Université de Relizane

Département de Mathématiques L2

Chapitre 1: Logique mathématique

La logique mathématique ou métamathématique est une [discipline](https://fr.wikipedia.org/wiki/Discipline_%28sp%C3%A9cialit%C3%A9%29) des [mathématiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques)

introduite à la fin du xixe siècle, qui s'est donné comme objet l'étude des mathématiques en tant que [langage](https://fr.wikipedia.org/wiki/Langage_math%C3%A9matique).

Les objets fondamentaux de la logique mathématique sont les [*formules*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_%28math%C3%A9matiques%29) représentant les énoncés mathématiques, les *dérivations* ou [*démonstrations formelles*](https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9monstration_formelle) représentant les [raisonnements mathématiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_et_raisonnement_math%C3%A9matique) et les *sémantiques* ou *modèles* ou *interprétations* dans des [structures](https://fr.wikipedia.org/wiki/Structure_%28logique_math%C3%A9matique%29) qui donnent un « sens » mathématique générique aux formules (et parfois même aux démonstrations) comme certains invariants : par exemple l'interprétation des formules du [calcul des prédicats](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_pr%C3%A9dicats) permet de leur affecter une *valeur de vérité*.

Histoire de la logique mathématique :

Naissance de la logique mathématique et logicisme :

La logique mathématique[2](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-3) est née à la fin du xixe siècle de la [logique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique) au sens philosophique du terme ; elle est l'une des pistes explorées par les mathématiciens de cette époque afin de résoudre la [crise des fondements](https://fr.wikipedia.org/wiki/Crise_des_fondements) provoquée par la complexification des mathématiques et l'apparition des [paradoxes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe). Ses débuts sont marqués par la rencontre entre deux idées nouvelles :

* la volonté chez [Frege](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege), [Russell](https://fr.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell), [Peano](https://fr.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano%22%20%5Co%20%22Giuseppe%20Peano) et [Hilbert](https://fr.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert) de donner une [fondation](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fondation_des_math%C3%A9matiques) axiomatique aux mathématiques ;
* la découverte par [George Boole](https://fr.wikipedia.org/wiki/George_Boole) de l'existence de [structures](https://fr.wikipedia.org/wiki/Structure_%28math%C3%A9matiques%29) [algébriques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Structure_alg%C3%A9brique) permettant de définir un « calcul de vérité ».

La logique mathématique se fonde sur les premières tentatives de traitement formel des mathématiques, dues à [Leibniz](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz) et [Lambert](https://fr.wikipedia.org/wiki/Johann_Heinrich_Lambert) (fin xviie siècle - début xviiie siècle). Leibniz a en particulier introduit une grande partie de la notation mathématique moderne (usage des quantificateurs, symbole d'intégration, etc.). Toutefois on ne peut parler de logique mathématique qu'à partir du milieu du xixe siècle, avec les travaux de [George Boole](https://fr.wikipedia.org/wiki/George_Boole) (et dans une moindre mesure ceux d'[Auguste De Morgan](https://fr.wikipedia.org/wiki/Auguste_De_Morgan)) qui introduit un calcul de vérité où les combinaisons logiques comme la conjonction, la disjonction et l'implication, sont des opérations analogues à l'addition ou la multiplication des entiers, mais portant sur les valeurs de vérité *faux* et *vrai* (ou 0 et 1) ; ces opérations *booléennes* se définissent au moyen de *tables de vérité*.

Le calcul de Boole véhiculait l'idée apparemment paradoxale, mais qui devait s'avérer spectaculairement fructueuse, que le langage mathématique pouvait se définir mathématiquement et devenir un objet d'étude pour les mathématiciens. Toutefois il ne permettait pas encore de résoudre les problèmes de fondements. Dès lors, nombre de mathématiciens ont cherché à l'étendre au cadre général du raisonnement mathématique et on a vu apparaître les *systèmes logiques formalisés* ; l'un des premiers est dû à [Frege](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege) au tournant du xxe siècle.

Les années 1920 et David Hilbert

En [1900](https://fr.wikipedia.org/wiki/1900) au cours d'une très célèbre conférence au [congrès international des mathématiciens](https://fr.wikipedia.org/wiki/Congr%C3%A8s_international_des_math%C3%A9maticiens) à Paris, [David Hilbert](https://fr.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert) a proposé une liste des [23 problèmes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8mes_de_Hilbert) non résolus les plus importants des mathématiques d'alors. Le deuxième était celui de la cohérence de l'[arithmétique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Arithm%C3%A9tique), c’est-à-dire de démontrer par des moyens *finitistes* la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique.

Le [*programme de Hilbert*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Programme_de_Hilbert) a suscité de nombreux travaux en logique dans le premier quart du siècle, notamment le développement de systèmes d'axiomes pour les mathématiques : les [axiomes de Peano](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Peano) pour l'[arithmétique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Arithm%C3%A9tique), ceux de [Zermelo](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ernst_Zermelo) complétés par [Skolem](https://fr.wikipedia.org/wiki/Thoralf_Skolem) et [Fraenkel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Abraham_Adolf_Fraenkel%22%20%5Co%20%22Abraham%20Adolf%20Fraenkel) pour la [théorie des ensembles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_ensembles) et le développement par [Whitehead](https://fr.wikipedia.org/wiki/Alfred_North_Whitehead) et [Russell](https://fr.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell) d'un programme de formalisation des mathématiques, les [Principia Mathematica](https://fr.wikipedia.org/wiki/Principia_Mathematica%22%20%5Co%20%22Principia%20Mathematica). C'est également la période où apparaissent les principes fondateurs de la [théorie des modèles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_mod%C3%A8les) : notion de *modèle* d'une théorie, [théorème de Löwenheim-Skolem](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_L%C3%B6wenheim-Skolem).

