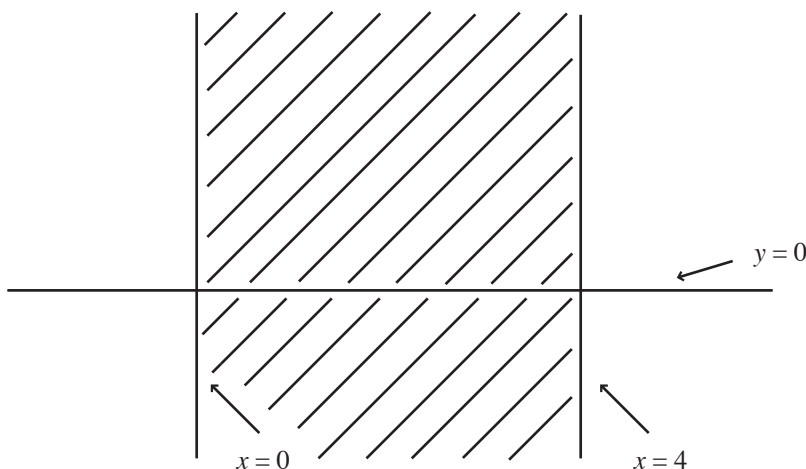
Pour chacune des régions de $\mathbf{R}^2 \setminus (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 4\})$, nous pouvons déterminer les signes de $B^2 - 4AC$. Nous avons indiqué ces signes ci-dessous.



L'équation est hyperbolique sur la région hachurée ci-dessous



L'équation est elliptique sur la région hachurée ci-dessous



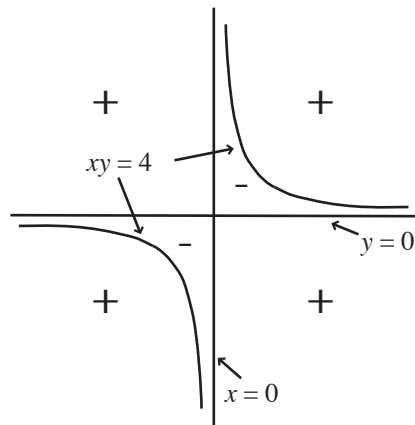
L'équation est parabolique sur les deux droites verticales: $x = 0$ et $x = 4$, ainsi que sur la droite horizontale $y = 0$.

ii) Pour l'équation

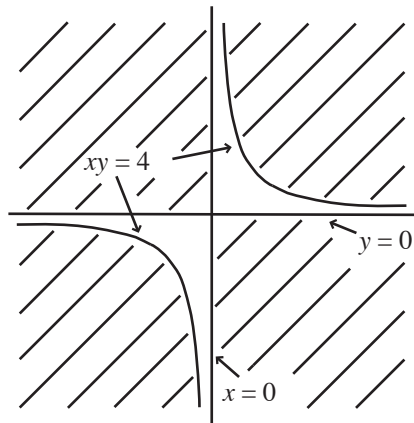
$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (x+3) \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

alors $B^2 - 4AC = (xy)^2 - 4(x)(y) = xy(xy - 4)$. Pour déterminer le signe de $B^2 - 4AC$, il nous faut premièrement déterminer les points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $B^2 - 4AC = xy(xy - 4) = 0$. Nous obtenons ainsi que soit $x = 0$, soit $y = 0$ ou soit $xy = 4$. Les points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $xy = 4$ est une hyperbole dont les asymptotes sont les axes des x et des y .

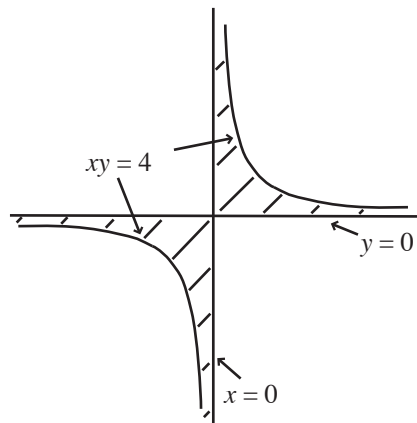
Pour chacune des régions de $\mathbf{R}^2 \setminus (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 4\})$, nous pouvons déterminer les signes de $B^2 - 4AC$. Nous avons indiqué ces signes ci-dessous.



L'équation est hyperbolique sur la région hachurée ci-dessous



L'équation est elliptique sur la région hachurée ci-dessous



L'équation est parabolique sur la droite verticale: $x = 0$, la droite horizontale $y = 0$, ainsi que sur l'hyperbole $xy = 4$.

iii) Pour l'équation

$$e^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5y \frac{\partial u}{\partial x} = e^x$$

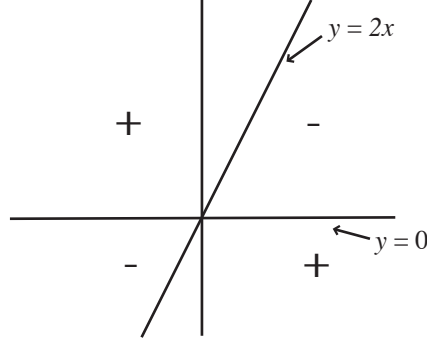
alors $B^2 - 4AC = x^2 - 4e^x(-1) = x^2 + 4e^x > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ car $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Donc l'équation est hyperbolique sur tout le plan $\mathbf{R}^2$.

iv) Pour l'équation

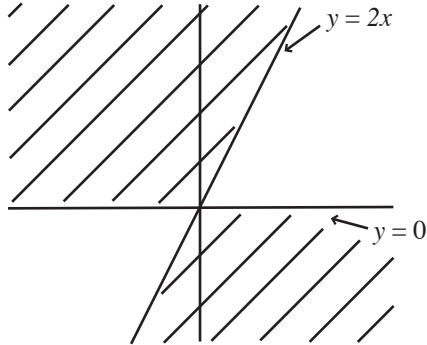
$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x-y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

alors $B^2 - 4AC = (2(x-y))^2 - 4(x^2)(1) = -8xy + 4y^2 = 4y(-2x + y)$. Pour déterminer le signe de $B^2 - 4AC$, il nous faut premièrement déterminer les points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $B^2 - 4AC = 4y(-2x + y) = 0$. Nous obtenons ainsi que soit $y = 0$, ou soit $(-2x + y) = 0$.

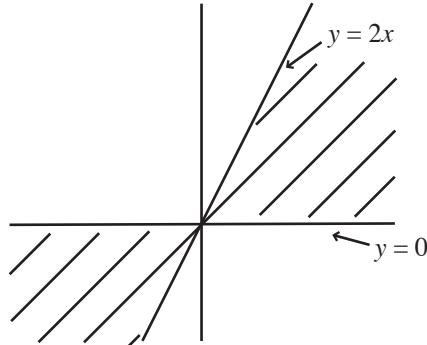
Pour chacune des régions de $\mathbf{R}^2 \setminus (\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -2x + y = 0\})$, nous pouvons déterminer les signes de $B^2 - 4AC$. Nous avons indiqué ces signes ci-dessous.



L'équation est hyperbolique sur la région hachurée ci-dessous



L'équation est elliptique sur la région hachurée ci-dessous



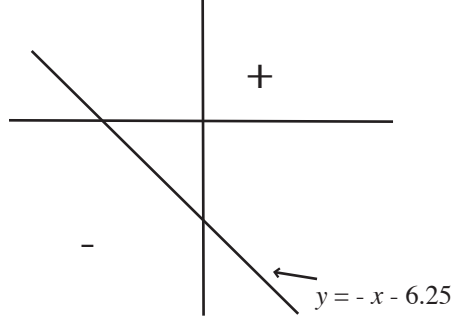
L'équation est parabolique sur la droite horizontale $y = 0$, ainsi que sur la droite $y = 2x$.

v) Pour l'équation

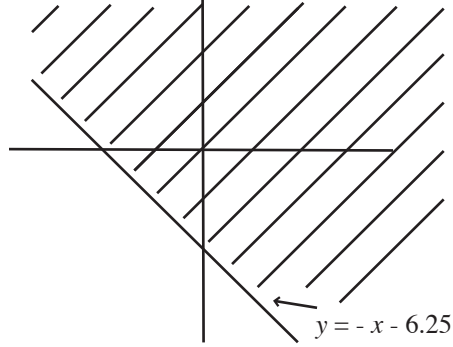
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (x+y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x)$$

alors $B^2 - 4AC = (-5)^2 - 4(1)(-(x+y)) = 25 + 4(x+y)$. Pour déterminer le signe de $B^2 - 4AC$, il nous faut premièrement déterminer les points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $B^2 - 4AC = 4x + 4y + 25 = 0$. Nous obtenons ainsi l'équation de la droite $y = -x - 6.25$.

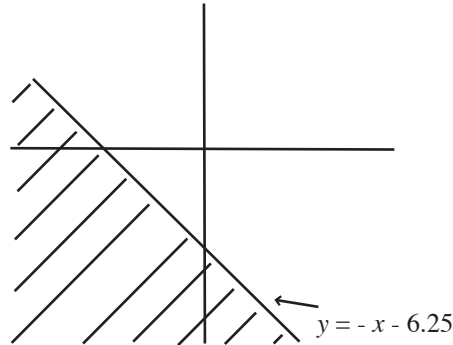
Pour chacune des régions de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x + 4y + 25 = 0\}$, nous pouvons déterminer les signes de $B^2 - 4AC$. Nous avons indiqué ces signes ci-dessous.



L'équation est hyperbolique sur la région hachurée ci-dessous



L'équation est elliptique sur la région hachurée ci-dessous



L'équation est parabolique sur la droite $y = -x - 25/4 = -x - 6.25$.

Exercice 3.2

i) Pour l'équation

$$2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4y \frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0$$

nous avons $B^2 - 4AC = (-xy)^2 - 4(2y^2)(-x^2) = 9x^2y^2$. Donc $B^2 - 4AC = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. De plus comme $9x^2y^2 \geq 0$, alors $B^2 - 4AC > 0$ si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Donc l'équation est

hyperbolique aux points (x, y) où $x \neq 0$ et $y \neq 0$. En d'autres mots, l'équation est hyperbolique pour tous les points qui ne sont pas sur les axes des x et des y .

Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-xy) + \sqrt{9x^2y^2}}{2(2y^2)} = \frac{x}{2y} \text{ et } \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-xy) - \sqrt{9x^2y^2}}{2(2y^2)} = -\frac{x}{y}.$$

Nous pouvons résoudre ces deux équations différentielles ordinaires en utilisant la méthode de séparation de variables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \Rightarrow 2y dy = x dx \Rightarrow \int 2y dy = \int x dx \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2} + c.$$

Nous pouvons donc considérer la coordonnée caractéristique $\xi(x, y) = y^2 - x^2/2$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y dy = -x dx \Rightarrow \int y dy = -\int x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c.$$

Nous pouvons donc considérer la coordonnée caractéristique $\eta(x, y) = x^2/2 + y^2/2$.

Les coordonnées caractéristiques sont $\xi(x, y) = y^2 - x^2/2$ et $\eta(x, y) = x^2/2 + y^2/2$.

Nous pouvons maintenant effectuer le changement de variables. Par la règle de chaînes, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -x \frac{\partial u}{\partial \xi} + x \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2y \frac{\partial u}{\partial \xi} + y \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} + (-x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} + x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (-2x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = -2xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} + y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Noter que $y^2 = 2(\xi + \eta)/3$ et $x^2 = (-2\xi + 4\eta)/3$. En substituant ceci dans l'équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} -9x^2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (-2y^2 - 2x^2 - 4xy) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (2y^2 - x^2 + 4xy) \frac{\partial u}{\partial \eta} - 3u &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2(x+y)^2}{9x^2y^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{(2y^2 - x^2 + 4xy)}{9x^2y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{3x^2y^2} u &= 0 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant décrire l'équation canonique pour le premier quadrant du plan, à savoir les points (x, y) tels que $x > 0$ et $y > 0$. Donc

$$x = \sqrt{\frac{(-2\xi + 4\eta)}{3}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\frac{2(\xi + \eta)}{3}}$$

Pour les autres quadrants, il suffit d'ajuster les signes devant les radicaux. Finalement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\left(\sqrt{2(\xi + \eta)/3} + \sqrt{(-2\xi + 4\eta)/3} \right)^2}{(\xi + \eta)(-2\xi + 4\eta)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{2\xi + 4\sqrt{2(\xi + \eta)(-2\xi + 4\eta)/9}}{2(\xi + \eta)(-2\xi + 4\eta)} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{3}{2(-2\xi + 4\eta)(\xi + \eta)} u = 0$$

Si nous avons utilisé les coordonnées $\alpha = \xi + \eta = 3y^2/2$ et $\beta = \xi - \eta = (y^2/2) - x^2$, alors nous obtiendrions la deuxième forme de l'équation canonique. Dans ce cas, nous aurions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{(\sqrt{\alpha - 3\beta} + 8\sqrt{2\alpha})}{6\alpha\sqrt{\alpha - 3\beta}} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{3}{2\alpha(\alpha - 3\beta)} u = 0.$$

ii) Pour l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

nous avons $B^2 - 4AC = (-xy)^2 - 4(x^2)(-6y^2) = 25x^2y^2$. Donc $B^2 - 4AC = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. De plus comme $25x^2y^2 \geq 0$, alors $B^2 - 4AC > 0$ si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Donc l'équation est hyperbolique aux points (x, y) où $x \neq 0$ et $y \neq 0$. En d'autres mots, l'équation est hyperbolique pour tous les points qui ne sont pas sur les axes des x et des y .

Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-xy) + \sqrt{25x^2y^2}}{2x^2} = \frac{2y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-xy) - \sqrt{25x^2y^2}}{2x^2} = \frac{-3y}{x}.$$

Nous pouvons résoudre ces équations caractéristiques par la méthode de séparation de variables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(y) = \ln(x) + \text{constante} \Rightarrow$$

$$y = x^2 c \Rightarrow x^{-2} y = c \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

Nous pouvons donc considérer la coordonnée caractéristique $\xi(x, y) = x^{-2}y$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{-3y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{-3y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{3} \ln(y) = \ln(x) + \text{constante} \Rightarrow$$

$$y = x^{-3} c' \Rightarrow x^3 y = c' \quad \text{où } c' \text{ est une constante.}$$

Nous pouvons donc considérer la coordonnée caractéristique $\eta(x, y) = x^3 y$.

Les coordonnées caractéristiques sont $\xi(x, y) = x^{-2}y$ et $\eta(x, y) = x^3 y$

Par la règle de chaînes, nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -2x^{-3}y \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3x^2y \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x^{-2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + x^3 \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 6x^{-4}y \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2x^{-3}y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 6xy \frac{\partial u}{\partial \eta} + 3x^2y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= 4x^{-6}y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 12x^{-1}y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 9x^4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 6x^{-4}y \frac{\partial u}{\partial \xi} + 6xy \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -2x^{-3} \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2x^{-3}y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + 3x^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + 3x^2y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= -2x^{-5}y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 3x^5y \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2x^{-3} \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3x^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^{-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + x^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = x^{-4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + x^6 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} (-25xy^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (8x^{-2}y - 2x^{-3}y) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (3x^3y + 3x^2y) \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2(4x-1)}{25x^4y} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{3x(x+1)}{25y} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Noter que $x^5 = \eta/\xi$ et $y^5 = \xi^3\eta^2$. Nous pouvons substituer dans l'équation ci-dessus. L'équation canonique correspondante est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2 \frac{(4\eta^{1/5} - \xi^{1/5})}{25\eta^{6/5}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - 3 \frac{(\eta^{1/5} + \xi^{1/5})}{25\xi\eta^{1/5}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Il existe aussi une deuxième forme de l'équation canonique en considérant les coordonnées $\alpha = \xi + \eta$ et $\beta = \xi - \eta$. Nous laissons aux étudiants le soin de calculer cette dernière.

Exercice 3.3

Pour l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

nous avons $B^2 - 4AC = (-2xy)^2 - 4x^2y^2 = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Cette équation est parabolique sur tout le plan $\mathbf{R}^2$. Dans le cas parabolique, il n'y a qu'une seule équation caractéristique

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{B}{2A} = -\frac{2xy}{2x^2} = -\frac{y}{x}.$$

Nous pouvons résoudre cette équation par séparation de variables

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(y) = -\ln(x) + \text{constante} \Rightarrow xy = c.$$

Une des coordonnées caractéristiques est $\xi(x, y) = xy$. Comme autre coordonnée caractéristique, il suffit de choisir une fonction $\eta(x, y)$ telle que $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$. Il y a beaucoup de choix, par exemple $\eta(x, y) = x$ satisfait cette propriété si nous nous restreignons au domaine obtenu en prenant le complément de l'axe des y dans le plan. Nous allons par la suite utiliser $\eta(x, y) = x$ sur ce domaine. Nous obtenons donc par la règle de chaînes

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

En substituant dans l'EDP, nous obtenons

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - (2xy + y) \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{(2x+1)y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Noter que $x = \eta$ et $y = \xi/\eta$. L'équation canonique est alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{(2\eta+1)\xi}{\eta^3} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Exercice 3.4

Pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0,$$

nous avons $B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Cette équation est elliptique sur tout le plan $\mathbf{R}^2$.

Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-2 + \sqrt{-4}}{2} = (-1 + i), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-2 - \sqrt{-4}}{2} = (-1 - i)$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 + i \quad \Rightarrow \quad dy = (-1 + i) dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int (-1 + i) dx \quad \Rightarrow \quad y = (-1 + i)x + \text{constante}$$

Une des coordonnées caractéristiques est $\xi(x, y) = y - (-1 + i)x$.

$$\frac{dy}{dx} = -1 - i \quad \Rightarrow \quad dy = (-1 - i) dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int (-1 - i) dx \quad \Rightarrow \quad y = (-1 - i)x + \text{constante}$$

L'autre coordonnée caractéristique est $\eta(x, y) = y - (-1 - i)x$. Ces deux fonctions $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ ne sont pas des fonctions réelles. Dans le cas elliptique, nous pouvons pallier à ceci en prenant les parties réelle et imaginaire de $\xi(x, y)$ (ou encore de $\eta(x, y)$). En d'autres mots, nous considérons les coordonnées $\alpha(x, y) = \text{Partie réelle de } \xi(x, y) = (x + y)$ et $\beta(x, y) = \text{Partie imaginaire de } \xi(x, y) = -x$.

En utilisant la règle de chaînes, nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}.$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons l'équation canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} - 3u = 0$$

Exercice 3.5

Pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

nous avons $B^2 - 4AC = (4)^2 - 4(1)(2) = 8$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Cette équation est hyperbolique sur tout le plan $\mathbf{R}^2$.

Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = (2 + \sqrt{2}), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = (2 - \sqrt{2})$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow dy = (2 + \sqrt{2}) dx \Rightarrow \int dy = \int (2 + \sqrt{2}) dx \Rightarrow y = (2 + \sqrt{2})x + \text{constante}$$

Une des coordonnées caractéristiques est $\xi(x, y) = y - (2 + \sqrt{2})x$.

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow dy = (2 - \sqrt{2}) dx \Rightarrow \int dy = \int (2 - \sqrt{2}) dx \Rightarrow y = (2 - \sqrt{2})x + \text{constante}$$

L'autre coordonnée caractéristique est $\eta(x, y) = y - (2 - \sqrt{2})x$.

Les coordonnées caractéristiques sont $\xi(x, y) = y - (2 + \sqrt{2})x$ et $\eta(x, y) = y - (2 - \sqrt{2})x$.

