جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

Faculté de Sciences et Technologies
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2021/2022
Module : Optimisation sans contraintes

TD2 : Optimisations sans contraintes

Exercice 1

Les fonctions f suivantes sont-elles coercives ?

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$,
2. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (a, x) + b$ avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$,
3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2 - 1$,
4. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 + 2x_2^2$,
5. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1000x_1 - 5000$.

Exercice 2

Montrer par un exemple que la condition $\nabla f = 0$ est une condition **nécessaire** d'optimalité et **pas suffisante**.

Exercice 3

Soit la fonction, définie sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2$$

1. Montrer que f est coercive.
2. Calculer les points critiques de f.
3. En déduire le minimum global de f.

Exercice 4

Trouver les minima et les maxima sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{6}x_2^3$,
2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 1$,
3. $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 + 27$.
4. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$,
5. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$,

Exercice 5

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$;
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto x^3 y^2 (1 - x - y)$;
3. $f_3 : (x, y) \longmapsto x^3 + 3xy^2 + 15x + 12y$;
4. $f_4 : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Existent-ils des exrtrema globaux ?

Exercice 6

Étudiez les extrémums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2.$$

Exercice 7

1. Déterminer et classer les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2 - y^2)}.$$

2. La fonction f est-elle coercive ?
3. existent-ils des max ou des min globaux ?

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + x + y^3$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. La fonction admet-elle des extrema locaux dans R^2 ?
3. Comparer $f(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ et $f(0, -1)$, que peut-on déduire pour la fonction f ?

Exercice 9

On considère la fonction J_p définie sur $\mathbb{R}^3 (p \in \mathbb{R})$.

$$J_p(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - p(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

1. Montrer que la fonction J_p est coercive, c'est-à-dire que $\lim_{||(x,y,z)||} J_p(x, y, z) = +\infty$. En déduire que J_p admet un minimum global.
2. Montrer qu'il existe une valeur $p_0 \in \mathbb{R}$ telle que :
   - Pour $p < p_0$, J_p admet un seul point critique.
   - Pour $p > p_0$, J_p admet 27 points critiques. On précisera la valeur de p_0 ainsi que celle des 27 points critiques.
3. Trouver les minima globaux de J_p lorsque $p \leq p_0$.

4. On suppose maintenant $p > p_0$. Calculer le Hessien de J_p et étudier la nature des points critiques. En déduire que la fonction J_p admet 8 minima globaux que l'on précisera.

Exercice 10

Une firme produit deux types de biens A et B. Son coût total de fabrication, noté C, et la demande respective des deux biens q_A et q_B sont donnés par

$$\begin{aligned} C &= q_A^2 + q_B^2 + 10 \\ q_A &= 40 - 2p_A - p_B \\ q_B &= 35 - p_A - p_B \end{aligned} \tag{1}$$

- Quels sont les niveaux de production qui maximisent le profit ?
- Quels sont les prix de A et B qui suscitent une demande correspondant à ces niveaux optimaux ?

Exercice 11 (Problèmes de gestion de stocks).

Soient $p_1 = 52$ et $p_2 = 44$ les prix respectifs de deux produits . Soient q_1 et q_2 les quantités respectives de ces produits. Le revenu issu de la vente est donc : $R = p_1q_1 + p_2q_2$. La fonction coût est : $C = q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2$ et le bénéfice réalisé est : $\Pi = R - C$. Trouver les quantités q_1 et q_2 maximisant le bénéfice.

Exercice 12

Même problème avec des prix adaptatifs , i.e. variant en fonction de la quantité de produits

$$\begin{cases} p_1 = 256 - 3q_1 - q_2 \\ p2 = 222 + q_1 - 5q_2. \end{cases}$$

Exercice 13

Chercher les dimensions d'un wagon rectangulaire non couvert (ou d'une caisse sans couvercle) telles que pour un volume donné V , la somme des aires des côtés et du plancher soit minimale.

Exercice 14

On voudrait installer une antenne pour connecter 4 clients importants. Cette antenne doit se trouver au plus proche de chaque client, en donnant priorité aux meilleurs clients.
Pour chaque client, on connait :

- sa localisation : les coordonnées (x,y) ;
- le nombre d'heures de communication par mois.

Le problèeme consiste à trouver (x,y) tel que

$$\min 200\sqrt{(x-5)^2 + (y-10)^2} + 150\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2} + 200\sqrt{x^2 + (y-10)^2} + 300\sqrt{(x-12)^2 + y^2}.$$

 (Bonne chance)