La logique à partir des années 1930 et Kurt Gödel

En 1929 [Kurt Gödel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del) montre dans sa thèse de doctorat son [théorème de complétude](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_compl%C3%A9tude) qui énonce le succès de l'entreprise de *formalisation* des mathématiques : tout raisonnement mathématique peut en principe être formalisé dans le [calcul des prédicats](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_pr%C3%A9dicats). Ce théorème a été accueilli comme une avancée notable vers la résolution du [programme de Hilbert](https://fr.wikipedia.org/wiki/Programme_de_Hilbert), mais un an plus tard, Gödel démontrait le [théorème d'incomplétude](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27incompl%C3%A9tude) (publié en 1931) qui montrait irréfutablement l'impossibilité de réaliser ce programme.

Ce résultat négatif n'a toutefois pas arrêté l'essor de la logique mathématique. Les années 1930 ont vu arriver une nouvelle génération de logiciens anglais et américains, notamment [Alonzo Church](https://fr.wikipedia.org/wiki/Alonzo_Church), [Alan Turing](https://fr.wikipedia.org/wiki/Alan_Turing), [Stephen Kleene](https://fr.wikipedia.org/wiki/Stephen_Cole_Kleene), [Haskell Curry](https://fr.wikipedia.org/wiki/Haskell_Curry%22%20%5Co%20%22Haskell%20Curry) et [Emil Post](https://fr.wikipedia.org/wiki/Emil_Post), qui ont grandement contribué à la définition de la notion d'[*algorithme*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithmique) et au développement de la théorie de la complexité algorithmique ([théorie de la calculabilité](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_la_calculabilit%C3%A9), [théorie de la complexité des algorithmes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_la_complexit%C3%A9_des_algorithmes)). La [théorie de la démonstration](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_la_d%C3%A9monstration) de Hilbert a également continué à se développer avec les travaux de [Gerhard Gentzen](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gerhard_Gentzen) qui a produit la première démonstration de *cohérence relative* et initié ainsi un programme de classification des théories axiomatiques.

Le résultat le plus spectaculaire de l'après-guerre est dû à [Paul Cohen](https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul_Cohen) qui démontre en utilisant la méthode du [forcing](https://fr.wikipedia.org/wiki/Forcing) l'indépendance de l'[hypothèse du continu](https://fr.wikipedia.org/wiki/Hypoth%C3%A8se_du_continu) en théorie des ensembles, résolvant ainsi le 1er problème de Hilbert. Mais la logique mathématique subit également une révolution due à l'apparition de l'informatique ; la découverte de la [correspondance de Curry-Howard](https://fr.wikipedia.org/wiki/Correspondance_de_Curry-Howard), qui relie les preuves formelles au [lambda-calcul](https://fr.wikipedia.org/wiki/Lambda-calcul) de Church et donne un contenu calculatoire aux démonstrations, va déclencher un vaste programme de recherche.

Intérêt de la logique mathématique dans les mathématiques

Interactions entre la logique et les mathématiques

L'intérêt principal de la logique réside dans ses interactions avec d'autres domaines des mathématiques et les nouvelles méthodes qu'elle y apporte. De ce point de vue les réalisations les plus importantes viennent de la [théorie des modèles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_mod%C3%A8les) qui est parfois considérée comme une branche de l'algèbre plutôt que de la logique ; la théorie des modèles s'applique notamment en [théorie des groupes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_groupes) et en [combinatoire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Combinatoire) ([théorie de Ramsey](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_Ramsey)).

D'autres interactions très productives existent toutefois : le développement de la [théorie des ensembles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_ensembles) est intimement lié à celui de la [théorie de la mesure](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_la_mesure) et a donné lieu à un domaine mathématique à part entière, la [théorie descriptive des ensembles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_descriptive_des_ensembles).[[non pertinent]](https://fr.wikipedia.org/wiki/Wikip%C3%A9dia%3AWikip%C3%A9dia_est_une_encyclop%C3%A9die) La [théorie de la calculabilité](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_la_calculabilit%C3%A9) est l'un des fondements de l'informatique théorique.

Depuis la fin du xxe siècle on a vu la [théorie de la démonstration](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_la_d%C3%A9monstration) s'associer à la [théorie des catégories](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_cat%C3%A9gories) et par ce biais commencer à interagir avec la [topologie algébrique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Topologie_alg%C3%A9brique). D'autre part avec l'apparition de la [logique linéaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_lin%C3%A9aire) elle entretient également des liens de plus en plus étroit avec l'[algèbre linéaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_lin%C3%A9aire), voire avec la [géométrie non commutative](https://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9om%C3%A9trie_non_commutative). Plus récemment la [théorie homotopique des types](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9orie_homotopique_des_types&action=edit&redlink=1) [(en)](https://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy_Type_Theory) créée une connexion riche entre la logique (la théorie des types) et les mathématiques (la théorie de l'homotopie) dont on n'entrevoit que les prémices.

Formalisation

La formalisation des mathématiques dans des systèmes logiques, qui a suscité en particulier les travaux de Whitehead et Russell, a été l'une des grandes motivation du développement de la logique mathématique. L'apparition d'outils informatiques spécialisés, [démonstrateurs automatiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9monstrateur_automatique_de_th%C3%A9or%C3%A8mes), [systèmes experts](https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_expert) et [assistants de preuve](https://fr.wikipedia.org/wiki/Assistant_de_preuve), a donné un nouvel intérêt à ce programme. Les assistants de preuve en particulier ont plusieurs applications en mathématique.

Tout d'abord dans la fin du xxe siècle et au début du xxie siècle deux anciennes conjectures ont été résolues en faisant appel à l'ordinateur pour traiter un très grand nombre de cas : le [théorème des quatre couleurs](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_quatre_couleurs) et la [conjecture de Kepler](https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Kepler). Les doutes soulevés par cette utilisation de l'ordinateur ont motivé la formalisation et la vérification complète de ces démonstrations.