En utilisant la règle de chaînes, nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -(2 + \sqrt{2}) \frac{\partial u}{\partial \xi} - (2 - \sqrt{2}) \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -(2 + \sqrt{2}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= (2 + \sqrt{2})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (2 - \sqrt{2})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = -(2 + \sqrt{2}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - (2 - \sqrt{2}) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons l'équation canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2 + \sqrt{2}}{8} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{2 - \sqrt{2}}{8} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Si nous avons utilisé les coordonnées $\alpha = \xi + \eta = 2y - 4x$ et $\beta = \xi - \eta = -2\sqrt{2}x$, alors nous obtiendrions la deuxième forme de l'équation canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0$$

Exercice 3.6

a) Il nous faut calculer $\frac{\partial c}{\partial S}$ et $\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$ en fonction de $\frac{\partial c}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$ en utilisant la règle de chaînes. Nous avons $S = e^y$.

$$\frac{\partial c}{\partial S} = \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial S} + \frac{\partial c}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial c}{\partial y} = e^{-y} \frac{\partial c}{\partial y}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial c}{\partial y} \right) = (-1) S^{-2} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \\ &= \frac{-1}{S^2} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{S} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) \\ &= \frac{-1}{S^2} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = -e^{-2y} \frac{\partial c}{\partial y} + e^{-2y} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de Black-Scholes avec $S = e^y$, nous obtenons

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} e^{2y} \left[-e^{-2y} \frac{\partial c}{\partial y} + e^{-2y} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right] + r e^y \left[e^{-y} \frac{\partial c}{\partial y} \right] - r c \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial c}{\partial y} - r c.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

b) Il nous faut écrire $\frac{\partial c}{\partial \tau}$, $\frac{\partial c}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$ en fonction de $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
Nous avons

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} (e^{-r\tau} u(y, \tau)) = -r e^{-r\tau} u + e^{-r\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = e^{-r\tau} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = e^{-r\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Donc l'EDP de (a) devient

$$-r e^{-r\tau} u + e^{-r\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} e^{-r\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{-r\tau} \frac{\partial u}{\partial y} - r e^{-r\tau} u$$

et nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre 4

Exercice 4.1

a) $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ n'est ni pair, ni impair. En effet, $f(-1) = -2$ et $f(1) = 6$; conséquemment $f(-1) \neq f(1)$ ainsi que $f(-1) \neq -f(1)$.

b) $f(x) = x^2 + 5x^4$ est une fonction paire, car $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x)^4 = x^2 + 5x^4 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

c) $f(x) = x^2 \sin(x)$ est une fonction impaire, car $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin(x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

d) $f(x) = x^2 e^x$ n'est ni pair, ni impair. En effet, $f(-1) = (-1)^2 e^{-1} = 1/e$ et $f(1) = e$; conséquemment $f(-1) \neq -f(1)$ et $f(-1) \neq f(1)$. Nous utilisons le fait que $e > 1$ pour vérifier ces inégalités.

e) $f(x) = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ est une fonction impaire, car $f(-x) = (e^{-x} - e^{-(-x)})/2 = -(e^x - e^{-x})/2 = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 4.2

$$\int_{-1}^1 (1)(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{les fonctions 1 et } x \text{ sont orthogonales entre elles.}$$

$\int_{-1}^1 (1) \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3 - x}{2} \right)_{-1}^1 = 0 \Rightarrow$ les fonctions 1 et $\frac{(3x^2 - 1)}{2}$ sont orthogonales entre elles.

$\int_{-1}^1 (x) \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{(3x^3 - x)}{2} dx = \left(\frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \right)_{-1}^1 = 0 \Rightarrow$ les fonctions x et $\frac{(3x^2 - 1)}{2}$ sont orthogonales entre elles.

Exercice 4.3

a) La série de Fourier sera de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 x dx + \int_0^{\pi} c dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{x^2}{2} \right)_{-\pi}^0 + (cx)_{0}^{\pi} \right\} = \left(c - \frac{\pi}{2} \right).$$

et, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 x \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} c \cos(kx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{x \sin(kx)}{k} \right)_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(kx)}{k} dx + \left(\frac{c \sin(kx)}{k} \right)_{0}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(kx)}{k^2} \right)_{-\pi}^0 = \left(\frac{1 + (-1)^{k+1}}{k^2 \pi} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 x \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} c \sin(kx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{-x \cos(kx)}{k} \right)_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{\cos(kx)}{k} dx - \left(\frac{c \cos(kx)}{k} \right)_{0}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(-1)^{k+1} \pi}{k} \right) + \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} \right)_{-\pi}^0 - \left(\frac{c((-1)^k - 1)}{k} \right) \right\} = \left(\frac{1 + (-1)^{k+1}(c + \pi)}{k\pi} \right). \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{1}{2} \left(c - \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 + (-1)^{k+1}}{k^2 \pi} \right) \cos(kx) + \left(\frac{1 + (-1)^{k+1}(c + \pi)}{k\pi} \right) \sin(kx) \right]$$

b) La série de Fourier sera de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} x^2 dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ (x)_{-\pi}^0 + \left(\frac{x^3}{3} \right)_{0}^{\pi} \right\} = \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \right).$$

et, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{\sin(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(\frac{x^2 \sin(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin(kx)}{k} dx \right\} \\
&= \frac{-2}{k\pi} \left\{ \left(\frac{-x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(kx)}{k} dx \right\} \\
&= \frac{-2}{k\pi} \left\{ \left(\frac{\pi(-1)^{k+1}}{k} \right) + \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi} \right\} = \left(\frac{2(-1)^k}{k^2} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin(kx) dx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{-\cos(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^0 - \left(\frac{x^2 \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2x \cos(kx)}{k} dx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{((-1)^k - 1)}{k} - \frac{\pi^2(-1)^k}{k} + \left(\frac{2x \sin(kx)}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2 \sin(kx)}{k^2} dx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{((-1)^k - 1)}{k} - \frac{\pi^2(-1)^k}{k} + \left(\frac{2 \cos(kx)}{k^3} \right) \Big|_0^{\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{((-1)^k - 1)}{k} - \frac{\pi^2(-1)^k}{k} + \frac{2((-1)^k - 1)}{k^3} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(\pi^2 - 1)(-1)^{k+1} - 1}{k} - \frac{2((-1)^{k+1} + 1)}{k^3} \right\}.
\end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2(-1)^k}{k^2} \right) \cos(kx) + \left(\frac{(\pi^2 - 1)(-1)^{k+1} - 1}{k\pi} - \frac{2((-1)^{k+1} + 1)}{k^3\pi} \right) \sin(kx) \right]$$

c) La série de Fourier sera de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin(x)) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} - \cos(x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

et, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin(x)) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cos(kx) dx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{x \sin(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right\} \quad \text{car } \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cos(kx) dx = 0 \text{ par l'orthogonalité.} \\
&= \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\cos(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

Nous aurions aussi pu évaluer $a_k = 0$ en observant que $(x + \sin(x)) \cos(kx)$ est impair.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin(x)) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{-x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(kx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^{k+1} 2\pi}{k} + \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} + \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ 1 & \text{si } k = 1. \end{cases} = \frac{(-1)^{k+1} 2}{k} + \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ 1 & \text{si } k = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier est

$$3 \sin(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1} 2}{k} \right) \sin(kx).$$

d) La série de Fourier sera de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) dx = \frac{1}{\pi} \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2.$$

et, pour $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(1+x) \sin(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(kx)}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

et

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(-\frac{(1+x) \cos(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(-\frac{(1+x) \cos(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{(-1)^{k+1} 2}{k} \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier est

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1} 2}{k} \right) \sin(kx).$$

e) La série de Fourier sera de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} (e^x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi}.$$

Pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{e^x \sin(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \sin(kx)}{k} dx \right\} \\ &= \frac{-1}{\pi} \left\{ \left(\frac{-e^x \cos(kx)}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos(kx)}{k^2} dx \right\}. \end{aligned}$$

Conséquemment

$$a_k \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{e^\pi \cos(k\pi) - e^{-\pi} \cos(-k\pi)}{\pi k^2} \Rightarrow a_k = (-1)^k \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{(k^2 + 1)\pi}.$$

Pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{-e^x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos(kx)}{k} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(-1)^{k+1}(e^\pi - e^{-\pi})}{k} \right) + \left(\frac{e^x \sin(kx)}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \sin(kx)}{k^2} dx \right\}. \end{aligned}$$

Conséquemment

$$b_k \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = (-1)^{k+1} \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi k} \Rightarrow b_k = (-1)^{k+1} \frac{k(e^\pi - e^{-\pi})}{(k^2 + 1)\pi}.$$

Donc la série de Fourier est

$$\frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{(k^2 + 1)\pi} \cos(kx) + (-1)^{k+1} \frac{k(e^\pi - e^{-\pi})}{(k^2 + 1)\pi} \sin(kx) \right].$$

f) La série de Fourier sera de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x + x^2) dx = \frac{1}{\pi} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2 + \frac{2\pi^2}{3}.$$

et, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x + x^2) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(1 + x + x^2) \sin(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2x) \sin(kx)}{k} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(1 + 2x) \cos(kx)}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \cos(kx)}{k^2} dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(1 + 2x) \cos(kx)}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \left(\frac{2 \sin(kx)}{k^3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{(-1)^{k+1} 4}{k^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x + x^2) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{-(1 + x + x^2) \cos(kx)}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2x) \cos(kx)}{k} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(-1)^{k+1} 2\pi}{k} \right) + \left(\frac{(1 + 2x) \sin(kx)}{k^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \sin(kx)}{k^2} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{(-1)^{k+1} 2\pi}{k} \right) + \left(\frac{2 \cos(kx)}{k^3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{(-1)^{k+1} 2}{k} \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier est

$$\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{(-1)^{k+1}4}{k^2} \right) \cos(kx) + \left(\frac{(-1)^{k+1}2}{k} \right) \sin(kx) \right].$$

Exercice 4.4

Montrons que $\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx$. Nous supposons que $b \geq a$. En utilisant la substitution $u = x + (b - a)$, nous avons $du = dx$ et $\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(u - (b - a)) du$. Nous pouvons écrire $(b - a) = np + r$ où $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r < p$. Alors $f(u - (b - a)) = f(u - np - r) = f(u - r)$ car f est périodique de période p . Donc

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(u - r) du = \int_b^{b+r} f(u - r) du + \int_{b+r}^{b+p} f(u - r) du.$$

Mais en utilisant la substitution $v = u + p$ alors $dv = du$ et $\int_b^{b+r} f(u - r) du = \int_b^{b+r} f(u - r + p) du = \int_{b+p}^{b+p+r} f(v - r) dv$. Donc

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_{b+r}^{b+p} f(u - r) du + \int_{b+p}^{b+p+r} f(u - r) du = \int_{b+p}^{b+p+r} f(u - r) du = \int_b^{b+p} f(w) dw$$

en utilisant la substitution $w = u - r$ avec $dw = du$.

Exercice 4.5

a) $f(x) = x^2$ sur $[0, \pi]$ aura comme série de Fourier impaire $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ où

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(-\frac{x^2 \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2x \cos(kx)}{k} dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{(-1)^{k+1} \pi^2}{k} \right) + \left(\frac{2x \sin(kx)}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2 \sin(kx)}{k^2} dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{(-1)^{k+1} \pi^2}{k} \right) + \left(\frac{2 \cos(kx)}{k^3} \right) \Big|_0^{\pi} \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{(-1)^{k+1} \pi^2}{k} \right) + \left(\frac{((-1)^k - 1)2}{k^3} \right) \right\} \end{aligned}$$

La série de Fourier impaire sera

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{(-1)^{k+1} 2\pi}{k} \right) + \left(\frac{((-1)^k - 1)4}{k^3 \pi} \right) \right] \sin(kx)$$

b) La série de Fourier impaire de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2; \\ 2, & \text{si } \pi/2 < x \leq \pi; \end{cases}$$

sera de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ où

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin(kx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \sin(kx) dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left(-\frac{\cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \left(-\frac{2 \cos(kx)}{k} \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{2}{k\pi} [1 + \cos(k\pi/2) + (-1)^{k+1} 2]. \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier impaire recherchée est

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} [1 + \cos(k\pi/2) + (-1)^{k+1}2] \sin(kx)$$

c) $f(x) = \cos(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ a comme série de Fourier impaire $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ où

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)}{2} dx \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos((k+1)x)}{2(k+1)} + \frac{\cos((k-1)x)}{2(k-1)} \right) \Big|_0^{\pi}, & \text{si } k > 1 \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos((k+1)x)}{2(k+1)} \right) \Big|_0^{\pi}, & \text{si } k = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2k((-1)^{k+1} - 1)}{\pi(k^2 - 1)}, & \text{si } k > 1 \\ 0, & \text{si } k = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier impaire recherchée est

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k((-1)^{k+1} - 1)}{\pi(k^2 - 1)} \sin(kx)$$

Exercice 4.6

a) $f(x) = x^2$ sur $[0, \pi]$ aura comme série de Fourier paire

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad \text{où} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

Ici nous obtenons

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

et, si $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{x^2 \sin(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin(kx)}{k} dx \right\} = -\frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx \\ &= -\frac{4}{k\pi} \left\{ -\left(\frac{x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right\} = -\frac{4}{k\pi} \left\{ -\left(\frac{x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} + \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{(-1)^k 4}{k^2}. \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier paire recherchée est

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4}{k^2} \cos(kx).$$

b) $f(x) = \sin(2x)$ sur $[0, \pi]$ aura comme série de Fourier paire

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad \text{où} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

Ici nous obtenons

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x) dx = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(2x)}{2} \right) \Big|_0^\pi = 0$$

et si $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((k+2)x) - \sin((k-2)x)}{2} dx \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left\{ \left(-\frac{\cos((k+2)x)}{2(k+2)} \right) \Big|_0^\pi + \left(\frac{\cos((k-2)x)}{2(k-2)} \right) \Big|_0^\pi \right\} & \text{si } k \neq 2 \\ \frac{2}{\pi} \left\{ \left(-\frac{\cos((k+2)x)}{2(k+2)} \right) \Big|_0^\pi \right\} & \text{si } k = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{((-1)^k - 1)4}{(k^2 - 4)\pi} & \text{si } k \neq 2 \\ 0 & \text{si } k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier paire recherchée est

$$\left(\frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} \right) \cos(x) + \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{((-1)^k - 1)4}{(k^2 - 4)\pi} \right] \cos(kx).$$

c) $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ a comme série de Fourier paire

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad \text{où} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx) dx.$$

Ici nous obtenons

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x dx = \left(\frac{2e^x}{\pi} \right) \Big|_0^\pi = \frac{2(e^\pi - 1)}{\pi}$$

et si $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{e^x \sin(kx)}{k} \right) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^x \sin(kx)}{k} dx \right\} \\ &= \frac{2}{k\pi} \left\{ \left(\frac{e^x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^x \cos(kx)}{k} dx \right\}. \end{aligned}$$

Conséquemment

$$a_k \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) = \frac{2(e^\pi(-1)^k - 1)}{\pi k^2} \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{2(e^\pi(-1)^k - 1)}{(k^2 + 1)\pi}.$$

Donc la série de Fourier paire recherchée est

$$\frac{(e^\pi - 1)}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(e^\pi(-1)^k - 1)}{(k^2 + 1)\pi} \right] \cos(kx).$$

Exercice 4.7

a) $f(x) = e^{3x}$ sur $[-\pi, \pi]$ aura comme série de Fourier complexe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{où} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Conséquemment

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{3x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{(3-ik)x}}{(3-ik)} \right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(3-ik)\pi} - e^{-(3-ik)\pi}}{(3-ik)} \right] \\ &= \frac{(-1)^k (3+ik)(e^{3\pi} - e^{-3\pi})}{2\pi(9+k^2)} = \frac{(-1)^k \sinh(3\pi)(3+ik)}{\pi(9+k^2)}. \end{aligned}$$

Rappel: $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Donc la série de Fourier complexe recherchée est

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k \sinh(3\pi)(3+ik)}{\pi(9+k^2)} \right] e^{ikx}.$$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$ a comme série de Fourier complexe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{où} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Si $k = 0$, alors

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}.$$

Si $k \neq 0$, alors

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx = \left(\frac{e^{-ikx}}{-2\pi ik} \right)_0^{\pi} = \frac{i(e^{-ik\pi} - 1)}{2\pi k} = \frac{((-1)^k - 1)i}{2\pi k}.$$

Donc la série de Fourier complexe recherchée est

$$\frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{((-1)^k - 1)i}{2\pi k} \right] e^{ikx}$$

Chapitre 5

Exercice 5.1

Chacune de ces séries est la série d'une fonction lisse par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Au numéro 4.5, la série de Fourier impaire converge au point x_0 vers

$$\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}(x_0+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(x_0-))}{2}$$

où f_{impaire} est la fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$ correspondant à f et $\tilde{f}_{\text{impaire}}$, son prolongement périodique de période 2π . Au numéro 4.6, la série de Fourier paire converge au point x_0 vers

$$\frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}(x_0+) + \tilde{f}_{\text{paire}}(x_0-))}{2}$$

où f_{paire} est la fonction paire sur $[-\pi, \pi]$ correspondant à f et $\tilde{f}_{\text{paire}}$ son prolongement périodique de période 2π .

Pour 4.5 a), la série de Fourier impaire converge vers

$$\begin{aligned}
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi)-))}{2} &= \frac{(-\pi^2) + (\pi^2)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = -\pi; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi/2)-))}{2} &= \frac{(-(\pi/2)^2) + (-(\pi/2)^2)}{2} = -\frac{\pi^2}{4} \quad \text{pour } x_0 = -\frac{\pi}{2}; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}(0+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(0-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = 0; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi/2)-))}{2} &= \frac{((\pi/2)^2) + ((\pi/2)^2)}{2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{pour } x_0 = \frac{\pi}{2}; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi)-))}{2} &= \frac{(-\pi^2) + (\pi^2)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = \pi.
\end{aligned}$$

Pour 4.5 b), la série de Fourier impaire converge vers

$$\begin{aligned}
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi)-))}{2} &= \frac{(-2) + (2)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = -\pi; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi/2)-))}{2} &= \frac{(-1) + (-2)}{2} = -\frac{3}{2} \quad \text{pour } x_0 = -\frac{\pi}{2}; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}(0+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(0-))}{2} &= \frac{(1) + (-1)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = 0; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi/2)-))}{2} &= \frac{(2) + (1)}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{pour } x_0 = \frac{\pi}{2}; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi)-))}{2} &= \frac{(-2) + (2)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = \pi.
\end{aligned}$$

Pour 4.5 c), la série de Fourier impaire converge vers

$$\begin{aligned}
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi)-))}{2} &= \frac{(1) + (-1)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = -\pi; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((-\pi/2)-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = -\frac{\pi}{2}; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}(0+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}(0-))}{2} &= \frac{(1) + (-1)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = 0; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi/2)-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = \frac{\pi}{2}; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi)+) + \tilde{f}_{\text{impaire}}((\pi)-))}{2} &= \frac{(1) + (-1)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = \pi.
\end{aligned}$$

Pour 4.6 a), la série de Fourier paire converge vers

$$\begin{aligned}
\frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi)-))}{2} &= \frac{(\pi^2) + (\pi^2)}{2} = \pi^2 \quad \text{pour } x_0 = -\pi; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi/2)-))}{2} &= \frac{((\pi/2)^2) + ((\pi/2)^2)}{2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{pour } x_0 = -\frac{\pi}{2}; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}(0+) + \tilde{f}_{\text{paire}}(0-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 \quad \text{pour } x_0 = 0; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((\pi/2)-))}{2} &= \frac{((\pi/2)^2) + ((\pi/2)^2)}{2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{pour } x_0 = \frac{\pi}{2}; \\
\frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((\pi)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((\pi)-))}{2} &= \frac{(\pi^2) + (\pi^2)}{2} = \pi^2 \quad \text{pour } x_0 = \pi.
\end{aligned}$$

Pour 4.6 b), la série de Fourier paire converge vers

$$\begin{aligned}\frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi)-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 & \text{pour } x_0 = -\pi; \\ \frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi/2)-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 & \text{pour } x_0 = -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}(0+) + \tilde{f}_{\text{paire}}(0-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 & \text{pour } x_0 = 0; \\ \frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((\pi/2)-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 & \text{pour } x_0 = \frac{\pi}{2}; \\ \frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((\pi)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((\pi)-))}{2} &= \frac{(0) + (0)}{2} = 0 & \text{pour } x_0 = \pi.\end{aligned}$$

Pour 4.6 c), la série de Fourier paire converge vers

$$\begin{aligned}\frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi)-))}{2} &= \frac{(e^\pi) + (e^\pi)}{2} = e^\pi & \text{pour } x_0 = -\pi; \\ \frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((-\pi/2)-))}{2} &= \frac{(e^{\pi/2}) + (e^{\pi/2})}{2} = e^{\pi/2} & \text{pour } x_0 = -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}(0+) + \tilde{f}_{\text{paire}}(0-))}{2} &= \frac{(1) + (1)}{2} = 1 & \text{pour } x_0 = 0; \\ \frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((\pi/2)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((\pi/2)-))}{2} &= \frac{(e^{\pi/2}) + (e^{\pi/2})}{2} = e^{\pi/2} & \text{pour } x_0 = \frac{\pi}{2}; \\ \frac{(\tilde{f}_{\text{paire}}((\pi)+) + \tilde{f}_{\text{paire}}((\pi)-))}{2} &= \frac{(e^\pi) + (e^\pi)}{2} = e^\pi & \text{pour } x_0 = \pi.\end{aligned}$$

Exercice 5.2

a) La fonction $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ est paire. Conséquemment sa série de Fourier est de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

et, si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx \right\} = -\frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left\{ \left(\frac{-x \cos(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right\} = \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n\pi} \left(\frac{\sin(nx)}{n^2} \right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.\end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ est

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos(nx).$$

b) Ici $f(x)$ est lisse par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Si nous considérons la valeur vers laquelle cette série de Fourier converge lorsque $x = \pi$, nous obtenons

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} (-1)^n = \pi^2 = \tilde{f}(\pi)$$

parce que le prolongement périodique $\tilde{f}$ de f est continue à $x = \pi$ et aussi parce que $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Donc

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 5.3

a) La fonction $f(x) = x^4$ sur $[-\pi, \pi]$ est paire. Conséquemment sa série de Fourier est de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^5}{5} \right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5}$$

et, si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{x^4 \sin(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4x^3 \sin(nx)}{n} dx \right\} = -\frac{4}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(nx) dx \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left\{ \left(\frac{-x^3 \cos(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3x^2 \cos(nx)}{n} dx \right\} = \frac{8\pi^2(-1)^n}{n^2} - \frac{12}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

Mais nous avons vu au numéro 5.2 que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Donc

$$a_n = \frac{8\pi^2(-1)^n}{n^2} - \frac{12}{n^2} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \right) = (-1)^n \left[\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4} \right].$$

Donc la série de Fourier de $f(x) = x^4$ sur $[-\pi, \pi]$ est

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4} \right] \cos(nx).$$

b) Ici $f(x)$ est lisse par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Si nous considérons la valeur vers laquelle cette série de Fourier converge lorsque $x = \pi$, nous obtenons

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4} \right] (-1)^n = \pi^4 = \tilde{f}(\pi)$$

parce que le prolongement périodique $\tilde{f}$ de f est continue à $x = \pi$ et aussi parce que $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Donc

$$8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} \right) = \pi^4 - \frac{\pi^4}{5} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{1}{-48} \left[\frac{4\pi^4}{5} - \frac{8\pi^4}{6} \right] = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 5.4

a) Si $f(x) = \cos(x)$ sur $[-1, 1]$, alors la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

avec

$$a_0 = \int_{-1}^1 \cos(x) dx = (\sin(x))_{-1}^1 = 2 \sin(1)$$

et si $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 \cos(x) \cos(n\pi x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos((1+n\pi)x) + \cos((n\pi-1)x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n\pi+1)x)}{(n\pi+1)} + \frac{\sin((n\pi-1)x)}{(n\pi-1)} \right)_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin(1+n\pi)}{(n\pi+1)} + \frac{2 \sin(n\pi-1)}{(n\pi-1)} \right] \\ &= (-1)^n \sin(1) \left[\frac{1}{n\pi+1} - \frac{1}{n\pi-1} \right] = (-1)^{n+1} \frac{2 \sin(1)}{(n^2\pi^2-1)} \end{aligned}$$

à cause de la formule $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$. Noter qu'ici nous avons aussi utilisé le fait que $n\pi - 1 \neq 0$ et $n\pi + 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}, n \neq 0$.

