Département de mathématiques Année Universitaire : 2021-2022

Module : : Mesure et Intégration 3^{eme} anée L.M.D

TD 02 : : Mesure

Exercice 01 :

Soit $X = \{a, b, c\}$ et soit $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ On définit l'application μ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{a\}) = 1, \mu(\{b, c\}) = 0, \mu(X) = 1$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur X . Conclure
2. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.
3. Montrer que l'espace $(X, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas complet.
4. Donner la complétude de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 02 :

Soit $X = \mathbb{N}$. Pour tout $L > 0$ on note $\mu_L : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$, $\mu_L(A) = \sum_{k \in A} L^k$ pour $A \subset X$.

1. Prouver que μ_L est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$ pour tout $L > 0$.
2. Pour quels $L > 0$ la mesure μ_L est-elle finie ?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $A_n = X \cap [n, +\infty[$. Calculer $\mu_L(A_n)$ et $\mu_L(\mathbb{N} \setminus A_n)$ pour tous $L > 0$. et $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $(L_n : n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de réels strictement positifs, avec limite $L < +\infty$. Soit $(A_n : n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de parties de X et $A = \cup A_n$. Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{L_n}(A_n) = \mu_L(A)$.

Exercice 03 :

1. Donner la définition d'une tribu.
2. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $B \in \mathcal{A}$ tel que $0 < \mu(B) < +\infty$.
(a) Montrer que l'application μ_B définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\mu_B(A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

- (b) Sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on considère $\mu = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} \delta_k$ et $B = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$. Calculer $\mu(B)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mu(B)(k)$. En déduire l'expression de $\mu(B)$.
3. On pose, pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sum_{n \geq 1} n e^{-nx}$.
Calculer $\int_{[1, +\infty[} f(x) \lambda(dx)$, λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.