D'autre part des programmes de formalisation de mathématiques utilisant les assistants de preuves se sont développés afin de produire un corpus complètement formalisé de mathématiques ; pour les mathématiques l'existence d'un tel corpus aurait en particulier l'intérêt de permettre des traitements algorithmiques comme la recherche par motif : trouver tous les théorèmes qui se déduisent du théorème des nombres premiers, trouver tous les théorèmes à propos de la [fonction zeta de Riemann](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_zeta_de_Riemann), etc.

Quelques résultats fondamentaux

Quelques résultats importants ont été établis pendant la décennie 1930 :

* Le [théorème de complétude](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_compl%C3%A9tude) du [calcul des prédicats](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_pr%C3%A9dicats) du premier ordre que [Gödel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del) a montré dans sa thèse de doctorat, un an avant son célèbre [théorème d'incomplétude](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27incompl%C3%A9tude_de_G%C3%B6del). Ce théorème énonce que toute démonstration mathématique peut être représentée dans le formalisme du calcul des prédicats (qui est donc *complet*) ;
* L'ensemble des théorèmes du calcul des prédicats n'est *pas* calculable, c'est-à-dire qu'aucun algorithme ne permet de vérifier si un énoncé donné est prouvable ou non. Il existe, cependant un algorithme qui étant donnée une formule du premier ordre en trouve une preuve en un temps fini s'il en existe une, mais continue indéfiniment sinon. On dit que l'ensemble des formules du premier ordre prouvables est « [récursivement énumérable](https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9cursivement_%C3%A9num%C3%A9rable) » ou « semi-décidable » ;
* La cohérence (non-contradiction) d'une théorie (ensemble d'axiomes), permettant de formaliser (au moins) l'[arithmétique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Arithm%C3%A9tique) (par exemple les [axiomes de Peano](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Peano)) n'est pas une conséquence de ces seuls axiomes[3](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-4). C'est le fameux second [théorème d'incomplétude de Gödel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27incompl%C3%A9tude_de_G%C3%B6del) ;
* Tout théorème purement logique peut être démontré en n'utilisant que des propositions qui sont des sous-formules de son énoncé. Connu sous le nom de *propriété de la sous-formule*, ce résultat est une conséquence du [théorème d'élimination des coupures](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Gentzen) en [calcul des séquents](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_s%C3%A9quents) de [Gerhard Gentzen](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gerhard_Gentzen) :
	+ La propriété de la sous-formule a pour conséquence la cohérence de la logique, car elle interdit la dérivation de la formule vide (identifiée à l'absurdité).

D'autres résultats importants ont été établis pendant la deuxième partie du xxe siècle.

* L'indépendance de l'[hypothèse du continu](https://fr.wikipedia.org/wiki/Hypoth%C3%A8se_du_continu) par rapport aux autres axiomes de la théorie des ensembles (ZF) est achevée en 1963 par [Paul Cohen](https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul_Cohen)[4](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-5) ;
* La théorie de la [calculabilité](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calculabilit%C3%A9) se développe ;
* Au tournant de la décennie 1980, la [correspondance de Curry-Howard](https://fr.wikipedia.org/wiki/Correspondance_de_Curry-Howard) identifie la simplification des démonstrations et les programmes, créant ainsi un pont entre mathématiques et informatique ;
* En 1990, cette correspondance est étendue à la [logique classique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_classique).
* La mécanisation et donc la formalisation complète de théorème de mathématiques comme le [Théorème des quatre couleurs](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_quatre_couleurs) ou le [Théorème de Feit-Thompson](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Feit-Thompson).
* Au xxie siècle, l'émergence de nouvelles branches prometteuses comme la [Théorie des types homotopiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_types_homotopiques).

Système logique

Définition

Un système logique ou système de déduction est un [système formel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_formel) constitué de trois composantes. Les deux premières définissent sa [syntaxe](https://fr.wikipedia.org/wiki/Syntaxe), la troisième sa [sémantique](https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9mantique) :

* Un ensemble de formules, ou *faits* ; dans les systèmes de [logique classique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_classique) ou [intuitionniste](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_intuitionniste), les formules représentent des énoncés mathématiques exprimés formellement. Les formules sont définies par des moyens combinatoires : [suites](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite) de symboles, [arbres](https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_%28combinatoire%29) étiquetés, [graphes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_graphes)…
* Un ensemble de [déductions](https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9duction_logique) ; les déductions sont également définies par des moyens combinatoires. Une déduction permet de dériver des formules (les *formules prouvables* ou *théorèmes*) à partir de formules de départ (les *axiomes*) au moyen de règles (les *règles d'inférence*) ;
* Une *interprétation* des formules ; il s'agit d'une [fonction](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_%28math%C3%A9matiques%29) associant à toute formule un objet dans une structure abstraite appelée *modèle*, ce qui permet de définir la *validité* des formules.

Syntaxe et sémantique

La caractéristique principale des formules et des déductions est qu'il s'agit d'objets *finis* ; plus encore, chacun des ensembles de formules et de déductions est [récursif](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_r%C3%A9cursif), c'est-à-dire que l'on dispose d'un algorithme qui détermine si un objet donné est une formule correcte ou une déduction correcte du système. L'étude de logique du point de vue des formules et des expressions s'appelle la *syntaxe*.

La [*sémantique*](https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9mantique), au contraire, échappe à la [combinatoire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Combinatoire) en faisant appel (en général) à des objets infinis. Elle a d'abord servi à « définir » la vérité. Par exemple, en [calcul des propositions](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_propositions), les formules sont interprétées, par exemple, par des éléments d'une [algèbre de Boole](https://fr.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_de_Boole_%28logique%29).