Si $n \geq 1$, nous avons aussi que

$$b_n = \int_{-1}^1 \cos(x) \sin(n\pi x) dx = 0$$

parce que $\cos(x)$ est pair, $\sin(n\pi x)$ est impair et conséquemment $\cos(x) \sin(n\pi x)$ est impair. En conclusion, la série de Fourier de $f(x) = \cos(x)$ sur $[-1, 1]$ est

$$\sin(1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin(1)}{(n^2\pi^2-1)} \cos(n\pi x).$$

b) Si $f(x) = \sin(x)$ sur $[-1, 1]$, alors la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

avec

$$a_0 = \int_{-1}^1 \sin(x) dx = -(\cos(x))_{-1}^1 = 0$$

et si $n \geq 1$, alors

$$a_n = \int_{-1}^1 \sin(x) \cos(n\pi x) dx = 0$$

parce que $\sin(x)$ est impair, $\cos(n\pi x)$ est pair et conséquemment $\sin(x) \cos(n\pi x)$ est impair.

Si $n \geq 1$, nous avons aussi que

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 \sin(x) \sin(n\pi x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos((n\pi-1)x) - \cos((n\pi+1)x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n\pi-1)x)}{(n\pi-1)} - \frac{\sin((n\pi+1)x)}{(n\pi+1)} \right)_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin(n\pi-1)}{(n\pi-1)} - \frac{2 \sin(n\pi+1)}{(n\pi+1)} \right] \\ &= (-1)^{n+1} \sin(1) \left[\frac{1}{n\pi-1} + \frac{1}{n\pi+1} \right] = (-1)^{n+1} \frac{2n\pi \sin(1)}{(n^2\pi^2-1)} \end{aligned}$$

En conclusion, la série de Fourier de $f(x) = \sin(x)$ sur $[-1, 1]$ est

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n\pi \sin(1)}{(n^2\pi^2-1)} \sin(n\pi x).$$

c) Si $f(x) = e^x$ sur $[-1, 1]$, alors la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

avec

$$a_0 = \int_{-1}^1 e^x dx = (e^x)_{-1}^1 = (e - e^{-1})$$

et si $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 e^x \cos(n\pi x) dx = (e^x \cos(n\pi x))_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^x (n\pi) \sin(n\pi x) dx \\ &= (-1)^n (e - e^{-1}) + n\pi \left\{ (e^x \sin(n\pi x))_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x (n\pi) \cos(n\pi x) dx \right\} \\ &= (-1)^n (e - e^{-1}) - n^2 \pi^2 \int_{-1}^1 e^x \cos(n\pi x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(1 + n^2 \pi^2) \int_{-1}^1 e^x \cos(n\pi x) dx = (-1)^n (e - e^{-1}) \quad \Rightarrow \quad a_n = (-1)^n \frac{(e - e^{-1})}{(1 + n^2 \pi^2)}.$$

Si $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 e^x \sin(n\pi x) dx = (e^x \sin(n\pi x))_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x (n\pi) \cos(n\pi x) dx = -(n\pi) \int_{-1}^1 e^x \cos(n\pi x) dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n\pi(e - e^{-1})}{(1 + n^2 \pi^2)} \quad \text{par ce qui précède.} \end{aligned}$$

En conclusion, la série de Fourier de $f(x) = e^x$ sur $[-1, 1]$ est

$$\frac{(e^1 - e^{-1})}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{(e - e^{-1})}{(1 + n^2 \pi^2)} \cos(n\pi x) + (-1)^{n+1} \frac{n\pi(e - e^{-1})}{(1 + n^2 \pi^2)} \sin(n\pi x) \right].$$

Exercice 5.5

Considérons la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ pour $x \in [a, b]$. Comme f est une fonction continue sur $[a, b]$, cette intégrale existe. Noter que $F(x)$ est une fonction continue, étant l'intégrale d'une fonction intégrable, et $F'(x) = f(x)$ par le théorème fondamental du calcul.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \int_a^b g(x)F'(x) dx = (g(x)F(x))_a^b - \int_a^b g'(x)F(x) dx \quad \text{en intégrant par parties} \\ &= g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int_a^b g'(x)F(x) dx \\ &= g(b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g'(x)F(x) dx \quad \text{parce que } g(a) = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Parce que $g(x)$ est une fonction croissante, alors $g'(x) \geq 0$. Nous allons maintenant expliquer pourquoi

$$\int_a^b g'(x)F(x) dx = \alpha \int_a^b g'(x) dx$$

avec $\inf\{F(x) \mid a \leq x \leq b\} = m \leq \alpha \leq M = \sup\{F(x) \mid a \leq x \leq b\}$. En effet,

$$\int_a^b g'(x)F(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g'(y_i)F(y_i) \Delta x_i$$

où nous considérons la limite sur toutes les subdivisions $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ avec $n \rightarrow \infty$ et $\delta = \max\{\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}) \mid 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0$ et $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Mais $m \leq F(y_i) \leq M$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. Comme $g'(y_i) \geq 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, nous avons $m g'(y_i) \Delta x_i \leq g'(y_i)F(y_i) \Delta x_i \leq M g'(y_i) \Delta x_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ et

$$m \left(\sum_{i=1}^n g'(y_i) \Delta x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n g'(y_i)F(y_i) \Delta x_i \leq M \left(\sum_{i=1}^n g'(y_i) \Delta x_i \right).$$

En passant à la limite, nous obtenons

$$m \int_a^b g'(x) dx \leq \int_a^b g'(x)F(x) dx \leq M \int_a^b g'(x) dx$$

pour un α entre m et M .

Comme $F(x)$ est continue, alors il existe c entre a et b tel que $F(c) = \alpha$. En revenant à (*), nous avons

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= g(b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \int_a^b g'(x) dx = g(b) \int_a^b f(x) dx - (g(b) - g(a)) \int_a^c f(x) dx \\ &= g(b) \left(\int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right) = g(b) \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

C'est ce que nous voulions montrer.

Exercice 5.6

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N'_ϵ tel que $n \geq N'_\epsilon \Rightarrow |s_n - s| < \epsilon/2$ parce que la suite $\{s_n\}_{n=1}^\infty \rightarrow s$.

Nous voulons montrer que $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ converge aussi vers s .

Il existe un entier N''_ϵ tel que

$$n \geq N''_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{(s_1 - s) + (s_2 - s) + \dots + (s_{N'_\epsilon} - s)}{n} \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

parce que la suite $\{1/n\}_{n=1}^\infty \rightarrow 0$.

Prenons $N_\epsilon = \max\{N'_\epsilon, N''_\epsilon\}$. Si $n \geq N_\epsilon$, alors

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &= \left| \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n - ns}{n} \right| = \left| \frac{(s_1 - s) + (s_2 - s) + \dots + (s_{N'_\epsilon} - s) + \dots + (s_n - s)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(s_1 - s) + (s_2 - s) + \dots + (s_{N'_\epsilon} - s)}{n} \right| + \frac{|s_{N'_\epsilon+1} - s| + \dots + |s_n - s|}{n} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{(n - N'_\epsilon)}{n} \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

car $n \geq N''_\epsilon$ et parce que

$$\frac{(n - N'_\epsilon)}{n} < 1 \quad \text{si } n \geq N_\epsilon = \max\{N'_\epsilon, N''_\epsilon\}.$$

Donc $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty \rightarrow s$.

Chapitre 6

Exercice 6.1

a) Nous avons que

$$f(x) = \begin{cases} x/10, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/4; \\ -(2x - \pi)/20, & \text{si } \pi/4 \leq x \leq 3\pi/4; \\ (x - \pi)/10, & \text{si } 3\pi/4 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

et $g(x) \equiv 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. À cause de la solution générale du problème et que la corde est de longueur $\ell = \pi$, nous avons

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)).$$

De plus nous avons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} cn b_n \sin(nx)$$

sont respectivement les séries de Fourier impaires de $f(x)$ et $g(x)$. Comme $g(x) \equiv 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$, nous obtenons $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Il suffit donc de calculer les a_n .

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/4} \frac{x}{10} \sin(nx) dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{(\pi - 2x)}{20} \sin(nx) dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{(x - \pi)}{10} \sin(nx) dx \right\} \\ &= \frac{4}{10\pi n^2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

Donc la solution du problème est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10\pi n^2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) \sin(nx) \cos(cnt).$$

b) Nous avons que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/4; \\ h(4x - \pi)/\pi, & \text{si } \pi/4 \leq x \leq \pi/2; \\ h(3\pi - 4x)/\pi, & \text{si } \pi/2 \leq x \leq 3\pi/4; \\ 0, & \text{si } 3\pi/4 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

et $g(x) \equiv 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Nous procédons comme en a). À cause de la solution générale du problème et que la corde est de longueur $\ell = \pi$, nous avons

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)).$$

De plus nous avons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} cn b_n \sin(nx)$$

sont respectivement les séries de Fourier impaires de $f(x)$ et $g(x)$. Comme $g(x) \equiv 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$, nous obtenons $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Il suffit donc de calculer les a_n .

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{h(4x - \pi)}{\pi} \sin(nx) dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{h(3\pi - 4x)}{\pi} \sin(nx) dx \right\} \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2} \left(-\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right).
\end{aligned}$$

Donc la solution du problème est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h}{n^2\pi^2} \left(-\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) \sin(nx) \cos(cnt).$$

Exercice 6.2

Nous avons que $f(x) \equiv 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$ et

$$g(x) = \begin{cases} hx/a, & \text{si } 0 \leq x \leq a; \\ h(\pi - x)/(\pi - a), & \text{si } a \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

À cause de la solution générale du problème et que la corde est de longueur $\ell = \pi$, nous avons

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)).$$

De plus nous avons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} cn b_n \sin(nx)$$

sont respectivement les séries de Fourier impaires de $f(x)$ et $g(x)$. Comme $f(x) \equiv 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$, nous obtenons $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Il suffit donc de calculer les b_n .

$$cn b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^a \frac{hx}{a} \sin(nx) dx + \int_a^\pi \frac{h(\pi - x)}{(\pi - a)} \sin(nx) dx \right\} = \frac{2h \sin(na)}{n^2 a (\pi - a)}.$$

Donc

$$b_n = \frac{2h \sin(na)}{cn^3 a (\pi - a)}$$

et la solution générale est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h \sin(na)}{cn^3 a (\pi - a)} \sin(nx) \sin(cnt).$$

Exercice 6.3

a) Nous supposons que $u(x, y) = X(x)Y(y)$, alors en substituant dans l'EDP, nous avons $xX'Y - yXY' = 0$ où X' est la dérivée de X par rapport à x et Y' est la dérivée de Y par rapport à y . En divisant les deux côtés de cette équation par XY , nous obtenons

$$x \frac{X'}{X} = y \frac{Y'}{Y}.$$

Le terme de droite de cette dernière équation est une fonction de y et celui de gauche est une fonction de x . Donc chacun de ces termes doit être constant. Conséquemment

$$x \frac{X'}{X} = y \frac{Y'}{Y} = k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

Nous obtenons donc un système de deux équations différentielles ordinaires suivant:

$$\begin{cases} x \frac{dX}{dx} = kX \\ y \frac{dY}{dy} = kY \end{cases}$$

Nous pouvons résoudre ces équations différentielles ordinaires par séparation de variables.

$$x \frac{dX}{dx} = kX \Rightarrow \frac{dX}{X} = k \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dX}{X} = k \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(X) = k \ln(x) + C_0 \Rightarrow X(x) = C' x^k$$

et

$$y \frac{dY}{dy} = kY \Rightarrow \frac{dY}{Y} = k \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dY}{Y} = k \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(Y) = k \ln(y) + C_1 \Rightarrow Y(y) = C'' y^k$$

où C_0 , C_1 , C' et C'' sont des constantes.

Donc $u(x, y) = X(x)Y(y) = C(xy)^k$ est une solution de $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, où k et C sont des constantes.

b) Nous supposons que $u(x, y) = X(x)Y(y)$, alors en substituant dans l'EDP, nous avons $X'Y + XY' = 2(x+y)XY$ où X' est la dérivée de X par rapport à x et Y' est la dérivée de Y par rapport à y . En divisant les deux côtés de cette équation par XY , nous obtenons

$$\frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} = 2x + 2y \Leftrightarrow \frac{X'}{X} - 2x = -\frac{Y'}{Y} + 2y$$

Le terme de droite de cette dernière équation est une fonction de y et celui de gauche est une fonction de x . Donc chacun de ces termes doit être constant. Conséquemment

$$\frac{X'}{X} - 2x = -\frac{Y'}{Y} + 2y = k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

Nous obtenons donc un système de deux équations différentielles ordinaires suivant:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = (2x + k)X \\ \frac{dY}{dy} = (2y - k)Y \end{cases}$$

Nous pouvons résoudre ces équations différentielles ordinaires par séparation de variables.

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= (2x + k)X \Rightarrow \frac{dX}{X} = (2x + k) dx \Rightarrow \int \frac{dX}{X} = \int (2x + k) dx \Rightarrow \ln(X) = x^2 + kx + C_0 \\ &\Rightarrow X(x) = C' \exp(x^2 + kx) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dy} &= (2y - k)Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = (2y - k) dy \Rightarrow \int \frac{dY}{Y} = \int (2y - k) dy \Rightarrow \ln(Y) = y^2 - ky + C_1 \\ &\Rightarrow Y(y) = C'' \exp(y^2 - ky) \end{aligned}$$

où C_0 , C_1 , C' et C'' sont des constantes.

Donc $u(x, y) = X(x)Y(y) = C \exp(x^2 + y^2 + k(x - y))$ est une solution de $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x + y)u$, où k et C sont des constantes.

Exercice 6.4

a) Nous allons premièrement considérer le problème intermédiaire

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 & \text{où } u = u(x, t) \quad \text{avec les conditions:} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{pour tout } x \in [0, \ell] \\ u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\ell, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\ell, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \end{cases}$$

Nous allons maintenant déterminer des solutions de (*) de la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$. En substituant dans l'EDP, nous obtenons $XT^{(2)} + c^2 X^{(4)}T = 0$ où $X^{(4)}$ est la dérivée quatrième de X par rapport à x et $T^{(2)}$ est la dérivée seconde de T par rapport à t . En divisant par $c^2 XT$ les deux côtés de cette équation, nous

$$\frac{X^{(4)}}{X} = -\frac{1}{c^2} \frac{T^{(2)}}{T}.$$

Le terme de droite de cette dernière équation est une fonction de t et le terme de gauche est une fonction de x . Pour que l'égalité soit possible, il faut que chacun de ces termes soit constant. Nous obtenons

$$\frac{X^{(4)}}{X} = -\frac{1}{c^2} \frac{T^{(2)}}{T} = \lambda, \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Nous avons donc le système de deux équations différentielles ordinaires suivant:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \lambda X = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda c^2 T = 0.$$

Parce que nous cherchons des solutions non triviales, nous avons aussi les conditions suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell] \quad \Rightarrow \quad X(x)T'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T'(0) = 0.$$

$$u(0, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad X(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0.$$

$$u(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad X(\ell)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(\ell) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad X''(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X''(0) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad X''(\ell)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X''(\ell) = 0.$$

Il nous faut donc considérer les différents cas possibles pour λ . Si $\lambda < 0$, disons que $\lambda = -\nu^4$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de l'équation différentielle $X^{(4)} + \nu^4 X = 0$ est

$$\begin{aligned} X(x) = & A \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\nu x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\nu x\right) + B \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\nu x\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\nu x\right) + C \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\nu x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\nu x\right) \\ & + D \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\nu x\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\nu x\right). \end{aligned}$$

Si nous tenons compte des conditions $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$, $X''(0) = 0$ et $X''(\ell) = 0$, alors nous obtenons le système d'équations linéaires suivant:

$$M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ e^{\nu\ell/\sqrt{2}} \cos(\nu\ell/\sqrt{2}) & e^{\nu\ell/\sqrt{2}} \sin(\nu\ell/\sqrt{2}) & e^{-\nu\ell/\sqrt{2}} \cos(\nu\ell/\sqrt{2}) & e^{-\nu\ell/\sqrt{2}} \sin(\nu\ell/\sqrt{2}) \\ 0 & \nu^2 & 0 & -\nu^2 \\ -\nu^2 e^{\nu\ell/\sqrt{2}} \sin(\nu\ell/\sqrt{2}) & \nu^2 e^{\nu\ell/\sqrt{2}} \cos(\nu\ell/\sqrt{2}) & \nu^2 e^{-\nu\ell/\sqrt{2}} \sin(\nu\ell/\sqrt{2}) & -\nu^2 e^{-\nu\ell/\sqrt{2}} \cos(\nu\ell/\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M est $2\nu^4 (\cosh(\sqrt{2}\nu\ell) - \cos(\sqrt{2}\nu\ell))$. Rappelons que $\cosh(z) \geq 1$ avec $\cosh(z) = 1 \Leftrightarrow z = 0$ et $\cos(z) \leq 1$ avec $\cos(z) = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi n$ si $n \in \mathbf{Z}$. Parce que $\nu > 0$ et $\ell > 0$, nous obtenons que $(\cosh(\sqrt{2}\nu\ell) - \cos(\sqrt{2}\nu\ell)) > 0$ et le déterminant de M est $\neq 0$. Conséquemment le système d'équations linéaires ci-dessus a une seule solution $A = B = C = D = 0$. Nous devons donc exclure ce cas $\lambda < 0$, parce que nous cherchons une solution non-triviale. Si nous considérons maintenant le cas $\lambda = 0$, alors la solution générale de l'équation différentielle $X^{(4)} = 0$ est $X(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$. Si nous tenons compte des conditions $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$, $X''(0) = 0$ et $X''(\ell) = 0$, alors nous obtenons le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations linéaires ci-dessus a une seule solution $A = B = C = D = 0$. Nous devons donc exclure ce cas $\lambda = 0$, parce que nous cherchons une solution non-triviale. Il nous reste à considérer le cas $\lambda > 0$. Disons que $\lambda = \nu^4$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de l'équation différentielle $X^{(4)} - \nu^4 X = 0$ est

$$X(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x) + C \cosh(\nu x) + D \sinh(\nu x).$$

Si nous tenons compte des conditions $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$, $X''(0) = 0$ et $X''(\ell) = 0$, alors nous obtenons le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\nu\ell) & \sin(\nu\ell) & \cosh(\nu\ell) & \sinh(\nu\ell) \\ -\nu^2 & 0 & \nu^2 & 0 \\ -\nu^2 \cos(\nu\ell) & -\nu^2 \sin(\nu\ell) & \nu^2 \cosh(\nu\ell) & \nu^2 \sinh(\nu\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc $A = C = D = 0$ et $\sin(\nu\ell)B = 0$. Comme nous voulons une solution non-triviale, nous pouvons ainsi supposer que $B \neq 0$ et $\sin(\nu\ell) = 0$. Nous avons donc que

$$\nu = \frac{n\pi}{\ell} \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 \quad \text{où } n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$$

Pour $\lambda = \lambda_n$, la solution de $X^{(4)} + \lambda_n X = 0$ satisfaisant les conditions $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$, $X''(0) = 0$ et $X''(\ell) = 0$ est

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Si nous considérons maintenant l'équation $T^{(2)} + \lambda_n c^2 T = 0$, alors la solution générale est

$$T(t) = A' \cos\left(\frac{cn^2\pi^2}{\ell^2} t\right) + B' \sin\left(\frac{cn^2\pi^2}{\ell^2} t\right)$$

Mais nous avons aussi à considérer la condition $T'(0) = 0$, alors $B' = 0$. Donc la solution recherchée pour T est

$$T(t) = A' \cos \left(\frac{cn^2\pi^2}{\ell^2} t \right).$$

Donc une solution de (*) est

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \cos \left(\frac{cn^2\pi^2}{\ell^2} t \right).$$

À cause de la linéarité de l'EDP, nous obtenons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \cos \left(\frac{cn^2\pi^2}{\ell^2} t \right)$$

est la solution formelle du problème. Si nous revenons maintenant au problème initial, alors nous voulons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) = f(x).$$

Donc les a_n sont les coefficients de la série de Fourier impaire de $f(x)$, i.e.

