جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

Institut de Sciences et Technologies
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2021/2022
Module : Optimisation sans contraintes

TD1 : Rappels de calcul différentiel, Convexité

Exercice 1

Décomposer la forme quadratique suivante en sommes de carrés.

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt + yt.$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Déterminer les fonctions f'_x et f'_y, sont-elles contiues au point $(0,0)$.
- La fonction f est-elle differentiable en $(0,0)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \text{ si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Calculer $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.
- Montrer à l'aide de la définition que f n'est pas differentiable en $(0,0)$.

Exercice 4

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $(0,0)$?
2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?
4. f est-elle $C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$? La fonction est-elle coercive ?

Exercice 5

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

- $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)^\top$.
- $f(x, y) = \left(xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1 + x^2)\right)^\top$.
- $f(x, y) = \left(e^x + y^3, y, \sinh y + 3\cosh x\right)^\top$.

Exercice 6

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x, y) = -x^2 + 2xy + e^{xy}.$$
Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(1, 0)$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = -x^2 + 2xy + e^{x+y}\cos(x^2)$.
Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(0, 0)$.

Exercice 7

Calculer le gradient et le Hessien de la fonction de Rosen-brock :
$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$
Déterminer le gradient et la matrice Hessienne de f. Cette dernière est-elle semi-définie positive, définie positive ?

Exercice 9

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de la fonction
$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto \|Ax - b\|^2 \end{aligned}$$
Cette fonction est-elle coercive ?

Exercice 10

1. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ où A est une matrice carrée symétrique $n \times n$.
Calculer $\nabla f(x)$.
2. On considère la fonction $g(x) = \frac{1}{2}x^\top Bx - b^\top x$ où B est une matrice carrée $n \times n$.
Calculer $\nabla^2 g(x)$.

3. Soit la fonction $h(x) = Cx + d$ où C est une matrice $n \times m$.
   Calculer $h'(x)$.

Exercice 11

Montrer qu'une norme est convexe.

Exercice 12

Montrer que la fonction indicatrice d'un ensemble K définie par :

$$I_K = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

est convexe si et seulement si K est convexe.

Exercice 13

Montrer que la fonction suivante est convexe :

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3.$$

Exercice 14

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0,1]$. On pose $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \left\{sx + (1-s)y;\ x \in C_1,\ y \in C_2\right\}$. Démontrer que C est convexe.

Exercice 15

Soit C_1, C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $C_1 + C_2 = \left\{x + y;\ x \in C_1,\ y \in C_2\right\}$. Démontrer que $C_1 + C_2$ est convexe.

Exercice 16

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 17

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a + e^b}{2}$.
2. Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
3. En déduire que $\forall a, b > 1,\ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a. \ln b}$.
4. En utilisant la concavité de la fonction ln, montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercice 18

Soit F une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Pour u et v fixés dans $\mathbb{R}^n$ on définit la fonction de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$ suivante.

$$\forall \lambda > 0 \qquad \Phi(\lambda) = \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda}.$$

Montrer que si F est convexe alors Φ est croissante.

Exercice 19

Soit U une partie convexe d'un espace vectoriel V . Montrer que $f : U \subset V \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si l'ensemble suivant :

$$\text{épi}(f) = \left\{(v, \alpha) \in V \times \mathbb{R} \mid v \in U, \quad \alpha \geq f(v)\right\}$$

est une partie convexe de $V \times \mathbb{R}$.

Exercice 20

On définit pour $(x, y) \in K^2$ où K est un ensemble convexe, la fonction $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\phi(t) = f(tx + (1 - t)y).$$

Montrer qu'on a l'équivalence

$$\phi(t) \text{ convexe sur } [0, 1], \forall (x, y) \in K^2 \Longleftrightarrow f \text{ convexe sur } K.$$

Exercice 21

Soit $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ où A est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$, une fonctionnelle quadratique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer les propositions suivantes :

1. J est convexe si et seulement si A est semi-définie positive.
2. J est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.
3. $\exists u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{u\right\} \;\; J(u) < J(v)$ si et seulement si A est définie positive.
4. $\exists u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{u\right\} \;\; J(u) < J(v)$ si et seulement si A est définie positive et l'ensemble $\left\{w \in \mathbb{R}^n \mid Aw = b\right\}$ n'est pas vide.
5. Si la matrice A est semi-définie positive et si l'ensemble $\left\{w \in \mathbb{R}^n \mid Aw = b\right\}$ est vide, alors $\liminf_{v \in \mathbb{R}} J(v) = -\infty$.

Exercice 22

Soit A une matrice sym?trique définie positive à coefficients réels. Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \;\; (Av, v) \geq \alpha \|v\|^2 ,$$

où $(., .)$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

 (Bonne chance)