Une mise en garde est de rigueur ici, car [Kurt Gödel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del) (suivi par [Alfred Tarski](https://fr.wikipedia.org/wiki/Alfred_Tarski)) a montré avec son [théorème d'incomplétude](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27incompl%C3%A9tude) l'impossibilité de justifier mathématiquement la rigueur mathématique dans les mathématiques. C'est pourquoi il est plus approprié de voir la sémantique comme une métaphore : les formules — objets syntaxiques — sont projetées dans un autre monde. Cette technique — plonger les objets dans un monde plus vaste pour raisonner sur eux — est couramment utilisée en mathématique et est efficace.

Cependant, la sémantique ne sert pas qu'à « définir » la vérité. Par exemple, la [sémantique dénotationnelle](https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9mantique_d%C3%A9notationnelle) est une interprétation, non des formules, mais des déductions visant à capturer leur [*contenu calculatoire*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Correspondance_de_Curry-Howard).

Systèmes de déduction

En logiques [classique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_classique) et [intuitionniste](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_intuitionniste), on distingue deux types d'[axiomes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome) : les *axiomes logiques* qui expriment des propriétés purement logiques comme {\displaystyle A\lor \lnot A} ([principe du tiers exclu](https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_du_tiers_exclu), valide en logique classique mais pas en logique intuitionniste) et les axiomes extra-logiques qui définissent des objets mathématiques ; par exemple les [axiomes de Peano](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Peano) définissent les entiers de l'[arithmétique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Arithm%C3%A9tique) tandis que les axiomes de Zermelo-Fraenkel définissent les [ensembles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_ensembles). Quand le système possède des axiomes extra-logiques, on parle de théorie axiomatique. L'étude des différents modèles d'une même théorie axiomatique est l'objet de la [théorie des modèles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_mod%C3%A8les).

Deux systèmes de déduction peuvent être équivalents au sens où ils ont exactement les mêmes théorèmes. On démontre cette équivalence en fournissant des traductions des déductions de l'un dans les déductions de l'autre. Par exemple, il existe (au moins) trois types de systèmes de déduction équivalents pour le [calcul des prédicats](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_pr%C3%A9dicats) : les [systèmes à la Hilbert](https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8mes_%C3%A0_la_Hilbert), la [déduction naturelle](https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9duction_naturelle) et le [calcul des séquents](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_s%C3%A9quents). On y ajoute parfois le [style de Fitch](https://fr.wikipedia.org/wiki/Style_de_Fitch_pour_la_d%C3%A9duction_naturelle) qui est une variante de la déduction naturelle dans laquelle les démonstrations sont présentées de façon linéaire.

Alors que la théorie des nombres démontre des propriétés des nombres, on notera la principale caractéristique de la logique en tant que théorie mathématique : elle « démontre » des propriétés de systèmes de déduction dans lesquels les objets sont des « théorèmes ». Il y a donc un double niveau dans lequel il ne faut pas se perdre. Pour clarifier les choses, les « théorèmes » énonçant des propriétés des systèmes de déduction sont parfois appelés des « [métathéorèmes](https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9tath%C3%A9or%C3%A8me%22%20%5Co%20%22M%C3%A9tath%C3%A9or%C3%A8me) ». Le système de déduction que l'on étudie est appelé la « théorie » et le système dans lequel on énonce et démontre les métathéorèmes est appelé la « métathéorie ».

Les propriétés fondamentales des systèmes de déduction sont les suivantes:

La [correction](https://fr.wikipedia.org/wiki/Correction_%28logique%29)

La correction énonce que les théorèmes sont valides dans tous les modèles. Cela signifie que les règles d'inférence sont bien adaptées à ces modèles, autrement dit que le système de déduction formalise *correctement* le raisonnement dans ces modèles.

La [cohérence](https://fr.wikipedia.org/wiki/Coh%C3%A9rence_%28logique%29)

Un système de déduction est cohérent (on emploie aussi l'[anglicisme](https://fr.wikipedia.org/wiki/Anglicisme) *consistant*) s'il admet un modèle, ou ce qui revient au même, s'il ne permet pas de démontrer n'importe quelle formule. On parle aussi de *cohérence équationnelle* lorsque le système admet un modèle non trivial, c'est-à-dire ayant au moins deux éléments. Cela revient à affirmer que le système ne permet pas de démontrer n'importe quelle équation.

La [complétude](https://fr.wikipedia.org/wiki/Compl%C3%A9tude)

Elle se définit par rapport à une famille de modèles. Un système de déduction est complet par rapport à une famille de modèles, si toute proposition qui est valide dans tous les modèles de la famille est un théorème. En bref, un système est complet si tout ce qui est valide est démontrable.

Une autre propriété des systèmes de déduction apparentée à la complétude est la cohérence maximale. Un système de déduction est maximalement cohérent, si l'ajout d'un nouvel axiome qui n'est pas lui-même un théorème rend le système incohérent.

Affirmer « tel système est complet pour telle famille de modèles » est un exemple typique de métathéorème.

Dans ce cadre, la notion intuitive de vérité donne lieu à deux concepts formels : la validité et la démontrabilité. Les trois propriétés de correction, cohérence et complétude précisent comment ces notions peuvent être reliées, espérant qu'ainsi la vérité, quête du logicien, puisse être cernée.

Le calcul des propositions :

Article détaillé : [Calcul des propositions](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_propositions).

Les propositions sont des formules exprimant des *faits* mathématiques, c'est-à-dire des propriétés qui ne dépendent d'aucun paramètre, et qui donc ne peuvent qu'être vraies ou fausses[5](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-6), comme « 3 est un multiple de 4 » (au contraire de *« n est un multiple de 4 »*, qui est vraie ou fausse selon la valeur que l'on donne au paramètre *n*) ou « les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2 ».