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

b) Il nous suffit de déterminer les coefficients de la série de Fourier impaire de $f(x)$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x(\ell - x) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx = \frac{2}{\ell} \left\{ - \left(x(\ell - x) \frac{\ell}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \right) \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} (\ell - 2x) \frac{\ell}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx \right\} \\ &= \frac{2}{n\pi} \left\{ \left((\ell - 2x) \frac{\ell}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \right) \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (-2) \frac{\ell}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx \right\} = -\frac{4\ell}{n^2\pi^2} \left(\frac{\ell}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \right) \Big|_0^{\ell} \\ &= \frac{4\ell^2}{n^3\pi^3} ((-1)^{n+1} + 1). \end{aligned}$$

Donc la solution est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\ell^2}{n^3\pi^3} ((-1)^{n+1} + 1) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \cos \left(\frac{cn^2\pi^2}{\ell^2} t \right).$$

Chapitre 7

Exercice 7.1

Nous avons que la solution générale du problème de la chaleur est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \exp(-\lambda_n^2 t) \quad \text{où } \lambda_n = cn\pi/\ell \text{ et } c^2 = K\sigma/\rho.$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

est la série de Fourier impaire de $f(x)$. Ici $c^2 = (1.04 \times 0.056)/10.6 = 5.49434 \times 10^{-3}$ et $\ell = 10$

a) Pour

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 5; \\ 10 - x, & \text{si } 5 \leq x \leq 10; \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{10} \int_0^{10} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \frac{2}{10} \left\{ \int_0^5 x \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx + \int_5^{10} (10 - x) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx \right\} \\ &= \frac{40}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc la solution générale est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) \exp(-5.49434 \times 10^{-5} \pi^2 n^2 t).$$

b) Pour $f(x) = x(100 - x^2)$, alors

$$a_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \frac{2}{10} \int_0^{10} x(100 - x^2) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \frac{(-1)^{n+1} 12000}{n^3 \pi^3}.$$

Donc la solution générale est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} 12000}{n^3 \pi^3} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) \exp(-5.49434 \times 10^{-5} \pi^2 n^2 t).$$

c) Pour $f(x) = x(10 - x)$, alors

$$a_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \frac{2}{10} \int_0^{10} x(10 - x) \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \frac{400((-1)^{n+1} + 1)}{n^3 \pi^3}.$$

Donc la solution générale est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{400((-1)^{n+1} + 1)}{n^3 \pi^3} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) \exp(-5.49434 \times 10^{-5} \pi^2 n^2 t).$$

Exercice 7.2

Nous voulons étudier le problème suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0$$

avec les conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad \text{ainsi que} \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, \ell].$$

Nous devons premièrement considérer le problème intermédiaire (*) suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } u = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0$$

avec les conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Nous cherchons à déterminer des solutions de ce dernier problème qui sont de la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$. En substituant dans l'EDP, nous obtenons $XT' = c^2 X''T$ où X'' est la dérivée seconde de X par rapport à x et T' est la dérivée de T par rapport à t . En divisant les deux côtés de l'équation par $c^2 XT$, nous obtenons

$$\frac{1}{c^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Le terme de gauche est une fonction de t et celui de droite, une fonction de x . Pour que ceci soit possible, il faut que ces deux termes soient constants. Donc

$$\frac{1}{c^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Nous pouvons aussi tenir compte des conditions au bord. Nous obtenons ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(\ell)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(\ell) = 0.$$

En résumé, nous devons considérer le système d'équations différentielles ordinaires suivant:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{avec} \quad X'(0) = 0 \quad \text{et} \quad X'(\ell) = 0 \\ T' - \lambda c^2 T = 0 \end{cases}$$

Il nous faut maintenant considérer les différents cas pour λ . Si $\lambda > 0$, disons $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $X'' - \lambda X = 0$ est $X(x) = Ae^{\nu x} + Be^{-\nu x}$. Parce que $X'(x) = A\nu e^{\nu x} - B\nu e^{-\nu x}$ et en considérant les deux conditions $X'(0) = 0$ et $X'(\ell) = 0$, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{pmatrix} \nu & -\nu \\ \nu e^{\nu \ell} & -\nu e^{-\nu \ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Parce que $\nu \ell \neq 0$, alors le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} \nu & -\nu \\ \nu e^{\nu \ell} & -\nu e^{-\nu \ell} \end{pmatrix} = \nu^2(e^{\nu \ell} - e^{-\nu \ell}) = 2\nu^2 \sinh(\nu \ell) \neq 0$$

et conséquemment la seule solution du système d'équations linéaires est $A = B = 0$. Il nous faut donc exclure le cas $\lambda > 0$. Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de $X'' = 0$ est $X(x) = A + Bx$. Parce que $X'(x) = B$ et en considérant les deux conditions $X'(0) = 0$ et $X'(\ell) = 0$, nous obtenons une seule équation $B = 0$. Il nous faut donc inclure ce cas $\lambda = 0$ et dans ce cas $X(x) \equiv A$ est une fonction constante. Finalement si $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $X'' - \lambda X = 0$ est $X(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)$. Parce que $X'(x) = -\nu A \sin(\nu x) + \nu B \cos(\nu x)$ et en considérant les deux conditions $X'(0) = 0$ et $X'(\ell) = 0$, nous obtenons le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\nu \sin(\nu \ell) & \nu \cos(\nu \ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De ceci, nous obtenons que $B = 0$ et $-\nu \sin(\nu\ell)A = 0$. Comme nous cherchons une solution $X(x)$ non-triviale, nous pouvons supposer que $A \neq 0$ et conséquemment $\sin(\nu\ell) = 0$. Rappelons que $\nu > 0$. Donc $\nu\ell = n\pi$ pour $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$, $\lambda = -(n\pi/\ell)^2$ et $X(x) = A \cos(n\pi x/\ell)$ où $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.

En conclusion pour que l'équation $X'' - \lambda X = 0$ avec les conditions $X'(0) = 0$ et $X'(\ell) = 0$ ait une solution non-nulle, il faut que soit $\lambda = 0$ et dans ce cas $X(x) \equiv A$, une constante; soit $\lambda = -(n\pi/\ell)^2$ et $X(x) = A \cos(n\pi x/\ell)$.

Si nous considérons maintenant l'équation $T' - \lambda c^2 T = 0$ pour ces différents λ . Dans le cas où $\lambda = 0$, alors la solution générale de $T' = 0$ est $T(t) \equiv D$, où D est une constante. Dans le cas où $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/\ell)^2$ où $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$, alors la solution générale de $T' - \lambda c^2 T = 0$ est $T(t) = D \exp(-(cn\pi/\ell)^2 t)$, où D est une constante.

Nous pouvons conclure que si $\lambda = 0$, alors $u(x, t) = X(x)T(t) \equiv AD$ est une solution du problème intermédiaire (*); alors que si $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/\ell)^2$, alors $u(X, t) = X(x)T(t) = A \cos(n\pi x/\ell) \exp(-(cn\pi/\ell)^2 t)$ est aussi une solution du problème intermédiaire (*). Parce que l'équation de la chaleur est linéaire, nous pouvons additionner ces solutions. Donc la solution formelle du problème intermédiaire (*) est

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{\ell}\right]^2 t\right).$$

Si nous revenons au problème initiale, il nous faut considérer la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

c'est-à-dire que les coefficients a_n pour $n \geq 0$ sont les coefficients de la série de Fourier paire de $f(x)$. En d'autres mots,

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

b) En utilisant a), il nous faut déterminer la série de Fourier paire de $f(x) = 3\pi x^2 - 2x^3$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3\pi x^2 - 2x^3) dx = \pi^3$$

et, si $n \geq 1$, alors

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3\pi x^2 - 2x^3) \cos(nx) dx = \frac{(1 + (-1)^{n+1})24}{\pi n^4}.$$

Donc la solution recherchée est

$$u(x, t) = \frac{\pi^3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{n+1})24}{\pi n^4} \cos(nx) \exp(-n^2 t).$$

Exercice 7.3

Nous voulons résoudre le problème de la chaleur suivant:

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec les conditions } u(0, t) = U_1, \quad u(\ell, t) = U_2 \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et } U_1 \neq U_2.$$

Il faut noter que si $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ sont deux solutions de (*), alors $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ est une solution du problème de la chaleur suivant:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{avec les conditions } v(0, t) = 0, \quad v(\ell, t) = 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Par ce qui fut démontré, la solution générale de ce dernier problème est

$$v(x, t) = \sum_{n=1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{\ell}\right]^2 t\right).$$

Donc si $u_2(x, t)$ est une solution particulière de (*), alors

$$u(x, t) = u_2(x, t) + \sum_{n=1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{\ell}\right]^2 t\right)$$

est la solution générale du problème (*). Nous pouvons prendre comme solution particulière

$$u_2(x, t) = (U_2 - U_1) \left(\frac{x}{\ell}\right) + U_1.$$

En effet,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \quad \text{et} \quad u_2(0, t) = U_1, \quad u_2(\ell, t) = U_2 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Conséquemment la solution générale de (*) est

$$u(x, t) = (U_2 - U_1) \left(\frac{x}{\ell}\right) + U_1 + \sum_{n=1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{\ell}\right]^2 t\right).$$

Si $t \rightarrow \infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{\ell}\right]^2 t\right) = 0$$

et nous aurons que

$$u_I(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = (U_2 - U_1) \left(\frac{x}{\ell}\right) + U_1$$

sera la température après un long intervalle de temps.

Nous pouvons donner une solution plus heuristique. Lorsque $t \rightarrow \infty$, alors $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$ et donc $u_I(x)$ sera une solution de l'équation $u_I''(x) = 0$ et ainsi $u_I(x) = A + Bx$. Comme $u_I(0) = U_1$ et $u_I(\ell) = U_2$, nous obtenons que

$$u_I(x) = (U_2 - U_1) \left(\frac{x}{\ell}\right) + U_1.$$

Exercice 7.4

a) Nous avons que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right).$$

Conséquemment

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2 + y^2)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{x^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ &\quad - \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{2x^2 z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} \\ &\quad - \frac{2xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{(y^2 + z^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &\quad + \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2}} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{y^2 z (x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2 z (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 \sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \frac{\partial u}{\partial \phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{(x^2 + y^2)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{y^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\
&+ \frac{2xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{2y^2 z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \\
&+ \frac{2xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{(x^2 + z^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \frac{\partial u}{\partial r} \\
&- \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{x^2 z (x^2 + y^2 + z^2) - 2y^2 z (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 \sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{2z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} \\
&+ \frac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2z\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

Conséquemment

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{\partial u}{\partial r} \\
&+ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

Parce que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ et $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2(\phi)$, nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

Alors l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right).$$

b) Dans ce cas, $u(r, \theta, \phi, t)$ est indépendant de θ et ϕ . Alors

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Conséquemment l'équation de la chaleur se simplifie à la nouvelle équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

De plus nous avons les conditions $u(R, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et $u(r, 0) = f(r)$ pour tout $r \in [0, R]$.

c) Nous devons donc résoudre le problème suivant

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & \text{avec les conditions} \\ u(R, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \\ u(r, 0) = f(r) & \text{pour tout } r \in [0, R] \\ \text{et } u \text{ est une fonction bornée.} \end{cases}$$

Si nous utilisons la nouvelle fonction v définie par $v = r u$, alors $u = r^{-1}v$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r^{-1} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -r^{-2}v + r^{-1} \frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 2r^{-3}v - 2r^{-2} \frac{\partial v}{\partial r} + r^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

En substituant dans l'EDP de (*), nous obtenons

$$r^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \left(r^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2r^{-2} \frac{\partial v}{\partial r} + 2r^{-3}v + 2r^{-2} \frac{\partial v}{\partial r} - 2r^{-3}v \right).$$

Après simplification, nous obtenons le problème suivant à résoudre

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} & \text{avec les conditions} \\ v(R, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \\ v(r, 0) = r f(r) & \text{pour tout } r \in [0, R] \\ \text{et } v(0, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0. \end{cases}$$

Cette dernière condition vient du fait que la fonction u est bornée.

Nous allons maintenant résoudre le problème (**) par la méthode de séparation de variables. Pour ce faire, nous allons premièrement considérer le problème intermédiaire:

$$\begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} & \text{avec les conditions} \\ v(R, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \\ \text{et } v(0, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0. \end{cases}$$

Posons $v(r, t) = F(r)G(t)$. Alors en substituant dans l'équation de la chaleur et en divisant ensuite par les deux côtés de l'équation par $c^2 FG$, nous obtenons

$$FG' = c^2 GF'' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{G'}{G} = \frac{F''}{F} \quad \text{où } G' = \frac{dG}{dt} \text{ et } F'' = \frac{d^2 F}{dr^2}.$$

Le côté droit de cette dernière équation est une fonction de r , alors que le côté gauche est une fonction de t . Pour que ceci soit possible, il faut que chacune de ces expressions soient une constante. Donc

$$\frac{1}{c^2} \frac{G'}{G} = \frac{F''}{F} = \lambda \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Nous devons aussi tenir compte des conditions du problème. Nous obtenons ainsi

$$v(R, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(R)G(t) = 0, \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F(R) = 0 \quad \text{et}$$

$$v(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(0)G(t) = 0, \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F(0) = 0.$$

En résumé, nous devons déterminer les fonctions $F(r)$ et $G(t)$ telles que

$$\frac{d^2 F}{dr^2} - \lambda F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dG}{dt} - c^2 \lambda G = 0 \quad \text{avec } F(0) = F(R) = 0.$$

Si $\lambda > 0$, disons $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $F'' - \lambda F = 0$ est $F(r) = Ae^{\nu r} + Be^{-\nu r}$. Parce que $\nu > 0$, $R > 0$, $F(0) = A + B = 0$ et $F(R) = Ae^{\nu R} + Be^{-\nu R} = 0$, nous obtenons $A = B = 0$. Il nous faut donc exclure le cas $\lambda > 0$. Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de $F'' = 0$ est $F(r) = A + Br$. Parce que $F(0) = A = 0$ et $F(R) = A + BR = 0$, nous obtenons que $A = B = 0$. Là aussi nous devons exclure le

cas $\lambda = 0$. Il nous reste à considérer le cas $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $F'' - \lambda F = 0$ est $F(r) = A \cos(\nu r) + B \sin(\nu r)$. Parce que $F(0) = A = 0$ et $F(R) = A \cos(\nu R) + B \sin(\nu R) = 0$, alors $A = 0$ et $B \sin(\nu R) = 0$. Comme nous cherchons à déterminer des solutions non-triviales et que $A = 0$, nous pouvons supposer que $B \neq 0$. Ainsi $\sin(\nu R) = 0$. Conséquemment $\nu = n\pi/R$ et $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/R)^2$ où $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 1$. De plus pour ce $\lambda = \lambda_n$, $F(r) = B_n \sin(n\pi r/R)$. Nous pouvons aussi déterminer la solution générale de $G' - c^2 \lambda G = 0$ lorsque $\lambda = \lambda_n$. Nous obtenons que $G(t) = D_n \exp(-(cn\pi/R)^2 t)$. Ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$,

$$v_n(r, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{R}\right]^2 t\right) \quad \text{est une solution du problème } \begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix}.$$

Conséquemment

$$u_n(r, t) = a_n r^{-1} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{R}\right]^2 t\right)$$

est une solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & \text{avec les conditions} \\ u(R, t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et} \quad u \text{ est une fonction bornée.} \end{cases}$$

Comme cette dernière équation est linéaire, nous pouvons additionner ces solutions. Nous obtenons ainsi que

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-1} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{R}\right]^2 t\right)$$

est une solution formelle du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{avec la condition } u(R, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Si maintenant nous ajoutons la condition

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-1} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) = f(r),$$

nous obtenons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)$$

est la série de Fourier impaire de la fonction $r f(r)$. Ainsi

$$a_n = \frac{2}{R} \int_0^R r f(r) \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) dr.$$

En conclusion, la solution formelle du problème est

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-1} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{R}\right]^2 t\right) \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{2}{R} \int_0^R r f(r) \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) dr.$$

Chapitre 8

Exercice 8.1

a) Nous considérons premièrement le problème intermédiaire

$$(*) \quad \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{avec } u(x, 0) = 0, \quad u(x, N) = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq M, \quad 0 \leq y \leq N \right.$$

Nous cherchons à déterminer les solutions non-triviales de (*) de la forme $u(x, y) = X(x)Y(y)$. En substituant dans l'EDP et en séparant les variables, nous obtenons

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Dans cette dernière équation, le terme de gauche est une fonction de x et celui de droite, une fonction de y . Pour que cette équation soit vérifiée, il faut que chacun des termes soit égal à une constante λ . Nous obtenons ainsi

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0; \\ Y'' + \lambda Y = 0. \end{cases}$$

Si nous considérons les conditions à la frontière du problème (*), nous obtenons

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0, \quad \forall x \text{ avec } 0 \leq x \leq M \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0;$$

$$u(x, N) = X(x)Y(N) = 0, \quad \forall x \text{ avec } 0 \leq x \leq M \quad \Rightarrow \quad Y(N) = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = X(0)Y'(y) = 0, \quad \forall y \text{ avec } 0 \leq y \leq N \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0.$$

Noter que $X(x) \neq 0$ pour un $x = x_0$. Sinon nous aurions la solution triviale. De même que $Y'(y) \neq 0$ pour un $y = y_0$. Sinon $Y'(y) = 0$ pour tout y , $0 \leq y \leq N$, signifie que $Y(y)$ est une fonction constante et comme $Y(0) = 0$, nous aurons la solution triviale. Nous avons donc le système d'équations différentielles ordinaires avec conditions suivant:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{avec } X(0) = 0; \\ Y'' + \lambda Y = 0 & \text{avec } Y(0) = Y(N) = 0. \end{cases}$$

Nous allons premièrement étudier la seconde équation $Y'' + \lambda Y = 0$ avec $Y(0) = Y(N) = 0$ pour déterminer les valeurs possibles de λ . Il est préférable de commencer avec cette équation parce qu'il y a deux conditions: $Y(0) = 0$ et $Y(N) = 0$ au lieu d'une seule dans le cas de X .

Si $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors $Y(y) = Ae^{\nu y} + Be^{-\nu y}$ est la solution générale de l'équation $Y'' + \lambda Y = 0$. Mais

$$\begin{cases} Y(0) = A + B = 0 \\ Y(N) = Ae^{\nu N} + Be^{-\nu N} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = B = 0,$$

parce que $\nu > 0$ et $N > 0$. Nous devons donc exclure le cas $\lambda < 0$.

Si $\lambda = 0$, alors $Y(y) = A + By$ est la solution générale de l'équation $Y'' = 0$. Mais

$$\begin{cases} Y(0) = A = 0 \\ Y(N) = A + BN = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = B = 0,$$

parce que $N > 0$.

Si $\lambda > 0$, disons $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors $Y(y) = A \cos(\nu y) + B \sin(\nu y)$ est la solution générale de l'équation $Y'' + \lambda Y = 0$. Mais

$$\begin{cases} Y(0) = A = 0 \\ Y(N) = A \cos(\nu N) + B \sin(\nu N) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\nu N) = 0 \end{cases}$$

Comme $A = 0$ et que nous cherchons une solution non-triviale, nous pouvons supposer que $B \neq 0$. Donc $\sin(\nu N) = 0$ et $\nu N = n\pi$ où $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. En d'autres mots,

$$\nu = \nu_n = \frac{n\pi}{N}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{N}\right)^2 \quad \text{et} \quad Y(y) = Y_n(y) = B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right)$$

sont respectivement les valeurs possibles de ν , λ et les fonctions Y solution de $Y'' + \lambda Y = 0$ avec $Y(0) = Y(N) = 0$. Les λ_n sont les valeurs propres et les Y_n , les fonctions caractéristiques, où $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

Si maintenant nous considérons l'équation $X'' - \lambda X = 0$ avec $X(0) = 0$ pour $\lambda = \lambda_n = (n\pi/N)^2$, nous obtenons la solution générale

$$X(x) = C \exp\left(\frac{n\pi x}{N}\right) + D \exp\left(-\frac{n\pi x}{N}\right).$$

De la condition $X(0) = C + D = 0$, nous obtenons $D = -C$. Donc pour $\lambda = \lambda_n$, la solution de $X'' + \lambda X = 0$ avec $X(0) = 0$ est

$$X(x) = X_n(x) = C_n \left[\exp\left(\frac{n\pi x}{N}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi x}{N}\right) \right] = 2C_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right).$$

Ainsi pour chaque $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$,

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right)$$

est une solution du problème intermédiaire (*). Par le principe de superposition, nous obtenons que

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right)$$

est une solution formelle du problème (*).

Si maintenant nous revenons au problème de départ, il nous faut tenir compte de la condition

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M, y) = f(y).$$

Nous obtenons alors en dérivant terme-à-terme par rapport à y et en posant $x = M$ que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi M}{N}\right) = f(y)$$

Nous avons ainsi à exprimer $f(y)$ comme une série de Fourier paire. Donc

$$a_n \left(\frac{n\pi}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi M}{N}\right) = \frac{2}{N} \int_0^N f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy.$$

Donc la solution formelle du problème de départ est

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right) \quad \text{où } a_n = \left[\frac{2}{n\pi \sinh(n\pi M/N)} \right] \int_0^N f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy.$$

b) Nous considérons premièrement le problème intermédiaire

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{avec} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, N) = 0, \quad u(0, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = 0 \quad \text{et} \quad u(M, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(M, y) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq M, \quad 0 \leq y \leq N. \end{array} \right.$$

Dans ce problème, les conditions à la frontière sont homogènes.

Nous cherchons les solutions non-triviales de (*) de la forme $u(x, y) = X(x)Y(y)$. En substituant dans l'EDP et en séparant les variables

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Dans cette dernière équation, le terme de gauche est une fonction de x et celui de droite, une fonction de y . Pour que cette équation soit vérifiée, il faut que chacun des termes soit égal à une constante λ . Nous obtenons ainsi

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X = 0; \\ Y'' + \lambda Y = 0. \end{cases}$$

Si nous considérons les conditions à la frontière du problème (*), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, N) &= X'(x)Y(N) = 0, \quad \forall x \in [0, M]; \\ u(0, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) &= X(0)Y(y) - X(0)Y'(y) = 0, \quad \forall y \in [0, N]; \\ u(M, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(M, y) &= X(M)Y(y) - X(M)Y'(y) = 0, \quad \forall y \in [0, N]. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que de ces équations, nous obtenons que $Y(N) = 0$, $X(0) = 0$ et $X(M) = 0$. Montrons qu'il existe un x_0 tel que $X'(x_0) \neq 0$. En effet si $X'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, M]$, alors $X(x) = A$ pour tout $x \in [0, M]$ avec A , une constante non nulle. Parce que $X'' - \lambda X = 0$ et $X'' \equiv 0$, nous obtenons que $\lambda = 0$. Donc $Y'' = 0 \Rightarrow Y(y) = B + Cy$ et $Y(y) - Y'(y) = (B - C) + Cy$ pour $y \in [0, N]$. Comme nous cherchons des solutions non-triviales, nous avons que $Y \neq 0$, i.e. B ou $C \neq 0$, mais nous obtenons ainsi que $Y - Y' \neq 0$. Il existe un $y = y_0$ tel que $Y(y_0) - Y'(y_0) \neq 0$. De $X(0)[Y(y) - Y'(y)] = 0$ à $y = y_0$, nous obtenons que $X(0) = 0 = A$, mais ceci contredit notre hypothèse que A est une constante non nulle. De tout ceci, nous pouvons donc affirmer qu'il existe $x = x_0$ tel que $X'(x_0) \neq 0$. De $X'(x)Y(N) = 0$ à $x = x_0$, nous avons $Y(N) = 0$. Maintenant si $Y(y) - Y'(y) = 0$ pour tout $y \in [0, N]$, alors $Y(y) = De^y$ est la solution générale de $Y' = Y$. Comme $Y(N) = De^N = 0$, nous obtenons que $D = 0$, mais ceci est impossible, car sinon nous aurions la solution triviale. Conséquemment il existe un $y = y_0$ tel que $Y(y_0) - Y'(y_0) \neq 0$. De $X(0)[Y(y) - Y'(y)] = 0$ à $y = y_0$, nous avons $X(0) = 0$. De $X(M)[Y(y) - Y'(y)] = 0$ à $y = y_0$, nous avons $X(M) = 0$.

Nous avons donc le système d'équations différentielles ordinaires avec conditions suivant:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{avec } X(0) = 0 \text{ et } X(M) = 0; \\ Y'' + \lambda Y = 0 & \text{avec } Y(N) = 0. \end{cases}$$

Nous allons considérer la première équation avec ses conditions.

Si $\lambda > 0$, disons $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors $X(x) = A'e^{\nu x} + B'e^{-\nu x}$ est la solution générale de $X'' - \lambda X = 0$. Nous avons

$$\begin{cases} X(0) = A' + B' = 0 \\ X(M) = A'e^{\nu M} + B'e^{-\nu M} = 0 \end{cases} \Rightarrow A' = B' = 0$$

parce que $\nu > 0$ et $M > 0$. Il nous faut donc exclure ce cas.

Si $\lambda = 0$, alors $X(x) = A' + B'x$ est la solution générale de $X'' = 0$. Nous avons

$$\begin{cases} X(0) = A' = 0 \\ X(M) = A' + B'M = 0 \end{cases} \Rightarrow A' = B' = 0$$

parce que $M > 0$. Il nous faut donc exclure ce cas.

Si $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors $X(x) = A' \cos(\nu x) + B' \sin(\nu x)$ est la solution générale de $X'' - \lambda X = 0$. Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = A' = 0 \\ X(M) = A' \cos(\nu M) + B' \sin(\nu M) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A' = 0 \\ B' \sin(\nu M) = 0. \end{array} \right\}$$

Comme nous cherchons des solutions non-triviales et que $A' = 0$, nous pouvons supposer que $B' \neq 0$. Nous obtenons alors que $\sin(\nu M) = 0$ et $\nu M = n\pi$ où $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. En d'autres mots,

$$\nu = \nu_n = \frac{n\pi}{M}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2 \quad \text{et} \quad X(x) = X_n(x) = B'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right)$$

sont respectivement les valeurs possibles de ν , λ et les fonctions X solution de $X'' + \lambda X = 0$ avec $X(0) = X(M) = 0$. Les λ_n sont les valeurs propres et les X_n , les fonctions caractéristiques, où $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

Si nous considérons maintenant l'autre équation $Y'' + \lambda Y = 0$ avec $Y(N) = 0$ pour $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/M)^2$, alors la solution générale est

$$Y(y) = C' \exp\left(\frac{n\pi y}{M}\right) + D' \exp\left(-\frac{n\pi y}{M}\right).$$

De la condition $Y(N) = 0$, nous obtenons

$$Y(N) = C' \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right) + D' \exp\left(-\frac{n\pi N}{M}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad D' = -C' \exp\left(\frac{2n\pi N}{M}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} Y(y) &= C' \exp\left(\frac{n\pi y}{M}\right) - C' \exp\left(\frac{2n\pi N}{M}\right) \exp\left(-\frac{n\pi y}{M}\right) \\ &= C' \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right) \left[\exp\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) \right] \\ &= 2C' \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right). \end{aligned}$$

Donc pour $\lambda = \lambda_n$, la solution de $Y'' + \lambda Y = 0$ avec $Y(N) = 0$ est

$$Y(y) = Y_n(y) = 2C'_n \exp\left(\frac{n\pi N}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right).$$

Donc pour chaque $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$,

$$u_n(x, y) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)$$

est une solution du problème (*). Par le principe de superposition, nous obtenons que

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)$$

est une solution formelle du problème (*).

Si maintenant nous revenons au problème de départ, il nous faut tenir compte de la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x).$$

Nous obtenons alors en dérivant terme-à-terme par rapport à x et en posant $y = 0$ que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{M} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{M} \right) \sinh \left(-\frac{n\pi N}{M} \right) = g(x)$$

Nous avons ainsi à exprimer $g(x)$ comme une série de Fourier paire. Donc

$$a_n \left(\frac{n\pi}{M} \right) \sinh \left(-\frac{n\pi N}{M} \right) = \frac{2}{M} \int_0^M g(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{M} \right) dx.$$

Donc la solution formelle du problème de départ est

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{M} \right) \sinh \left(\frac{n\pi(y - N)}{M} \right) \quad \text{où } a_n = \left[\frac{2}{n\pi \sinh(-n\pi N/M)} \right] \int_0^M g(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{M} \right) dx.$$

c) Nous considérons premièrement le problème intermédiaire

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{avec} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, N) = 0 \text{ et } u(0, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq M, \quad 0 \leq y \leq N. \end{cases}$$

Nous cherchons à déterminer les solutions non-triviales de (*) de la forme $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Comme en a) et en b), nous pouvons substituer ceci dans l'EDP, séparer les variables et nous obtenons le système de deux équations

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \text{et} \quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

Si nous considérons les conditions à la frontière du problème (*), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) &= X'(x)Y(0) = 0, \quad \forall x \in [0, M]; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, N) &= X'(x)Y(N) = 0, \quad \forall x \in [0, M]; \\ u(0, y) &= X(0)Y(y) = 0, \quad \forall y \in [0, N]. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que ces trois équations entraînent que $Y(0) = 0$, $Y(N) = 0$ et $X(0) = 0$. Comme $Y \not\equiv 0$, nous avons un y_0 tel que $Y(y_0) \neq 0$ et de la troisième équation, nous obtenons $X(0) = 0$. Notons que $X' \not\equiv 0$. En effet, si $X' \equiv 0$, alors $X(x)$ serait une fonction constante et comme $X(0) = 0$, nous aurions $X(x) = 0$ pour tout $x \in [0, M]$. Mais ceci contredit le fait que nous cherchons des solutions non-triviales. Ainsi il existe un x_0 tel que $X'(x_0) \neq 0$. Des deux premières équations, nous obtenons que $Y(0) = Y(N) = 0$. Nous avons donc le système d'équations différentielles ordinaires avec conditions suivant:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{avec } X(0) = 0; \\ Y'' + \lambda Y = 0 & \text{avec } Y(0) = Y(N) = 0. \end{cases}$$

Ce système est le même qu'en a). L'analyse que nous avons fait dans ce cas est valable et ainsi nous obtenons que

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi y}{N} \right) \sinh \left(\frac{n\pi x}{N} \right)$$

est une solution formelle du problème (*).

Si maintenant nous revenons au problème de départ, il nous faut tenir compte de la condition $u(M, y) = h(y)$, i.e.

$$u(M, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi M}{N}\right) = h(y).$$

Il faut donc considérer la série de Fourier impaire de $h(y)$. Nous avons alors

$$a_n \sinh\left(\frac{n\pi M}{N}\right) = \frac{2}{N} \int_0^N h(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy.$$

La solution formelle du problème de départ est

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right) \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{N \sinh(n\pi M/N)} \int_0^N h(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy$$

Chapitre 9

Exercice 9.1

Nous voulons écrire $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, R]$ avec $R > 0$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\alpha_n x}{R}\right).$$

Nous avons vu en classe que

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^R x f(x) J_0\left(\frac{\alpha_n x}{R}\right) dx \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

a) Si $f(x) = 1$ pour tout x et $R > 0$, alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^R x J_0\left(\frac{\alpha_n x}{R}\right) dx \\ &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} \frac{Ru}{\alpha_n} J_0(u) \frac{R}{\alpha_n} du \quad \text{en utilisant la substitution } u = \frac{\alpha_n x}{R} \\ &= \frac{2}{(\alpha_n J_1(\alpha_n))^2} \int_0^{\alpha_n} u J_0(u) du \\ &= \frac{2}{(\alpha_n J_1(\alpha_n))^2} (u J_1(u)) \Big|_{u=0}^{u=\alpha_n} \quad \text{car } \frac{d}{du}(u J_1(u)) = u J_0(u) \\ &= \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}. \end{aligned}$$

Donc la série de Fourier-Bessel dans ce cas est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0\left(\frac{\alpha_n x}{R}\right).$$

b) Si $f(x) = 1 - x^2$ et $R = 1$, alors

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 x(1 - x^2) J_0(\alpha_n x) dx \\
&= \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} \frac{u}{\alpha_n} \left(1 - \left(\frac{u}{\alpha_n}\right)^2\right) J_0(u) \frac{1}{\alpha_n} du \quad \text{en utilisant la substitution } u = \alpha_n x \\
&= \frac{2}{(\alpha_n J_1(\alpha_n))^2} \int_0^{\alpha_n} \left(1 - \frac{u^2}{\alpha_n^2}\right) \frac{d}{du} (u J_1(u)) du \\
&= \frac{2}{(\alpha_n J_1(\alpha_n))^2} \left\{ \left[\left(1 - \frac{u^2}{\alpha_n^2}\right) u J_1(u) \right]_{u=0}^{u=\alpha_n} - \int_0^{\alpha_n} \frac{(-2)u}{\alpha_n^2} u J_1(u) du \right\} \\
&= \frac{4}{\alpha_n^4 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} u^2 J_1(u) du = \frac{4}{\alpha_n^4 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} \frac{d}{du} (u^2 J_2(u)) du \\
&= \frac{4}{\alpha_n^4 J_1^2(\alpha_n)} (u^2 J_2(u))_{u=0}^{u=\alpha_n} = \frac{4J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)}.
\end{aligned}$$

Noter que certaines des intégrales ci-dessus sont évaluées en intégrant par parties. Donc la série de Fourier-Bessel dans ce cas est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} J_0(\alpha_n x).$$

c) Si $f(x) = 1 - x^4$ et $R = 1$, alors

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 x(1 - x^4) J_0(\alpha_n x) dx \\
&= \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} \frac{u}{\alpha_n} \left(1 - \left(\frac{u}{\alpha_n}\right)^4\right) J_0(u) \frac{1}{\alpha_n} du \quad \text{en utilisant la substitution } u = \alpha_n x \\
&= \frac{2}{(\alpha_n J_1(\alpha_n))^2} \int_0^{\alpha_n} \left(1 - \frac{u^4}{\alpha_n^4}\right) \frac{d}{du} (u J_1(u)) du \\
&= \frac{2}{(\alpha_n J_1(\alpha_n))^2} \left\{ \left[\left(1 - \frac{u^4}{\alpha_n^4}\right) u J_1(u) \right]_{u=0}^{u=\alpha_n} - \int_0^{\alpha_n} \frac{(-4)u^3}{\alpha_n^4} u J_1(u) du \right\} \\
&= \frac{8}{\alpha_n^6 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} u^4 J_1(u) du = \frac{8}{\alpha_n^6 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} u^2 \frac{d}{du} (u^2 J_2(u)) du \\
&= \frac{8}{\alpha_n^6 J_1^2(\alpha_n)} \left\{ (u^4 J_2(u))_{u=0}^{u=\alpha_n} - \int_0^{\alpha_n} 2u^3 J_2(u) du \right\} \\
&= \frac{8}{\alpha_n^6 J_1^2(\alpha_n)} \left\{ \alpha_n^4 J_2(\alpha_n) - 2 \int_0^{\alpha_n} \frac{d}{du} (u^3 J_3(u)) du \right\} \\
&= \frac{8}{\alpha_n^6 J_1^2(\alpha_n)} \left\{ \alpha_n^4 J_2(\alpha_n) - 2(u^3 J_3(u))_{u=0}^{u=\alpha_n} \right\} = \frac{8}{\alpha_n^6 J_1^2(\alpha_n)} \left\{ \alpha_n^4 J_2(\alpha_n) - 2\alpha_n^3 J_3(\alpha_n) \right\} \\
&= \frac{8J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} - \frac{16J_3(\alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1^2(\alpha_n)}.
\end{aligned}$$

Noter que certaines des intégrales ci-dessus sont évaluées en intégrant par parties. Donc la série de Fourier-Bessel dans ce cas est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} - \frac{16J_3(\alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1^2(\alpha_n)} \right] J_0(\alpha_n x).$$

Exercice 9.2

Nous allons esquisser la solution de cet exercice. Nous voulons résoudre le problème suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{où} \quad u = u(r, \theta, t), \quad 0 \leq r \leq R, \quad \theta \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0$$

avec comme conditions:

$$\begin{aligned} u(R, \theta, t) &= 0 \quad \text{pour tout } \theta, t \text{ tels que } \theta \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0 \\ u(r, \theta, 0) &= f(r, \theta) \quad \text{pour tout } r, \theta \text{ tels que } 0 \leq r \leq R, \quad \theta \in \mathbf{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) &= g(r, \theta) \quad \text{pour tout } r, \theta \text{ tels que } 0 \leq r \leq R, \quad \theta \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

a) Nous allons premièrement considérer le problème intermédiaire (*) suivant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{où} \quad u = u(r, \theta, t), \quad 0 \leq r \leq R, \quad \theta \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0$$

avec comme conditions

$$u(R, \theta, t) = 0 \quad \text{pour tout } \theta, t \text{ tels que } \theta \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0$$

et pour tout $t = t_0$ fixé alors la fonction $(r, \theta) \mapsto u(r, \theta, t_0)$ est bornée. Nous cherchons à déterminer des solutions non triviales de (*) de la forme $u(r, \theta, t) = F(r, \theta)G(t)$. Après avoir substitué cette solution dans l'EDP et avoir divisé par $c^2 FG$ des deux côtés de l'équation, nous obtenons

$$\frac{1}{c^2 G(t)} \frac{d^2 G}{dt^2} = \frac{1}{F(r, \theta)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right).$$

Le terme de gauche est une fonction de t , alors que celui de droite est une fonction de r et θ . Pour que tout ceci soit possible, il faut que chacune de ces expressions soit une constante. De plus il est possible de montrer que cette constante doit être strictement négative. Nous noterons celle-ci par $-k^2$ avec $k > 0$.