Les propositions élémentaires, appelées *variables propositionnelles*, sont combinées au moyen de *connecteurs* pour former des formules complexes. Les propositions peuvent être interprétées en remplaçant chaque variable propositionnelle par une proposition. Par exemple une interprétation de la proposition *(P ∧ ¬P) ⇒ Q* pourrait être *« si 3 est pair et 3 est impair alors 0 = 1 »*.

Connecteurs les plus fréquents :

Les connecteurs sont présentés avec leur interprétation en [logique classique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_classique).

La disjonction

La [disjonction](https://fr.wikipedia.org/wiki/Disjonction_logique) de deux propositions *P* et *Q* est la proposition notée *P* ∨ *Q* ou « *P* ou *Q* » qui est vraie si au moins une des deux propositions est vraie; elle est donc fausse uniquement si les deux propositions sont fausses.

La négation

La négation d’une proposition *P*, est la proposition notée ¬*P*, ou « non *P* » qui est vraie lorsque *P* est fausse; elle est donc fausse lorsque *P* est vraie.

À partir de ces deux connecteurs, on peut construire d’autres connecteurs ou abréviations utiles :

La conjonction

La [conjonction](https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjonction_logique) de deux propositions *P* et *Q* est la proposition suivante :

¬((¬*P*) ∨ (¬*Q*)) c'est-à-dire non ( (non *P*) ou (non *Q*) )

Celle-ci est notée *P* ∧ *Q* ou « *P* et *Q* » et n’est vraie que lorsque *P* et *Q* sont vraies; et est donc fausse si l’une des deux propositions est fausse.

L'implication

L'[implication](https://fr.wikipedia.org/wiki/Implication_%28logique%29) de *Q* par *P* est la proposition (¬*P*) ∨ *Q*, notée « *P* ⇒ *Q* » ou « *P* implique *Q* », et qui est fausse seulement si *P* est une proposition vraie et *Q* fausse.

L'équivalence

L'[équivalence logique](https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quivalence_logique) de *P* et *Q* est la proposition ( (*P* ⇒ *Q*) ∧ ( *Q* ⇒ *P*) ) ( ((*P* implique *Q*) et (*Q* implique *P*) )), notée « *P* ⇔ *Q* » ou (*P* est équivalent à *Q*), et qui n'est vraie que si les deux propositions *P* et *Q* ont même valeur de vérité.

Le ou exclusif

Le [*ou exclusif*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ou_exclusif) ou *disjonction exclusive* de *P* et *Q* est la proposition *P* ⊻ *Q* (parfois aussi notée[6](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-7) P ⊕ Q ou encore[7](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-8) P | Q ou par les concepteurs de circuits ) qui correspond à (*P* ∨ *Q*) ∧ ¬(*P* ∧ *Q*), c'est-à-dire en français : soit *P*, soit *Q*, mais pas les deux à la fois. Le ou exclusif de *P* et *Q* correspond à *P* ⇔ ¬*Q* ou encore à ¬(*P* ⇔ *Q*). Cette proposition n'est vraie que si *P* et *Q* ont des valeurs de vérités distinctes.

Connecteur universel

Une caractéristique du calcul propositionnel dit « [classique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_classique) » est que toutes les propositions peuvent s'exprimer à partir de deux connecteurs : par exemple ∨ et ¬ (*ou* et *non*)[8](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-9). Mais d'autres choix sont possibles comme ⇒ (implication) et ⊥ (faux). On peut n'utiliser qu'un seul connecteur, le *symbole de Sheffer* « | » ([Henry M. Sheffer](https://fr.wikipedia.org/wiki/Henry_M._Sheffer), 1913), appelé *« stroke »* par son concepteur et appelé aujourd'hui *[Nand](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_NON-ET%22%20%5Co%20%22Fonction%20NON-ET)* et noté  par les concepteurs de circuits ; on peut aussi n'utiliser que le connecteur *[Nor](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_NON-OU%22%20%5Co%20%22Fonction%20NON-OU)* (noté ) comme l'a remarqué [Charles Sanders Peirce](https://fr.wikipedia.org/wiki/Charles_Sanders_Peirce) (1880) sans le publier. En somme, en logique classique, un unique connecteur suffit pour rendre compte de toutes les opérations logiques.

Le calcul des prédicats

Articles détaillés : [Calcul des prédicats](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_pr%C3%A9dicats) et [Logique d'ordre supérieur](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_d%27ordre_sup%C3%A9rieur).

Le calcul des prédicats étend le calcul propositionnel en permettant d'écrire des formules qui dépendent de paramètres ; pour cela le calcul des prédicats introduit les notions de *variables*, de *symboles de fonctions et de relations*, de *termes* et de *quantificateurs* ; les termes sont obtenus en combinant les variables au moyen des symboles de fonction, les formules élémentaires sont obtenues en appliquant les symboles de relations à des termes.

Une formule typique du calcul des prédicats est « ∀ *a*, *b* ( (*p* = *a*.*b*) ⇒ ( (*a* = 1) ∨ (*b* = 1) ) ) » qui lorsqu'on l'interprète dans les entiers exprime que le paramètre *p* est un nombre premier (ou 1). Cette formule utilise deux symboles de fonction (le point, fonction binaire interprétée par la multiplication des entiers, et le symbole « 1 », fonction 0-aire, c'est-à-dire constante) et un symbole de relation (pour l'égalité). Les variables sont *a*, *b* et *p*, les termes sont *a*.*b* et 1 et les formules élémentaires sont « *p* = *a*.*b* », « *a* = 1 » et « *b* = 1 ». Les variables *a* et *b* sont *quantifiées* mais pas la variable *p* dont la formule dépend.

Il existe plusieurs variantes du calcul des prédicats ; dans la plus simple, le calcul des prédicats *du premier ordre*, les variables représentent toutes les mêmes types d'objets, par exemple dans la formule ci-dessus, les 3 variables *a*, *b* et *p* vont toutes représenter des entiers. Dans le calcul des prédicats du *second ordre*, il y a deux types de variables : des variables pour les objets et d'autres pour les *prédicats*, c'est-à-dire les relations entre objets. Par exemple en [arithmétique du second ordre](https://fr.wikipedia.org/wiki/Arithm%C3%A9tique_du_second_ordre) on emploie des variables pour représenter des entiers, et d'autres pour des ensembles d'entiers. La hiérarchie continue ainsi, au 3e ordre on a 3 types de variables pour les objets, les relations entre objets, les relations entre relations, etc.

Substitution

Pour décrire le calcul des prédicats, une opération essentielle est la *substitution* qui consiste à remplacer dans une formule toutes les occurrences d'une variable *x* par un *terme a*, obtenant ainsi une nouvelle formule ; par exemple si on remplace la variable *p* par le terme *n! + 1* dans la formule ci-dessus on obtient la formule « ∀ *a*, *b* ( (*n*! + 1 = *a*.*b*) ⇒ ( (*a* = 1) ∨ (*b* = 1) ) ) » (qui exprime que la factorielle de l'entier *n* plus 1 est un nombre premier).

Si *P* est une formule dépendant d'un paramètre *x* et *a* est un terme, l’assemblage obtenu en remplaçant *x* par *a* dans *P* est une formule qui peut se noter *P*[*a*/*x*] ou (*a*|*x*)*P*, ou d'autres variantes de ces notations. et s’appelle formule obtenue par substitution de *x* par *a* dans *P*.

Pour mettre en évidence un paramètre *x* dont dépend une formule *P*, on écrit celle-ci sous la forme *P*{*x*} ; on note alors *P*{*a*} la proposition (*a*|*x*)*P*.

On peut chercher à trouver la (les) substitution(s) qui rend(ent) une formule prouvable ; le problème est particulièrement intéressant dans le cas de formules dites *équationnelles*, c'est-à-dire de la forme *t(x) = t'(x)*. La théorie qui cherche à résoudre de telles équations dans le cadre de la logique mathématique s'appelle l'[unification](https://fr.wikipedia.org/wiki/Unification).

Les quantificateurs

Les quantificateurs sont les ingrédients syntaxiques spécifiques du calcul des prédicats. Comme les connecteurs propositionnels ils permettent de construire de nouvelles formules à partir d'anciennes, mais ils s'appuient pour cela sur l'utilisation des variables.

Article détaillé : [Quantificateurs](https://fr.wikipedia.org/wiki/Quantificateur_%28logique%29).

Soit une formule du calcul des prédicats *P*. On construit alors une nouvelle formule dite *existentielle* notée ∃ *x P* qui se lit « il existe *x* tel que P ». Supposons que *P* ne « dépende » que de *x*. La proposition ∃ *x P* est vraie quand il existe au moins un objet *a* (dans le domaine considéré, celui sur lequel « varie » *x*) tel que, quand on substitue *a* à *x* dans *P* on obtienne une proposition vraie. La formule *P* est vue comme une propriété, et ∃ *x P* est vraie quand il existe un objet ayant cette propriété.

Le signe ∃ s’appelle le quantificateur existentiel.

De même on peut construire à partir de *P* une formule dite *universelle* notée ∀ *x P*, qui se lit « pour tout *x P* » ou quel que soit *x P*. Elle signifie que tous les objets du domaine considéré (ceux que *x* est susceptible de désigner) possèdent la propriété décrite par *P*.

Le signe ∀ s’appelle le quantificateur universel.

En [logique classique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_classique) les quantificateurs universel et existentiel peuvent se définir l'un par rapport à l'autre, par négation car :

∀ *x P* équivaut à ¬ ∃x ¬P   et   ∃x P équivaut à ¬ ∀*x* ¬ *P*

En effet « il est faux que tout objet possède une propriété donnée » signifie « il en existe au moins un qui ne possède pas cette propriété ».

Utilisation des quantificateurs

Propriétés élémentaires

Soient *P* et *Q* deux propositions et *x* un objet indéterminé.

* ¬(∃ *x P*) ⇔ (∀ *x* ¬ *P*)
* (∀ *x*) (*P*∧*Q*) ⇔ ( (∀ *x*) *P* ∧ (∀ *x*) *Q* )
* (∀ *x*) *P* ∨ (∀ *x*) *Q* ⇒ (∀ *x*) (*P* ∨ *Q* )(Implication réciproque fausse en général)
* (∃ *x*) (*P*∨*Q*) ⇔ ( (∃ *x*) *P* ∨ (∃ *x*) *Q* )
* (∃ *x*) (*P*∧*Q*) ⇒ ( (∃ *x*) *P* ∧ (∃ *x*) *Q* )(Implication réciproque fausse en général)

Propriétés utiles

Soient *P* une proposition et *x* et *y* des objets indéterminés.

* (∀ *x*) (∀ *y*) *P* ⇔ (∀ *y*) (∀ *x*) *P*
* (∃ *x*) (∃ *y*) *P* ⇔ (∃ *y*) (∃ *x*) *P*
* (∃ *x*) (∀ *y*) *P* ⇒ (∀ *y*) (∃ *x*) *P*S’il existe un *x*, tel que pour tout *y*, on ait *P* vraie, alors pour tout *y*, il existe bien un *x* (celui obtenu avant) tel que *P* soit vraie.
L’implication réciproque est fausse en général, parce que si pour chaque *y*, il existe un *x* tel que *P* soit vraie, ce *x* pourrait dépendre de *y* et varier suivant *y*. Ce *x* pourrait donc ne pas être le même pour tout *y* tel que *P* soit vraie.