Nous avons ainsi un système d'équations:

$$\begin{cases} \frac{d^2 G}{dt^2} + (ck)^2 G = 0; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0. \end{cases}$$

De plus la condition $u(R, \theta, t) = 0$ pour tout θ et t a comme conséquence que $F(R, \theta) = 0$ pour tout θ .

b) Nous pouvons maintenant utiliser la méthode de séparation de variables pour la seconde équation de ce système, à savoir celle relative à F . Nous cherchons des solutions non triviales de cette équation de la forme $F(r, \theta) = H(r)L(\theta)$. Alors nous obtenons après substitution, avoir divisé par $k^2 HL$ et multiplié par r^2 que

$$\frac{r^2}{k^2 H(r)} \frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{r}{k^2 H} \frac{dH}{dr} + r^2 = -\frac{1}{k^2 L(\theta)} \frac{d^2 L}{d\theta^2}.$$

Le côté gauche est une fonction de r , alors que celui de droite est une fonction de θ . Pour que ceci soit possible, il faut que chacun de ces côtés soit constant. De plus il est possible de montrer que cette constante doit être positive. Nous noterons celle-ci par p^2 avec $p \geq 0$. Nous obtenons donc deux équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{d^2 L}{d\theta^2} + (pk)^2 L = 0 \\ r^2 \frac{d^2 H}{dr^2} + r \frac{dH}{dr} + ((kr)^2 - (pk)^2) H = 0 \end{cases}$$

Posons $pk = n$. Nous avons ainsi

$$\begin{cases} \frac{d^2 L}{d\theta^2} + n^2 L = 0; \\ r^2 \frac{d^2 H}{dr^2} + r \frac{dH}{dr} + ((kr)^2 - (n)^2) H = 0. \end{cases}$$

c) Notons que $L(\theta)$ est une fonction périodique de θ de période 2π , car $H(r)L(\theta + 2\pi)G(t) = u(r, \theta + 2\pi, t) = u(r, \theta, t) = H(r)L(\theta)G(t)$ et $L(\theta + 2\pi) = L(\theta)$ en prenant r et t tels que $H(r) \neq 0$ et $G(t) \neq 0$. Conséquemment parce que la solution générale de

$$\frac{d^2 L}{d\theta^2} + n^2 L = 0$$

est de la forme $L(\theta) = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)$ et que cette fonction doit être périodique de période 2π , alors $n \in \mathbf{N}$. Les solutions possibles pour un $n \in \mathbf{N}$ donné seront engendrées par $L_n(\theta) = \cos(n\theta)$ et $L_n^*(\theta) = \sin(n\theta)$ si $n \geq 1$ et par $L_0(\theta) \equiv 1$ si $n = 0$.

Si $n \in \mathbf{N}$, nous pouvons maintenant considérer la nouvelle variable $s = kr$. En utilisant la règle de chaines, l'équation

$$r^2 \frac{d^2 H}{dr^2} + r \frac{dH}{dr} + ((kr)^2 - (n)^2)H = 0 \quad \text{devient} \quad s^2 \frac{d^2 H}{ds^2} + s \frac{dH}{ds} + (s^2 - n^2)H = 0.$$

Cette dernière équation est l'équation de Bessel de paramètre $\nu = n \in \mathbf{N}$. Donc sa solution générale est de la forme $AJ_n(s) + BY_n(s)$, où $J_n(s)$ est la fonction de Bessel du premier type d'ordre n et $Y_n(s)$ est la fonction de Bessel du second type d'ordre n . En d'autres mots, H en fonction de r sera de la forme $H(r) = AJ_n(kr) + BY_n(kr)$. Mais nous cherchons des solutions telles que $(r, \theta) \mapsto u(r, \theta, t_0)$ est bornée pour tout $t = t_0$ fixé. Ceci entraîne que $r \mapsto H(r)$ est une fonction bornée et comme $r \mapsto J_n(kr)$ est bornée et que $r \mapsto Y_n(kr)$ n'est pas bornée lorsque $r \rightarrow 0^+$, nous devons avoir $B = 0$.

En conclusion pour $n \in \mathbf{N}$, $F(r, \theta) = J_n(kr) \cos(n\theta)$ est une solution de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0.$$

De même pour $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$, $F^*(r, \theta) = J_n(kr) \sin(n\theta)$ aussi une solution de cette même EDP.

d) Nous pouvons considérer la condition $u(R, \theta, t) = 0$. De celle-ci nous obtenons que $J_n(kR) = 0$. Donc $k = k_{m,n} = \alpha_{m,n}/R$ où $\alpha_{m,n}$ est le m ième zéro positif (> 0) de J_n . Si nous considérons maintenant l'équation

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + (ck)^2 G = 0 \quad \text{pour } k = k_{m,n}$$

sa solution générale est $G(t) = A \cos(ck_{m,n}t) + B \sin(ck_{m,n}t)$.

Pour chaque $m, n \in \mathbf{N}, m \geq 1$, alors

$$u_{m,n}(r, \theta, t) = \left[A_{m,n} \cos\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) + B_{m,n} \sin\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) \right] J_n\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{R}\right) \cos(n\theta)$$

est une solution du problème intermédiaire (*). De même pour chaque $m, n \in \mathbf{N}, n \geq 1, m \geq 1$, alors

$$u_{m,n}^*(r, \theta, t) = \left[A_{m,n}^* \cos\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) + B_{m,n}^* \sin\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) \right] J_n\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{R}\right) \sin(n\theta)$$

est aussi une solution du problème intermédiaire (*). Parce que l'équation d'onde est linéaire, nous pouvons utiliser le principe de superposition. Nous obtenons ainsi que

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{m,n} \cos\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) + B_{m,n} \sin\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) \right] J_n\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{R}\right) \cos(n\theta) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{m,n}^* \cos\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) + B_{m,n}^* \sin\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) \right] J_n\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{R}\right) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

est une solution formelle du problème intermédiaire (*).

Il est possible de déterminer les coefficients $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $A_{m,n}^*$ et $B_{m,n}^*$ en utilisant les conditions initiales et des relations d'orthogonalité. Nous obtenons ainsi que

$$A_{m,0} = \frac{4}{\pi R^2 J_1^2(\alpha_{m,0})} \int_0^R \int_0^\pi r f(r, \theta) J_0\left(\frac{\alpha_{m,0} r}{R}\right) d\theta dr.$$

$$A_{m,n} = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{m,n})} \int_0^R \int_0^\pi r f(r, \theta) J_n\left(\frac{\alpha_{m,n} r}{R}\right) \cos(n\theta) d\theta dr \quad \text{si } n \geq 1.$$

$$A_{m,n}^* = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{m,n})} \int_0^R \int_0^\pi r f(r, \theta) J_n\left(\frac{\alpha_{m,n} r}{R}\right) \sin(n\theta) d\theta dr \quad \text{si } n \geq 1.$$

$$B_{m,0} = \frac{4}{c\pi R \alpha_{m,0} J_1^2(\alpha_{m,0})} \int_0^R \int_0^\pi r g(r, \theta) J_0\left(\frac{\alpha_{m,0} r}{R}\right) d\theta dr.$$

$$B_{m,n} = \frac{2}{c\pi R \alpha_{m,n} J_{n+1}^2(\alpha_{m,n})} \int_0^R \int_0^\pi r g(r, \theta) J_n\left(\frac{\alpha_{m,n} r}{R}\right) \cos(n\theta) d\theta dr \quad \text{si } n \geq 1.$$

$$B_{m,n}^* = \frac{2}{c\pi R \alpha_{m,n} J_{n+1}^2(\alpha_{m,n})} \int_0^R \int_0^\pi r g(r, \theta) J_n\left(\frac{\alpha_{m,n} r}{R}\right) \sin(n\theta) d\theta dr \quad \text{si } n \geq 1.$$

Exercice 9.3

Nous avons

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{z(t-t^{-1})}{2}\right) &= \exp\left(\frac{tz}{2}\right) \exp\left(-\frac{t^{-1}z}{2}\right) = \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{tz}{2}\right)^p\right] \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} \left(\frac{t^{-1}z}{2}\right)^q\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\substack{p,q=0 \\ p-q=n}}^{\infty} \frac{(1)^{-q}}{p! q! 2^{p+q}} z^{p+q} \right] t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(q+n)! q! 2^{n+2q}} z^{2q+n} \right] t^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p-n}}{p! (p-n)! 2^{2p-n}} z^{2p-n} \right] t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z) t^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n J_{-n}(z) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \end{aligned}$$

car $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$ pour $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$.

Exercice 9.4

En posant $t = e^{i\theta}$, nous avons

$$\begin{aligned}
e^{iz \sin(\theta)} &= \exp\left(iz \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(z) e^{-in\theta} \\
&= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(z) e^{-in\theta} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}\right) J_n(z) \\
&= J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{i2m\theta} + e^{-i2m\theta}}{2}\right) J_{2m}(z) + 2i \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{i(2m-1)\theta} - e^{-i(2m-1)\theta}}{2i}\right) J_{2m-1}(z) \\
&= J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\theta) J_{2m}(z) + 2i \sum_{m=1}^{\infty} \sin((2m-1)\theta) J_{2m-1}(z).
\end{aligned}$$

Si nous considérons maintenant les parties réelles et imaginaires de l'équation ci-dessus et parce que

$$e^{iz \sin(\theta)} = \cos(z \sin(\theta)) + i \sin(z \sin(\theta)),$$

nous avons

$$\cos(z \sin(\theta)) = J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\theta) J_{2m}(z) \quad \text{et} \quad \sin(z \sin(\theta)) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin((2m-1)\theta) J_{2m-1}(z).$$

Exercice 9.5

Nous avons premièrement

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta - z \sin(\theta)) &= \cos(n\theta) \cos(z \sin(\theta)) + \sin(n\theta) \sin(z \sin(\theta)) \\
&= \cos(n\theta) \left[J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\theta) J_{2m}(z) \right] + \sin(n\theta) \left[2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin((2m-1)\theta) J_{2m-1}(z) \right] \\
&= \cos(n\theta) J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(n\theta) \cos(2m\theta) J_{2m}(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(n\theta) \sin((2m-1)\theta) J_{2m-1}(z).
\end{aligned}$$

Rappelons aussi les formules suivantes

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n > 0 \\ 2\pi, & \text{si } m = n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \pi, & \text{si } m = n > 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\diamond) &= \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \sin(\theta)) d\theta = J_0(z) \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) d\theta + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(z) \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(2m\theta) d\theta \\
&\quad + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(z) \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \sin((2m-1)\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Par ce qui précède, nous obtenons

$$(\diamond) = \begin{cases} 2\pi J_0(z), & \text{si } n = 0; \\ 2\pi J_{2m}(z), & \text{si } n \text{ est pair } > 0 \text{ et égale } 2m; \\ 2\pi J_{2m-1}(z), & \text{si } n \text{ est impair et égale à } 2m - 1. \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi conclure que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \sin(\theta)) d\theta = J_n(z).$$

Exercice 9.6

Si nous considérons la formule obtenue au numéro 2, mais en prenant l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$, nous obtenons alors

$$\exp\left(iz \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(2m\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) J_{2m}(z) + 2i \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left((2m-1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) J_{2m-1}(z).$$

Notons que

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos(\theta), & \cos\left(2m\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) &= \cos(m\pi - 2m\theta) = (-1)^m \cos(2m\theta), \\ \sin\left((2m-1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) &= \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2} - (2m-1)\theta\right) = (-1)^{m-1} \cos((2m-1)\theta). \end{aligned}$$

En substituant, nous obtenons alors

$$e^{iz \cos(\theta)} = J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos(2m\theta) J_{2m}(z) + 2i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cos((2m-1)\theta) J_{2m-1}(z).$$

Ceci est le résultat désiré.

Si nous considérons maintenant les parties réelles et imaginaires de l'équation ci-dessus et parce que

$$e^{iz \cos(\theta)} = \cos(z \cos(\theta)) + i \sin(z \cos(\theta)),$$

nous avons

$$\cos(z \cos(\theta)) = J_0(z) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cos(2m\theta) J_{2m}(z) \quad \text{et}$$

$$\sin(z \cos(\theta)) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cos((2m-1)\theta) J_{2m-1}(z).$$

Nous pouvons noter en particulier que si nous posons $\theta = 0$ dans ces deux dernières équations, nous obtenons

$$\cos(z) = J_0(z) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2m}(z) \quad \text{et} \quad \sin(z) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2m-1}(z).$$

Exercice 9.7

Nous avons

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \Rightarrow \frac{d}{dx} (J_0(x)) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)}{(m!)^2 2^{2m}} x^{2m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)! m! 2^{2m-1}} x^{2m-1}.$$

En réindexant, nous obtenons alors

$$\frac{d}{dx} \left(J_0(x) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m! (m+1)! 2^{2m+1}} x^{2m+1} = -\frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m} = -J_1(x).$$

Nous avons aussi pour $\nu \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x^\nu J_\nu(x) \right) &= \frac{d}{dx} \left[x^\nu \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m} \right] = \frac{d}{dx} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{\nu+2m}} x^{2(m+\nu)} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2(m+\nu)}{m! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{\nu+2m}} x^{2m+2\nu-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2(m+\nu)}{m! (m+\nu) \Gamma(\nu + m) 2^{\nu+2m}} x^{2m+2\nu-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m) 2^{\nu+2m-1}} x^{2m+2\nu-1} = x^\nu \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + (\nu - 1) + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m} \\ &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \end{aligned}$$

Nous pouvons noter que cette dernière formule est aussi valable pour $\nu = 0$ par ce que nous avons démontré précédemment. En effet, si $\nu = 0$, nous aurions

$$\frac{d}{dx} \left(x^0 J_0(x) \right) = x^0 J_{-1}(x), \quad \text{c'est-à-dire } \frac{d}{dx} \left(J_0(x) \right) = J_{-1}(x)$$

selon cette formule. Mais ceci est vrai parce que $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ et ce que nous avons démontré au début de cet exercice.

Exercice 9.8

(a) Nous avons par intégration par partie

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \int_0^\alpha \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right]^a x^b J_{b-1}(x) dx = \int_0^\alpha \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right]^a \frac{d}{dx} \left[x^b J_b(x) \right] dx \\ &= \left(\left[1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right]^a x^b J_b(x) \right)_0^\alpha - \int_0^\alpha a \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right]^{a-1} \left(\frac{-2x}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha} x^b J_b(x) dx \\ &= \frac{2a}{\alpha^2} \int_0^\alpha \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right]^{a-1} x^{b+1} J_b(x) dx = \left(\frac{2a}{\alpha^2} \right) I_{a-1,b+1} \quad \text{car } a \geq 1. \end{aligned}$$

(b) Nous avons

$$I_{0,b} = \int_0^\alpha x^b J_{b-1}(x) dx = \int_0^\alpha \frac{d}{dx} \left[x^b J_b(x) \right] dx = \left(x^b J_b(x) \right)_0^\alpha = \alpha^b J_b(\alpha)$$

(c) En utilisant (a) et (b), nous obtenons que

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \left(\frac{2a}{\alpha^2} \right) I_{a-1,b+1} = \left(\frac{2a}{\alpha^2} \right) \left(\frac{2(a-1)}{\alpha^2} \right) I_{a-2,b+2} = \dots = \frac{2^a (a!)}{\alpha^{2a}} I_{0,b+a} = \frac{2^a (a!)}{\alpha^{2a}} \alpha^{a+b} J_{a+b}(\alpha) \\ &= 2^a (a!) \alpha^{b-a} J_{a+b}(\alpha) \end{aligned}$$

Exercice 9.9

La solution est donnée par

$$u(r, t) = \sum_{n=1} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) + b_n \sin\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) \right]$$

avec

$$a_n = \left(\frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)} \right) \int_0^R r \tilde{f}(r) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) dr \quad \text{et} \quad b_n = \left(\frac{2}{c\alpha_n R J_1^2(\alpha_n)} \right) \int_0^R r \tilde{g}(r) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) dr.$$

Comme $\tilde{g}(r) = 0$ pour tout $0 \leq r \leq R$, nous obtenons facilement que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Il nous faut seulement calculer a_n .

En utilisant la substitution

$$x = \left(\frac{\alpha_n r}{R} \right) \Rightarrow dx = \left(\frac{\alpha_n}{R} \right) dr$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)} \right) \int_0^R r \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^p J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) dr \\ &= \left(\frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)} \right) \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{Rx}{\alpha_n} \right) \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha_n} \right)^2 \right]^p J_0(x) \left(\frac{R}{\alpha_n} \right) dx \\ &= \left(\frac{2}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \right) \int_0^{\alpha_n} x \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha_n} \right)^2 \right]^p J_0(x) dx = \left(\frac{2}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \right) 2^p (p!) \alpha_n^{1-p} J_{p+1}(\alpha_n) \\ &= \frac{2^{p+1} (p!) J_{p+1}(\alpha_n)}{\alpha_n^{p+1} J_1^2(\alpha_n)}. \end{aligned}$$

Donc la solution est

$$u(r, t) = \sum_{n=1} \left(\frac{2^{p+1} (p!) J_{p+1}(\alpha_n)}{\alpha_n^{p+1} J_1^2(\alpha_n)} \right) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) \cos\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right).$$

Chapitre 10

Exercice 10.1

a) Nous considérons l'équation $y'' + \lambda y = 0$ sur l'intervalle $[0, \ell]$ avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(\ell) = 0$. Ici $\ell > 0$. Nous devons considérer les différentes possibilités pour λ . Dans ce cas, le problème de Sturm-Liouville est régulier et conséquemment les valeurs propres sont réelles.

Si $\lambda < 0$, disons que $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $y'' + \lambda y = 0$ est $y(x) = Ae^{\nu x} + Be^{-\nu x}$. Nous avons $y'(x) = A\nu e^{\nu x} - B\nu e^{-\nu x}$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 0 \\ y'(\ell) = A\nu e^{\nu \ell} - B\nu e^{-\nu \ell} = 0 \end{cases}$$

et celui-ci n'a qu'une seule solution $A = B = 0$, parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \nu e^{\nu \ell} & -\nu e^{-\nu \ell} \end{vmatrix} = -\nu(e^{\nu \ell} + e^{-\nu \ell}) = -2\nu \cosh(\nu \ell) \neq 0.$$

Conséquemment si $\lambda < 0$, alors λ n'est pas une valeur propre du problème.

Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de $y'' = 0$ est $y(x) = A + Bx$. Nous avons $y'(x) = B$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 \\ y'(\ell) = B = 0 \end{cases}$$

et celui-ci n'a qu'une seule solution $A = B = 0$. Conséquemment si $\lambda = 0$, alors λ n'est pas une valeur propre du problème.

Si $\lambda > 0$, disons que $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution de $y'' + \lambda y = 0$ est $y(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)$. Nous avons $y'(x) = -A\nu \sin(\nu x) + B\nu \cos(\nu x)$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 \\ y'(\ell) = -A\nu \sin(\nu\ell) + B\nu \cos(\nu\ell) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \cos(\nu\ell) = 0 \end{cases}$$

et celui-ci a des solutions (A, B) non triviales si et seulement si $\cos(\nu\ell) = 0$. Mais $\cos(\nu\ell) = 0$ si et seulement si $\nu\ell = (2n + 1)\pi/2$ avec $n \in \mathbf{N}$. Ici nous utilisons le fait que $\nu > 0$ et $\ell > 0$. Dans ce cas, la fonction

$$y_n(x) = B \sin\left(\frac{(2n + 1)\pi x}{2\ell}\right) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N} \text{ et } B \neq 0$$

est une fonction caractéristique dont la valeur propre associée est

$$\lambda = \lambda_n = \left[\frac{(2n + 1)\pi}{2\ell}\right]^2.$$

Toutes les fonctions caractéristiques de valeur propre $\lambda = \lambda_n$ sont de cette forme.

b) Nous considérons l'équation $y'' + \lambda y = 0$ sur l'intervalle $[0, \ell]$ avec les conditions $y'(0) = 0$ et $y'(\ell) = 0$. Nous devons considérer les différentes possibilités pour λ . Dans ce cas, le problème de Sturm-Liouville est régulier et conséquemment les valeurs propres sont réelles.

Si $\lambda < 0$, disons que $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $y'' + \lambda y = 0$ est $y(x) = Ae^{\nu x} + Be^{-\nu x}$. Nous avons $y'(x) = A\nu e^{\nu x} - B\nu e^{-\nu x}$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y'(0) = A\nu - B\nu = 0 \\ y'(\ell) = A\nu e^{\nu\ell} - B\nu e^{-\nu\ell} = 0 \end{cases}$$

et celui-ci n'a qu'une seule solution $A = B = 0$, parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \nu & -\nu \\ \nu e^{\nu\ell} & -\nu e^{-\nu\ell} \end{vmatrix} = \nu^2(e^{\nu\ell} - e^{-\nu\ell}) = 2\nu^2 \sinh(\nu\ell) \neq 0.$$

Ici nous utilisons le fait que $\nu > 0$ et $\ell > 0$. Conséquemment si $\lambda < 0$, alors λ n'est pas une valeur propre du problème.

Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de $y'' = 0$ est $y(x) = A + Bx$. Nous avons $y'(x) = B$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y'(0) = B = 0 \\ y'(\ell) = B = 0 \end{cases}$$

et celui-ci a une infinité de solutions (A, B) avec A quelconque et $B = 0$. Conséquemment si $\lambda = \lambda_0 = 0$, alors λ est une valeur propre du problème et $y_0(x) \equiv A$ avec $A \neq 0$ est une fonction caractéristique dont la valeur propre associée est $\lambda = \lambda_0$.

Si $\lambda > 0$, disons que $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution de $y'' + \lambda y = 0$ est $y(x) = A \cos(\nu x) + B \sin(\nu x)$. Nous avons $y'(x) = -A\nu \sin(\nu x) + B\nu \cos(\nu x)$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(0) = B\nu = 0 \\ y'(\ell) = -A\nu \sin(\nu\ell) + B\nu \cos(\nu\ell) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ A \sin(\nu\ell) = 0 \end{array} \right\}$$

et celui-ci a des solutions (A, B) non triviales si et seulement si $\sin(\nu\ell) = 0$. Mais $\sin(\nu\ell) = 0$ si et seulement si $\nu\ell = n\pi$ avec $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. Ici nous utilisons le fait que $\nu > 0$ et $\ell > 0$. Dans ce cas, la fonction

$$y_n(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}, n \geq 1 \text{ et } A \neq 0$$

est une fonction caractéristique dont la valeur propre associée est

$$\lambda = \lambda_n = \left[\frac{n\pi}{\ell}\right]^2.$$

Toutes les fonctions caractéristiques de valeur propre $\lambda = \lambda_n$ sont de cette forme.

Nous pouvons combiner les deux cas précédents: $\lambda = 0$ et $\lambda \geq 0$ en un seul. Ainsi

$$y_n(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N} \text{ et } A \neq 0$$

est une fonction caractéristique dont la valeur propre associée est

$$\lambda = \lambda_n = \left[\frac{n\pi}{\ell}\right]^2.$$

Toutes les fonctions caractéristiques de valeur propre $\lambda = \lambda_n$ sont de cette forme.

c) Nous considérons l'équation $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$ sur l'intervalle $[1, e]$ avec les conditions $y(1) = 0$ et $y(e) = 0$. Nous devons considérer les différentes possibilités pour λ . Dans ce cas, le problème de Sturm-Liouville est celui correspondant à $r(x) = x$, $q(x) \equiv 0$ et $p(x) = x^{-1}$ et est conséquemment régulier. Ses valeurs propres sont donc réelles.

L'équation $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$ est équivalente à $xy'' + y' + \lambda x^{-1}y = 0$. En multipliant par x , nous obtenons l'équation de Cauchy $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$.

Si $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de l'équation $xy'' + y' + \lambda x^{-1}y = 0$ est $y(x) = Ax^\nu + Bx^{-\nu}$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = A + B = 0 \\ y(e) = Ae^\nu + Be^{-\nu} = 0 \end{array} \right\}$$

et celui-ci n'a qu'une seule solution $A = B = 0$, parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^\nu & e^{-\nu} \end{vmatrix} = -(e^\nu - e^{-\nu}) = -2 \sinh(\nu) \neq 0.$$

Conséquemment si $\lambda < 0$, alors λ n'est pas une valeur propre du problème.

Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de l'équation $xy'' + y' = 0$ est $y(x) = A + B \ln(x)$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = A = 0 \\ y(e) = A + B = 0 \end{array} \right\}$$

et celui-ci n'a qu'une seule solution $A = B = 0$, parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Conséquemment si $\lambda = 0$, alors λ n'est pas une valeur propre du problème.

Si $\lambda > 0$, disons $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de l'équation $xy'' + y' + \lambda x^{-1}y = 0$ est $y(x) = A \cos(\nu \ln(x)) + B \sin(\nu \ln(x))$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y(1) = A = 0 \\ y(e) = A \cos(\nu) + B \sin(\nu) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\nu) = 0 \end{cases}$$

et celui-ci a des solutions (A, B) non triviales si et seulement si $\sin(\nu) = 0$. Mais $\sin(\nu) = 0$ si et seulement si $\nu = n\pi$ avec $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. Ici nous utilisons le fait que $\nu > 0$. Dans ce cas, la fonction

$$y_n(x) = B \sin(n\pi \ln(x)) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}, n \geq 1 \text{ et } B \neq 0$$

est une fonction caractéristique dont la valeur propre associée est

$$\lambda = \lambda_n = (n\pi)^2.$$

Toutes les fonctions caractéristiques de valeur propre $\lambda = \lambda_n$ sont de cette forme.

La théorie de Sturm-Liouville a comme conséquence que

$$\int_1^e x^{-1} \sin(n\pi \ln(x)) \sin(m\pi \ln(x)) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

d) Nous considérons l'équation $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ avec les conditions $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$. Nous devons considérer les différentes possibilités pour λ . Dans ce cas, le problème de Sturm-Liouville est celui correspondant à $r(x) = e^{2x}$, $q(x) = e^{2x}$ et $p(x) = e^{2x}$ et est conséquemment régulier. Ses valeurs propres sont donc réelles.

Si nous développons l'équation $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0$ et ensuite divisons par e^{2x} , nous obtenons $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0$.

Si $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0$ est $y(x) = Ae^{(-1+\nu)x} + Be^{(-1-\nu)x}$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 0 \\ y(\pi) = Ae^{(-1+\nu)\pi} + Be^{(-1-\nu)\pi} = 0 \end{cases}$$

et celui-ci n'a qu'une seule solution $A = B = 0$, parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{(-1+\nu)\pi} & e^{(-1-\nu)\pi} \end{vmatrix} = (e^{(-1-\nu)\pi} - e^{(-1+\nu)\pi}) = -2e^{-\pi} \sinh(\nu\pi) \neq 0.$$

Conséquemment si $\lambda < 0$, alors λ n'est pas une valeur propre du problème.

Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de $y'' + 2y' + y = 0$ est $y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 \\ y(\pi) = Ae^{-\pi} + B\pi e^{-\pi} = 0 \end{cases}$$

et celui-ci n'a qu'une seule solution $A = B = 0$, parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\pi} & \pi e^{-\pi} \end{vmatrix} = \pi e^{-\pi} \neq 0.$$

Conséquemment si $\lambda = 0$, alors λ n'est pas une valeur propre du problème.

Si $\lambda > 0$, disons $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors la solution générale de $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0$ est $y(x) = Ae^{-x} \cos(\nu x) + Be^{-x} \sin(\nu x)$. Des conditions du problème, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 \\ y(\pi) = Ae^{-\pi} \cos(\nu\pi) + Be^{-\pi} \sin(\nu\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\nu\pi) = 0 \end{cases}$$

et celui-ci a des solutions (A, B) non triviales si et seulement si $\sin(\nu\pi) = 0$. Mais $\sin(\nu\pi) = 0$ si et seulement si $\nu = n$ avec $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. Ici nous utilisons le fait que $\nu > 0$ et $e^{-\pi} > 0$. Dans ce cas, la fonction

$$y_n(x) = Be^{-x} \sin(nx) \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}, n \geq 1 \text{ et } B \neq 0$$

est une fonction caractéristique dont la valeur propre associée est

$$\lambda = \lambda_n = n^2.$$

Toutes les fonctions caractéristiques de valeur propre $\lambda = \lambda_n$ sont de cette forme.

La théorie de Sturm-Liouville a comme conséquence que

$$\int_1^\pi e^{-x} \sin(nx) e^{-x} \sin(mx) e^{2x} dx = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

Exercice 10.2

(a) Si nous multiplions l'équation différentielle par e^{3x} , nous obtenons

$$e^{3x} \frac{d^2 y}{dx^2} + 3e^{3x} \frac{dy}{dx} + (\lambda - 5)e^{3x} y = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[e^{3x} \frac{dy}{dx} \right] + (\lambda e^{3x} - 5e^{3x}) y = 0.$$

(b) Il nous faut étudier les racines du polynôme $D^2 + 3D + (\lambda - 5)I = 0$. Ces racines sont

$$\frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4(\lambda - 5)}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{29 - 4\lambda}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 - \sqrt{3^2 - 4(\lambda - 5)}}{2} = \frac{-3 - \sqrt{29 - 4\lambda}}{2}.$$

Il nous faut considérer les cas possibles: une racine réelle double, deux racines réelles distinctes et deux racines complexes non réelles distinctes. Ces cas correspondent $(29 - 4\lambda) = 0$, $(29 - 4\lambda) > 0$ et $(29 - 4\lambda) < 0$.

Si $(29 - 4\lambda) = 0$, alors $\lambda = 29/4$ et nous sommes dans le cas d'une racine double. Celle-ci est $-3/2$. Dans ce cas, $y(x) = Ae^{-3x/2} + Bxe^{-3x/2}$ est la solution générale de l'équation. Si nous considérons les conditions aux extrémités, nous obtenons

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 \\ y(1) = Ae^{-3/2} + Be^{-3/2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0.$$

Il nous faut donc rejeter le cas $\lambda = 0$.

Si $\lambda > 0$, disons $\lambda = \nu^2$ avec $\nu > 0$, alors nous avons deux racines réelles distinctes: $(-3 + \nu)/2$ et $(-3 - \nu)/2$. Dans ce cas,

$$y(x) = A \exp\left(\frac{(-3 + \nu)x}{2}\right) + B \exp\left(\frac{(-3 - \nu)x}{2}\right)$$

est la solution générale de l'équation. Alors nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = A + B = 0 \\ y(1) = A \exp\left(\frac{(-3+\nu)}{2}\right) + B \exp\left(\frac{(-3-\nu)}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y(0) = A + B = 0 \\ y(1) = Ae^{\nu/2} + Be^{-\nu/2} = 0 \end{array} \right\}$$

et ainsi nous obtenons $A = B = 0$, car $\nu > 0$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\nu/2} & e^{-\nu/2} \end{vmatrix} = -(e^{\nu/2} - e^{-\nu/2}) \neq 0.$$

Si $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors nous avons deux racines complexes non-réelles distinctes: $(-3 + \nu i)/2$ et $(-3 - \nu i)/2$ avec $i = \sqrt{-1}$. Dans ce cas,

$$y(x) = A \exp\left(-\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu x}{2}\right) + B \exp\left(-\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu x}{2}\right)$$

est la solution générale de l'équation. Alors nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = A = 0 \\ y(1) = A \exp\left(-\frac{3}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) + B \exp\left(-\frac{3}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0 \quad \text{et} \quad B \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) = 0$$

Comme $A = 0$ et que nous cherchons des solutions non triviales, alors nous pouvons supposer que $B \neq 0$. Donc nous obtenons

$$\sin\left(\frac{\nu}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\nu}{2} = n\pi \Rightarrow \nu = 2n\pi$$

avec $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$. Nous obtenons ainsi que

$$y_n(x) = \exp\left(-\frac{3x}{2}\right) \sin(n\pi x)$$

est une fonction caractéristique de valeur propre $\lambda_n = -(2n\pi)^2$. Toute autre fonction caractéristique est un multiple non-nul de $y_n(x)$ pour un $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$.

Exercice 10.3

Nous pouvons réécrire l'équation de Chebyshev.

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} y = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dx} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

Après multiplication par $\sqrt{1-x^2}$, nous obtenons l'équation

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[\quad (\clubsuit)$$

Il sera nécessaire de faire un changement de coordonnées pour résoudre # 2 (a). Posons $x = \cos(\theta)$ ou encore $\theta = \arccos(x)$. Alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\theta} = \frac{-1}{\sin(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{d\theta} \left[\frac{-1}{\sin(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \right] \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{-1}{\sin(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \right] \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{-1}{\sin(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{d^2 y}{d\theta^2} - \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \end{aligned}$$

En substituant dans ($\clubsuit$), nous obtenons

$$(1 - \cos^2(\theta)) \left[\frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{d^2 y}{d\theta^2} - \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \right] - \cos(\theta) \left[\frac{-1}{\sin(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \right] + \lambda y = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{d\theta^2} + \lambda y = 0. \quad (\spadesuit)$$

sur $]0, \pi[$.

(a) Il faut remarquer que $y = e^{in\theta}$, où $i = \sqrt{-1}$, est une solution de ($\spadesuit$) pour $\lambda = n^2$. En effet,

$$\frac{dy}{d\theta} = ine^{in\theta}, \quad \frac{d^2 y}{d\theta^2} = (in)^2 e^{in\theta} = -n^2 e^{in\theta} = -n^2 y \Rightarrow \frac{d^2 y}{d\theta^2} + n^2 y = 0.$$

De ceci, nous obtenons que la partie réelle $Re(e^{in\theta})$ de $y = e^{in\theta}$ est donc une solution de l'équation de Chebyshev. Nous avons

$$\begin{aligned} Re(e^{in\theta}) &= Re(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = Re \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} i^m \cos^{n-m}(\theta) \sin^m(\theta) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (\cos^2(\theta) - 1)^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(2k)! (n-2k)!} \cos^{n-2k}(\theta) (\cos^2(\theta) - 1)^k \end{aligned}$$

parce que $i^m \in \mathbf{R}$ si et seulement si m est pair, c'est-à-dire $m = 2k$ et alors $i^{2k} = (-1)^k$.

Si nous substituons $x = \cos(\theta)$ dans cette dernière expression, nous obtenons donc que

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(2k)! (n-2k)!} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k$$

est une solution de ($\clubsuit$).

(b) Ici $r(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Dans ce cas, $r(-1) = 0$ et $r(1) = 0$. Par la proposition 1 du chapitre 10, nous obtenons

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

car la valeur propre de $T_m(x)$ (respectivement $T_n(x)$) est m^2 (respectivement n^2). Il est facile de vérifier que $m^2 = n^2$ si et seulement si $m = n$, lorsque $m, n \in \mathbf{N}$.

Chapitre 11

Exercice 11.1

Nous avons vu que la solution formelle dans ce cas est

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos(\phi)) \quad \text{où}$$

$$a_n = \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos(\phi)) \sin(\phi) d\phi = \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw.$$

Nous allons déterminer $\tilde{f}$ en exprimant f comme une fonction de $\cos(\phi)$ et ensuite remplacer $\cos(\phi)$ par w .

a) Si $f(\phi) = \cos(3\phi)$, alors

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \cos(\phi) \cos(2\phi) - \sin(\phi) \sin(2\phi) = \cos(\phi) [2 \cos^2(\phi) - 1] - \sin(\phi) [2 \sin(\phi) \cos(\phi)] \\ &= 2 \cos^3(\phi) - \cos(\phi) - 2 \sin^2(\phi) \cos(\phi) = 2 \cos^3(\phi) - \cos(\phi) - 2 [1 - \cos^2(\phi)] \cos(\phi) \\ &= 4 \cos^3(\phi) - 3 \cos(\phi) \end{aligned}$$

et ainsi $\tilde{f}(w) = 4w^3 - 3w$ obtenu en substituant w à la place de $\cos(\phi)$. Nous pouvons maintenant calculer les coefficients a_n .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (4w^3 - 3w)(1) dw = \frac{1}{2} \left(\frac{4w^4}{4} - \frac{3w^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = 0 \\ a_1 &= \frac{3}{2R} \int_{-1}^1 (4w^3 - 3w)(w) dw = \frac{3}{2R} \left(\frac{4w^5}{5} - \frac{3w^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{-3}{5R} \\ a_2 &= \frac{5}{2R^2} \int_{-1}^1 (4w^3 - 3w) \left(\frac{3w^2 - 1}{2} \right) dw = 0 \\ a_3 &= \frac{7}{2R^3} \int_{-1}^1 (4w^3 - 3w) \left(\frac{5w^3 - 3w}{2} \right) dw = \frac{7}{2R^3} \left(\frac{20w^7}{14} - \frac{27w^5}{10} + \frac{9w^3}{6} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{5R^3} \\ a_n &= 0 \quad \text{si } n \geq 4. \end{aligned}$$

Pour vérifier cette dernière équation, nous notons que

$$\begin{aligned} u(R, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = \tilde{f}(w) = 4w^3 - 3w \quad \text{si } \cos(\phi) = w \\ &= \underbrace{-\frac{3}{5R}(Rw) + \frac{8}{5R^3}(R^3) \left(\frac{5w^3 - 3w}{2} \right)}_{(4w^3 - 3w)} + \sum_{n=4}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = \tilde{f}(w) = 4w^3 - 3w. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=4}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pour tout $n \geq 4$ parce que les P_n forment une famille orthogonale sur $[-1, 1]$. Conséquemment la solution est

$$u(r, \phi) = -\frac{3r}{5R} \cos(\phi) + \frac{8r^3}{5R^3} \frac{(5 \cos^3(\phi) - 3 \cos(\phi))}{2}.$$

b) Si $f(\phi) = \sin(\phi) \sin(3\phi)$, alors

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \sin(\phi) \sin(3\phi) = \sin(\phi) [\sin(\phi) \cos(2\phi) + \cos(\phi) \sin(2\phi)] \\ &= \sin^2(\phi) [2 \cos^2(\phi) - 1] + 2 \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) = [1 - \cos^2(\phi)] [2 \cos^2(\phi) - 1] + 2 \cos^2(\phi) [1 - \cos^2(\phi)] \\ &= -4 \cos^4(\phi) + 5 \cos^2(\phi) - 1 \end{aligned}$$

et ainsi $\tilde{f}(w) = -4w^4 + 5w^2 - 1$ obtenu en substituant w à la place de $\cos(\phi)$. Nous pouvons maintenant calculer les coefficients a_n .

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (-4w^4 + 5w^2 - 1)(1) dw = \frac{1}{2} \left(-\frac{4w^5}{5} + \frac{5w^3}{3} - w \right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{15} \\
a_1 &= \frac{3}{2R} \int_{-1}^1 (-4w^4 + 5w^2 - 1)(w) dw = 0 \\
a_2 &= \frac{5}{2R^2} \int_{-1}^1 (-4w^4 + 5w^2 - 1) \left(\frac{3w^2 - 1}{2} \right) dw = \frac{5}{4R^2} \left(-\frac{12w^7}{7} + \frac{19w^5}{5} - \frac{8w^3}{3} + w \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{22}{21R^2} \\
a_3 &= \frac{7}{2R^3} \int_{-1}^1 (-4w^4 + 5w^2 - 1) \left(\frac{5w^3 - 3w}{2} \right) dw = 0 \\
a_4 &= \frac{9}{2R^4} \int_{-1}^1 (-4w^4 + 5w^2 - 1) \left(\frac{35w^4 - 30w^2 + 3}{8} \right) dw \\
&= \frac{9}{16R^4} \left(-\frac{140w^9}{9} + \frac{295w^7}{7} - \frac{197w^5}{5} + \frac{45w^3}{3} - 3w \right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{32}{35R^4} \\
a_n &= 0 \quad \text{si } n \geq 5.
\end{aligned}$$

Pour vérifier cette dernière équation, nous notons que

$$\begin{aligned}
u(R, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = \tilde{f}(w) = -4w^4 + 5w^2 - 1 \quad \text{si } \cos(\phi) = w \\
&= \underbrace{-\frac{2}{15} + \frac{22}{21R^2}(R^2) \left(\frac{3w^2 - 1}{2} \right) - \frac{32}{35R^4} R^4 \left(\frac{35w^4 - 30w^2 + 3}{8} \right)}_{(-4w^4 + 5w^2 - 1)} + \sum_{n=5}^{\infty} a_n R^n P_n(w).
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=5}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pour tout $n \geq 5$ parce que les P_n forment une famille orthogonale sur $[-1, 1]$. Conséquemment la solution est

$$u(r, \phi) = -\frac{2}{15} + \frac{22r^2}{21R^2} \frac{(3\cos^2(\phi) - 1)}{2} - \frac{32r^4}{35R^4} \frac{(35\cos^4(\phi) - 30\cos^2(\phi) + 3)}{8}.$$

c) Si $f(\phi) = \cos(4\phi)$, alors

$$f(\phi) = \cos(4\phi) = 2\cos^2(2\phi) - 1 = 2[2\cos^2(\phi) - 1]^2 - 1 = 8\cos^4(\phi) - 8\cos^2(\phi) + 1$$

et ainsi $\tilde{f}(w) = 8w^4 - 8w^2 + 1$ obtenu en substituant w à la place de $\cos(\phi)$. Nous pouvons maintenant calculer les coefficients a_n .