Propriétés moins intuitives

* ∀x Px ⇒ ∃x Px[9](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-10)

Si *A* est une formule où la variable *x* n'apparaît pas [librement](https://fr.wikipedia.org/wiki/Variable_libre), on a[10](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-11) :

* (A ⇒ ∀x Px) ⇔ ∀x (A ⇒ Px)
* (A ⇒ ∃x Px) ⇔ ∃x (A ⇒ Px)

Mais aussi :

* (∀x Px ⇒ A) ⇔ ∃x (Px ⇒ A)
* (∃x Px ⇒ A) ⇔ ∀x (Px ⇒ A)

L’égalité

Le symbole de relation « = » qui représente l'égalité, a un statut un petit peu particulier, à la frontière entre les symboles logiques (connecteurs, quantificateurs) et les symboles non logiques (relations, fonctions). La formule *a* = *b* signifie que *a* et *b* représentent le même objet (ou encore que *a* et *b* sont des notations différentes du même objet), et se lit « *a* est égal à *b* ».

La [théorie des modèles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_mod%C3%A8les) classique se développe le plus souvent dans le cadre du calcul des prédicats avec égalité, c'est-à-dire que les [théories](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_axiomatique) considérées sont égalitaires : la relation d'égalité est utilisée en plus des symboles de la [signature](https://fr.wikipedia.org/wiki/Signature_%28logique%29) de la théorie.

Du point de vue de la déduction, l'égalité est régie par des axiomes, décrits ci-dessous, exprimant essentiellement que deux objets égaux ont les mêmes propriétés (et, en [logique du second ordre](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_du_second_ordre), que la réciproque est vraie).

La négation de « = » est la relation « ≠ » qui est définie par *a* ≠ *b* si et seulement si ¬(*a* = *b*).

Axiomes de l'égalité en [logique du premier ordre](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_pr%C3%A9dicats)

* ∀ *x* (*x* = *x*) (réflexivité de *=*)
* ∀ *x* (∀ *y*) ( (*x* = *y*) ⇔ (*y* = *x*) ) (symétrie de *=*)
* ∀ *x* (∀ *y*) (∀ *z*) ( ((*x* = *y*) ∧ (*y* = *z*)) ⇒ (*x* = *z*) ) (transitivité de *=*)

La relation *=* étant réflexive, symétrique et transitive, on dit que la relation *=* est une [*relation d'équivalence*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_d%27%C3%A9quivalence).

* Soit *P*{*x*} une formule dépendant d'une variable *x*. Soient *a* et *b* deux termes tels que *a* = *b*. Alors les propositions *P{*a*}* et *P{b}* sont équivalentes. Ces axiomes (un par formule *P*{*x*}) expriment que deux objets égaux ont les mêmes propriétés.
* Soit *F*(*x*) une fonction contenant une variable libre *x*. Soient *a* et *b* des termes tels que *a* = *b*. Alors les termes *F*(*a*) et *F*(*b*) (obtenus en remplaçant respectivement *x* par *a* et *x* par *b* dans F(*x*)) sont égaux.

Ces deux dernières propriétés expriment intuitivement que *=* est la plus *fine* des relations d'équivalence.

Définition en [logique du second ordre](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_du_second_ordre)

En logique du second ordre on peut définir plus simplement l'égalité par :

* *a* = *b* si et seulement si ∀P (Pa ⇔ Pb)

Autrement dit deux objets sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes propriétés (principe d'identité des indiscernables énoncé par [Leibniz](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz))

Notes et références

Notes

1. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-2) [Ferreirós 2001](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique%22%20%5Cl%20%22Ferreir%C3%B3s2001)[a](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_note-1) Section 4.4 : Principia Mathematica ([Whitehead 1910](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#Whitehead1910)) a été reconnu comme un moment marquant de l'histoire de la logique moderne. Jusqu'en 1928, c'était la référence la plus importante pour tout étudiant en logique, ...
2. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-3) Avant de trouver son nom actuel, attribué à [Giuseppe Peano](https://fr.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano), la logique mathématique s'est appelée « logique symbolique » (en opposition à la logique philosophique), « métamathématique » (terminologie de [Hilbert](https://fr.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert)) et « idéographie » (*Begriffsschrift*) (terminologie de [Frege](https://fr.wikipedia.org/wiki/Frege)).
3. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-4) Sauf si la théorie est incohérente, car du faux on peut déduire toute proposition. Ce principe s'appelle le [*Ex falso sequitur quodlibet*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_d%27explosion).
4. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-5) Cela lui a valu la [médaille Fields](https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9daille_Fields).
5. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-6) Sans qu'on soit capable d'affirmer quelle alternatives s'avère.
6. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-7) Ce symbole ⊕ est utilisé pour noter le ou exclusif par les concepteurs de circuits et les [cryptographes](https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9seau_de_Feistel), il ne faut pas le confondre avec la *disjonction additive* de la [logique linéaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_lin%C3%A9aire#Syntaxe).
7. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-8) À ne pas confondre avec le symbole de Sheffer.
8. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-9) Cette propriété n'est plus valable en logique intuitionniste.
9. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-10) Ainsi, afin d'avoir le [théorème de complétude](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_compl%C3%A9tude_de_G%C3%B6del) l'ensemble de base d'une [structure](https://fr.wikipedia.org/wiki/Structure_%28logique_math%C3%A9matique%29) du calcul des prédicats n'est pas vide.
10. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-11) Moyen mnémotechnique pour se rappeler ces règles : le quantificateur se conserve sur le conséquent de l'implication et s'inverse sur l'antécédent.

Références

1. [↑](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_math%C3%A9matique#cite_ref-1) (en) José Ferreirós. The Road to Modern Logic-An Interpretation. December 2001. Bulletin of Symbolic Logic 7(04)

**Bibliographie**

* Jon Barwise (dir.), *Handbook of mathematical Logic*, North Holland, 1977 ([ISBN](https://fr.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Book_Number) [0-7204-2285-X](https://fr.wikipedia.org/wiki/Sp%C3%A9cial%3AOuvrages_de_r%C3%A9f%C3%A9rence/0-7204-2285-X))

Synthèse du savoir sur le sujet au moment de sa parution.