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (8w^4 - 8w^2 + 1)(1) dw = \frac{1}{2} \left(\frac{8w^5}{5} - \frac{8w^3}{3} + w \right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{15} \\
a_1 &= \frac{3}{2R} \int_{-1}^1 (8w^4 - 8w^2 + 1)(w) dw = 0 \\
a_2 &= \frac{5}{2R^2} \int_{-1}^1 (8w^4 - 8w^2 + 1) \left(\frac{3w^2 - 1}{2} \right) dw = -\frac{16}{21R^2} \\
a_3 &= \frac{7}{2R^3} \int_{-1}^1 (8w^4 - 8w^2 + 1) \left(\frac{5w^3 - 3w}{2} \right) dw = 0 \\
a_4 &= \frac{9}{2R^4} \int_{-1}^1 (8w^4 - 8w^2 + 1) \left(\frac{35w^4 - 30w^2 + 3}{8} \right) dw = \frac{64}{35R^4} \\
a_n &= 0 \quad \text{si } n \geq 5.
\end{aligned}$$

Pour vérifier cette dernière équation, nous notons que

$$\begin{aligned} u(R, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = \tilde{f}(w) = 8w^4 - 8w^2 + 1 \quad \text{si } \cos(\phi) = w \\ &= \underbrace{-\frac{1}{15} - \frac{16}{21R^2}(R^2) \left(\frac{3w^2 - 1}{2} \right) + \frac{64}{35R^4} R^4 \left(\frac{35w^4 - 30w^2 + 3}{8} \right)}_{(8w^4 - 8w^2 + 1)} + \sum_{n=5}^{\infty} a_n R^n P_n(w). \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=5}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pour tout $n \geq 5$ parce que les P_n forment une famille orthogonale sur $[-1, 1]$. Conséquemment la solution est

$$u(r, \phi) = -\frac{1}{15} - \frac{16r^2}{21R^2} \frac{(3\cos^2(\phi) - 1)}{2} + \frac{64r^4}{35R^4} \frac{(35\cos^4(\phi) - 30\cos^2(\phi) + 3)}{8}.$$

d) Si $f(\phi) = \sin(\phi) \sin(4\phi)$, alors

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \sin(\phi) \sin(4\phi) = 2\sin(\phi) \sin(2\phi) \cos(2\phi) = 2\sin(\phi) [2\sin(\phi) \cos(\phi)] [2\cos^2(\phi) - 1] \\ &= 4[1 - \cos^2(\phi)] \cos(\phi) [2\cos^2(\phi) - 1] = -8\cos^5(\phi) + 12\cos^3(\phi) - 4\cos(\phi) \end{aligned}$$

et ainsi $\tilde{f}(w) = -8w^5 + 12w^3 - 4w$ obtenu en substituant w à la place de $\cos(\phi)$. Nous pouvons maintenant calculer les coefficients a_n .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (-8w^5 + 12w^3 - 4w)(1) dw = 0 \\ a_1 &= \frac{3}{2R} \int_{-1}^1 (-8w^5 + 12w^3 - 4w)(w) dw = -\frac{8}{35R} \\ a_2 &= \frac{5}{2R^2} \int_{-1}^1 (-8w^5 + 12w^3 - 4w) \left(\frac{3w^2 - 1}{2} \right) dw = 0 \\ a_3 &= \frac{7}{2R^3} \int_{-1}^1 (-8w^5 + 12w^3 - 4w) \left(\frac{5w^3 - 3w}{2} \right) dw = \frac{56}{45R^3} \\ a_4 &= \frac{9}{2R^4} \int_{-1}^1 (-8w^5 + 12w^3 - 4w) \left(\frac{35w^4 - 30w^2 + 3}{8} \right) dw = 0 \\ a_5 &= \frac{11}{2R^5} \int_{-1}^1 (-8w^5 + 12w^3 - 4w) \left(\frac{63w^5 - 70w^3 + 15w}{8} \right) dw = -\frac{64}{63R^5} \\ a_n &= 0 \quad \text{si } n \geq 6. \end{aligned}$$

Pour vérifier cette dernière équation, nous notons que

$$\begin{aligned} u(R, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = \tilde{f}(w) = -8w^5 + 12w^3 - 4w \quad \text{si } \cos(\phi) = w \\ &= \underbrace{-\frac{8}{35R} R w + \frac{56}{45R^3} (R^3) \left(\frac{5w^3 - 3w}{2} \right) - \frac{64}{63R^5} R^5 \left(\frac{63w^5 - 70w^3 + 15w}{8} \right)}_{(-8w^5 + 12w^3 - 4w)} + \sum_{n=6}^{\infty} a_n R^n P_n(w). \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=6}^{\infty} a_n R^n P_n(w) = 0 \Rightarrow a_n = 0$ pour tout $n \geq 6$ parce que les P_n forment une famille orthogonale sur $[-1, 1]$. Conséquemment la solution est

$$u(r, \phi) = -\frac{8r}{35R} \cos(\phi) + \frac{56r^3}{45R^3} \frac{(5\cos^3(\phi) - 3\cos(\phi))}{2} - \frac{64r^5}{63R^5} \frac{(63\cos^5(\phi) - 70\cos^3(\phi) + 15\cos(\phi))}{8}.$$

e) Si

$$f(\phi) = \begin{cases} c, & \text{si } 0 \leq \phi < \pi/2; \\ 0, & \text{si } \phi = \pi/2; \\ -c, & \text{si } \pi/2 < \phi \leq \pi. \end{cases} \quad \text{alors} \quad \tilde{f}(w) = \begin{cases} c, & \text{si } 0 < w \leq 1; \\ 0, & \text{si } w = 0; \\ -c, & \text{si } -1 \leq w < 0. \end{cases}$$

Donc

$$a_n = \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw = \frac{(2n+1)}{2R^n} \left[\int_{-1}^0 (-c) P_n(w) dw + \int_0^1 (c) P_n(w) dw \right].$$

Notons que si n est pair, alors $P_n(w)$ est une fonction paire et $\int_{-1}^0 P_n(w) dw = \int_0^1 P_n(w) dw$; alors que si n est impair, alors $P_n(w)$ est une fonction impaire et $\int_{-1}^0 P_n(w) dw = -\int_0^1 P_n(w) dw$. De cette remarque, nous avons

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{(2n+1)c}{R^n} \int_0^1 P_n(w) dw, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous allons utiliser la formule de Rodrigues pour évaluer cette dernière intégrale:

$$P_n(w) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dw^n} [(w^2 - 1)^n].$$

De plus ici $n \geq 1$, parce que n est impair. Nous avons donc

$$\int_0^1 P_n(w) dw = \frac{1}{2^n n!} \int_0^1 \frac{d^n}{dw^n} [(w^2 - 1)^n] dw = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [(w^2 - 1)^n] \right) \Big|_{w=0}^{w=1}.$$

Mais nous avons vu en classe au lemme 1 que

$$\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [(w^2 - 1)^n] \Big|_{w=\pm 1} = 0.$$

Il suffit alors d'évaluer

$$\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [(w^2 - 1)^n] \Big|_{w=0} \quad \text{lorsque } n \text{ est impair.}$$

Notons $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Nous pouvons développer $(w^2 - 1)^n$ en utilisant la formule du binome. Ainsi

$$(w^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} w^{2(n-k)}.$$

Nous avons $2n - 2k < (n - 1) \Leftrightarrow n < 2k - 1 \Leftrightarrow 2p + 1 < 2k - 1 \Leftrightarrow p + 1 < k$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [(w^2 - 1)^n] &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k+1)!} w^{n-2k+1} \Rightarrow \\ \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [(w^2 - 1)^n] \Big|_{w=0} &= (-1)^{p+1} \frac{n! (2n-2p-2)!}{(p+1)! p! (n-2p-2+1)!} = (-1)^{p+1} \frac{n! (2p)!}{(p+1)! (p)!} \end{aligned}$$

où $n = 2p + 1$. Conséquemment

$$\int_0^1 P_n(w) dw = \frac{1}{2^n n!} \left(0 - (-1)^{p+1} \frac{n! (2p)!}{(p+1)! (p)!} \right) = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p+1} (p+1)! p!}.$$

La solution est

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2(2p+1)+1) c(2p)! r^{2p+1}}{2^{2p+1} (p+1)! p! R^{2p+1}} P_{2p+1}(\cos(\phi)) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(4p+3) c(2p)! r^{2p+1}}{2^{2p+1} (p+1)! p! R^{2p+1}} P_{2p+1}(\cos(\phi)). \end{aligned}$$

Exercice 11.2

Nous avons vu que la solution est

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{r^n}{R^n} P_n(\cos(\phi)) \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos(\phi)) \sin(\phi) d\phi \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

La valeur de u au centre de la sphère est

$$u(0, 0) = a_0 P_0(\cos(0)) = a_0 = \frac{1}{2} \int_0^\pi f(\phi) \sin(\phi) d\phi.$$

Pour calculer la moyenne des valeurs de $u(R, \phi)$, il nous faut une paramétrisation de la sphère, ensuite calculer l'élément de surface et finalement l'intégrale de surface. Une paramétrisation est obtenue par

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta, \phi) = R \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y(\theta, \phi) = R \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z(\theta, \phi) = R \cos(\phi) \end{array} \right\} \quad \text{où} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Pour calculer l'élément de surface, nous devons calculer la norme du produit vectoriel

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi} \right).$$

Ce produit vectoriel est égal à

$$\begin{aligned} &(-R \sin(\theta) \sin(\phi), R \cos(\theta) \sin(\phi), 0) \times (R \cos(\theta) \cos(\phi), R \sin(\theta) \cos(\phi), -R \sin(\phi)) = \\ &(-R^2 \cos(\theta) \sin^2(\phi), -R^2 \sin(\theta) \sin^2(\phi), -R^2 \sin(\phi) \cos(\phi)). \end{aligned}$$

Donc l'élément de surface est

$$\sqrt{(-R^2 \cos(\theta) \sin^2(\phi))^2 + (-R^2 \sin(\theta) \sin^2(\phi))^2 + (-R^2 \sin(\phi) \cos(\phi))^2} d\theta d\phi = R^2 \sin(\phi) d\theta d\phi.$$

La moyenne des valeurs de $u(R, \phi)$ est égale à

$$\frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\phi) R^2 \sin(\phi) d\theta d\phi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin(\phi) d\theta d\phi} = \frac{2\pi R^2 \int_0^\pi f(\phi) \sin(\phi) d\phi}{2\pi R^2 \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi} = \frac{\int_0^\pi f(\phi) \sin(\phi) d\phi}{-\left[\cos(\phi)\right]_0^\pi} = \frac{1}{2} \int_0^\pi f(\phi) \sin(\phi) d\phi.$$

Mais ceci est exactement $u(0, 0)$. Donc nous avons démontré le résultat.

Exercice 11.3

En coordonnées polaires, l'équation de Laplace devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{où } u = u(r, \theta).$$

La condition à la frontière est $u(R, \theta) = \tilde{f}(\theta)$. De plus nous allons supposer que $u(r, \theta)$ est une fonction bornée.

Nous allons premièrement considérer le problème intermédiaire suivant

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{avec } u = u(r, \theta) \text{ est une fonction bornée.}$$

et nous allons rechercher des solutions non triviales de la forme $u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$. Alors en remplaçant dans l'EDP, nous obtenons

$$F''G + \frac{1}{r^2}FG'' + \frac{1}{r}F'G = 0$$

où F' , F'' sont les dérivées première et seconde de F par rapport à r et G'' est la dérivée seconde de G par rapport à θ . En divisant des deux côtés de l'équation par FG/r^2 , nous obtenons

$$r^2 \frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + r \frac{F'}{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G}.$$

Le terme de droite de cette dernière équation est une fonction de θ et celui de gauche est une fonction de r . Pour que ceci soit possible, il faut que chacun de ces termes soit constant. Donc

$$r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G} = \lambda \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Nous obtenons deux équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} r^2 F'' + rF' - \lambda F &= 0 \\ G'' + \lambda G &= 0 \end{aligned}$$

La première équation $r^2 F'' + rF' - \lambda F = 0$ est l'équation de Cauchy. Nous avons déjà considéré en classe celle-ci. Posons $z = \ln(r)$. Alors

$$\frac{dF}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dF}{dz}, \quad \frac{d^2 F}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz}.$$

En remplaçant dans l'équation de Cauchy, nous obtenons

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{dF}{dz} + \frac{dF}{dz} - \lambda F = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 F}{dz^2} - \lambda F = 0.$$

Si $\lambda < 0$, disons que $\lambda = -p^2$ avec $p > 0$, alors la solution générale de cette dernière équation différentielle est $A \cos(pz) + B \sin(pz)$, i.e. $F(r) = A \cos(p \ln(r)) + B \sin(p \ln(r))$. Mais nous devons exclure ce cas, parce que F n'est pas définie à $r = 0$.

Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de cette dernière équation différentielle est $A + Bz$, i.e. $F(r) = A + B \ln(r)$. Comme nous voulons que $F(r)$ soit bornée, alors $B = 0$. Nous avons donc une solution possible $F(r) \equiv A$ pour $\lambda = 0$.

Si $\lambda > 0$, disons que $\lambda = p^2$ avec $p > 0$, alors la solution générale de cette dernière équation différentielle est $Ae^{pz} + Be^{-pz}$, i.e. $F(r) = Ar^p + Br^{-p}$. Comme nous voulons que $F(r)$ soit bornée, alors $B = 0$. Sinon en considérant $r \rightarrow 0^+$, nous obtenons une contradiction.

Si nous résumons, nous avons une solution $F_p(r) = Ar^p$ de l'équation $r^2 F'' + rF' - \lambda F = 0$ pour chaque $p \in \mathbf{R}, p \geq 0$; dans ce cas $\lambda = \lambda_p = p^2$.

Si nous considérons maintenant l'équation $G'' + \lambda G = 0$ pour $\lambda = \lambda_p = p^2$, alors la solution générale de cette équation est $G(\theta) = C \cos(p\theta) + D \sin(p\theta)$. Mais nous pouvons aussi considérer que $G(\theta)$ est périodique de période 2π , parce que la valeur de G à θ et à $\theta + 2\pi$ correspond à la valeur de G pour un même point. Comme G est périodique de période 2π , alors $p \in \mathbf{N}$.

Ainsi $a_n r^n \cos(n\theta)$ pour $n \geq 0$ et $b_n r^n \sin(n\theta)$ pour $n \geq 1$ sont des solutions de (*). Par le principe de superposition,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \sin(n\theta)$$

est une solution formelle de (*).

Si nous revenons au problème initial et considérons la condition à la frontière, alors

$$u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n R^n \sin(n\theta) = \tilde{f}(\theta).$$

Nous avons ici une série de Fourier. Donc

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta, \quad a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

et conséquemment

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

b) Au centre du disque, la valeur est

$$u(0, 0) = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta.$$

La moyenne des valeurs de u sur le cercle est

$$\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta = u(0, 0).$$

Le résultat est ainsi démontré.

ANNEXE 2

Aide-mémoire.

Série de Fourier pour une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[-\ell, \ell]$ où $\ell > 0$ est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right]$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx$$

Série de Fourier paire pour une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, \ell]$ où $\ell > 0$ est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx.$$

Série de Fourier impaire pour une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, \ell]$ où $\ell > 0$ est

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx.$$

Identités trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta), & \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), & 2 \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta), \\ 2 \sin(\alpha) \cos(\beta) &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Équation d'onde pour une corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ où } 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0, \text{ avec } u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0.$$

Solution:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right) \right]$$

$$\text{avec} \quad a_n = \left(\frac{2}{\ell}\right) \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \left(\frac{2}{cn\pi}\right) \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Équation de la chaleur pour une tige

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ où } 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0, \text{ avec } u(x, 0) = f(x), u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0.$$

Solution:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{\ell}\right]^2 t\right) \quad \text{avec} \quad b_n = \left(\frac{2}{\ell}\right) \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \, dx \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Équations différentielles ordinaires avec leurs solutions

a) $f'' - \lambda f = 0$, où $f = f(z)$ et f'' est la dérivée seconde par rapport à z , a comme solution générale

$$f(z) = \begin{cases} Ae^{\nu z} + Be^{-\nu z}, & \text{si } \lambda = \nu^2 > 0 \text{ avec } \nu > 0; \\ A + Bz, & \text{si } \lambda = 0; \\ A \cos(\nu z) + B \sin(\nu z), & \text{si } \lambda = -\nu^2 < 0 \text{ avec } \nu > 0. \end{cases}$$

b) $f' - \lambda f = 0$ où $f = f(z)$ et $f'(z)$ est la dérivée par rapport à z , a comme solution générale $f(z) = Ae^{\lambda z}$

c) $f'' + af' + bf = 0$ où $f = f(z)$, $f'(z)$ et $f''(z)$ sont respectivement les première et seconde dérivées de f par rapport à z et $a, b \in \mathbf{R}$, a comme solution

$$f(z) = \begin{cases} Ae^{\alpha z} + Be^{\beta z}, & \text{si le polynôme } D^2 + aD + b \text{ a deux racines réelles distinctes } \alpha, \beta; \\ Ae^{\alpha z} + Bze^{\alpha z}, & \text{si le polynôme } D^2 + aD + b \text{ a une racine réelle double } \alpha; \\ Ae^{uz} \cos(vz) + Be^{uz} \sin(vz), & \text{si le polynôme } D^2 + aD + b \text{ a deux racines complexes} \\ & \text{non-réelles } \alpha = u + vi, \beta = u - vi; \end{cases}$$

où $i = \sqrt{-1}$.

d) $z^2 f'' + a' z f' + b' f = 0$ où $f = f(z)$, $f'(z)$ et $f''(z)$ sont respectivement les première et seconde dérivées de f par rapport à z et $a', b' \in \mathbf{R}$, est une équation d'Euler. Cette équation est transformée en une du type (c) ci-dessus en utilisant la substitution $x = \ln(z)$.

Identités trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta), & \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), & 2 \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta), \\ 2 \sin(\alpha) \cos(\beta) &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Équation de Laplace sur un rectangle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) & \text{et} & & u(x, N) &= f_2(x) & \text{pour } x \in [0, M]; \\ u(0, y) &= g_1(y) & \text{et} & & u(M, y) &= g_2(y) & \text{pour } y \in [0, N] \end{aligned}$$

est

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \left[a_n \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{M}\right) \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \left[c_n \sinh\left(\frac{n\pi(x-M)}{N}\right) + d_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$a_n = \left(\frac{2}{M \sinh(-n\pi N/M)} \right) \int_0^M f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx, \quad b_n = \left(\frac{2}{M \sinh(n\pi N/M)} \right) \int_0^M f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx$$

$$c_n = \left(\frac{2}{N \sinh(-n\pi M/N)} \right) \int_0^N g_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy, \quad d_n = \left(\frac{2}{N \sinh(n\pi M/N)} \right) \int_0^N g_2(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

Équation d'onde pour une membrane circulaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{en coordonnées polaires où } u = u(r, \theta, t), \quad 0 \leq r \leq R, \quad t \geq 0.$$

Si nous avons des conditions initiales indépendantes de θ : $u(R, t) = 0$, $u(r, 0) = f(r)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = g(r)$,

alors les solutions (indépendantes de θ) sont:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{c\alpha_n}{R} t \right) + b_n \sin \left(\frac{c\alpha_n}{R} t \right) \right] J_0 \left(\frac{\alpha_n r}{R} \right) \quad \text{où}$$

$J_0(x)$ est la fonction de Bessel du premier type d'ordre 0, α_n est la $n^{\text{ième}}$ racine positive de J_0 ,

$$a_n = \frac{2}{(R J_1(\alpha_n))^2} \int_0^R r f(r) J_0 \left(\frac{\alpha_n r}{R} \right) dr \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{c \alpha_n R (J_1(\alpha_n))^2} \int_0^R r g(r) J_0 \left(\frac{\alpha_n r}{R} \right) dr$$

Équation du potentiel pour une distribution de charge électrique sur une sphère

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cotan(\phi)}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en coordonnées sphériques}$$

Si nous avons des conditions initiales indépendantes de θ : $u(R, \theta, \phi) = f(\phi)$ et $u(r, \phi) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$.

alors les solutions (indépendantes de θ) sont:

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos(\phi)) \quad (\text{à l'intérieur de } S)$$

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} P_n(\cos(\phi)) \quad (\text{à l'extérieur de } S)$$

où $P_n(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre et si $\tilde{f}(w)$ dénote $f(\phi) = f(\arccos(w))$ comme fonction de $w = \cos(\phi)$, alors

$$a_n = \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(2n+1) R^{n+1}}{2} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw.$$

Équation et fonctions de Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (\text{Équation de Bessel})$$

$$\int_0^R x J_n \left(\frac{\alpha_{m,n} x}{R} \right) J_n \left(\frac{\alpha_{k,n} x}{R} \right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq m; \\ (R J_{n+1}(\alpha_{m,n}))^2 / 2, & \text{si } k = m. \end{cases} \quad (\text{Orthogonalité})$$

où $J_n(x)$ est la fonction de Bessel du premier type d'ordre n et $\alpha_{m,n}$ est le $m^{\text{ième}}$ zéro de J_n .

$$[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (\text{Dérivée})$$

Équation et fonctions de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (\text{Équation de Legendre})$$

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n (m!)((n-m)!((n-2m)!)} x^{n-2m} \quad (\text{Polynômes de Legendre})$$

où $M = n/2$ si n est pair et $M = (n-1)/2$ si n est impair. En particulier,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, \quad P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \quad P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, \\ P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8.$$

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ 2/(2m+1), & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (\text{Orthogonalité})$$