* Dale Jacquette (dir.), *A Companion to Philosophical Logic*, Blackwell, coll. « Companions to Philosophy », 2002, 832 p. ([ISBN](https://fr.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Book_Number) [978-1-4051-4575-6](https://fr.wikipedia.org/wiki/Sp%C3%A9cial%3AOuvrages_de_r%C3%A9f%C3%A9rence/978-1-4051-4575-6), [présentation en ligne](http://www.blackwellreference.com/public/book?id=g9781405145756_9781405145756)
* [Stewart Shapiro](https://fr.wikipedia.org/wiki/Stewart_Shapiro) (dir.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford Scholarship, 2005, 774 p. ([ISBN](https://fr.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Book_Number) [978-0-19-514877-0](https://fr.wikipedia.org/wiki/Sp%C3%A9cial%3AOuvrages_de_r%C3%A9f%C3%A9rence/978-0-19-514877-0), [présentation en ligne](http://www.oxfordscholarship.com/oso/public/content/philosophy/9780195148770/toc.html)
* *Handbook of Philosophical Logic*, Kluwer Academic Publishers, depuis 2001

Quasi une encyclopédie se voulant dans la continuité de la synthèse du savoir sur la logique initié par [Barwise 1977 ; ci-dessus], avec en 2011, 16 volumes parus.

Histoire et philosophie

Handbooks

* [Dov Gabbay](https://fr.wikipedia.org/wiki/Dov_Gabbay) et John Woods éditeurs, *Handbook of the History of Logic*, en au moins 11 volumes, chez Elsevier.
* Dov Gabbay et Franz Guenthner éditeurs, *Handbook of Philosophical Logic*, en au moins 16 volumes, chez Springer.

Bande dessinée

* [*Logicomix*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logicomix), édition française Vuibert, 2010
Scénario : [Apóstolos K. Doxiàdis](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ap%C3%B3stolos_Doxi%C3%A1dis%22%20%5Co%20%22Ap%C3%B3stolos%20Doxi%C3%A1dis), [Christos Papadimitriou](https://fr.wikipedia.org/wiki/Christos_Papadimitriou%22%20%5Co%20%22Christos%20Papadimitriou) - Dessin : Alecos Papadatos - Couleurs : Annie Di Donna [[détail des éditions](https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9f%C3%A9rence%3ALogicomix)]

Livres

* Geraldine Brady *From Peirce to Skolem: A Neglected*

Chapitre 2 : Calcul des prédicats

Le calcul des prédicats du premier ordre, ou calcul des relations, logique du premier ordre, logique quantificationnelle, ou tout simplement calcul des prédicats, est une formalisation du langage des [mathématiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques), proposée par [Gottlob Frege](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege%22%20%5Co%20%22Gottlob%20Frege), entre la fin du [xix](https://fr.wikipedia.org/wiki/XIXe_si%C3%A8cle%22%20%5Co%20%22XIXe%20si%C3%A8cle)[e](https://fr.wikipedia.org/wiki/XIXe_si%C3%A8cle%22%20%5Co%20%22XIXe%20si%C3%A8cle)[siècle](https://fr.wikipedia.org/wiki/XIXe_si%C3%A8cle%22%20%5Co%20%22XIXe%20si%C3%A8cle) et le début du [xx](https://fr.wikipedia.org/wiki/XXe_si%C3%A8cle%22%20%5Co%20%22XXe%20si%C3%A8cle)[e](https://fr.wikipedia.org/wiki/XXe_si%C3%A8cle%22%20%5Co%20%22XXe%20si%C3%A8cle)[siècle](https://fr.wikipedia.org/wiki/XXe_si%C3%A8cle%22%20%5Co%20%22XXe%20si%C3%A8cle). La logique du premier ordre comporte deux parties :

* la [*syntaxe*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Syntaxe_%28logique%29) définit le vocabulaire symbolique de base ainsi que les règles permettant de construire des énoncés complexes,
* la [*sémantique*](https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9mantique_axiomatique) interprète ces énoncés comme exprimant des relations entre les éléments d'un domaine, également appelé *modèle*.

Sur le plan syntaxique, les langages du premier ordre opposent deux grandes classes linguistiques :

* les constituants servant à identifier ou nommer des éléments du domaine : *variables*, *symboles de constantes*, *termes* ;
* les constituants servant à exprimer des propriétés ou des relations entre ces éléments : *prédicats* et *formules*.

Un [prédicat](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A9dicat_%28linguistique%29) est une expression linguistique qui peut être reliée à un ou plusieurs éléments du domaine pour former une phrase. Par exemple, dans la phrase « Mars est une planète », l'expression « est une planète » est un prédicat qui est relié au nom (symbole de constante) « Mars » pour former une phrase. Et dans la phrase « Jupiter est plus grand que Mars », l'expression « est plus grand que » est un prédicat qui se relie aux deux noms, « Jupiter » et « Mars », pour former une phrase.

En logique mathématique, lorsqu'un prédicat est lié à une expression, on dit qu'il exprime une propriété (telle que la propriété d'être une planète), et lorsqu'il est lié à deux ou plusieurs expressions, on dit qu'il exprime une relation (telle que la relation d'être plus grand). Ainsi on peut raisonner sur des énoncés comme « Tout {\displaystyle x} est gentil » et « Il existe un {\displaystyle x} tel que pour tout {\displaystyle y}, {\displaystyle x} est ami avec {\displaystyle y} », ce qui exprimé symboliquement se traduit par la formule :

{\displaystyle \forall x~\mathrm {gentil} (x)} et {\displaystyle \exists x\forall y~\mathrm {amis} (x,y)}.

Il convient de noter cependant que la logique du premier ordre ne contient aucune relation spécifique (comme telle relation d'ordre, d'inclusion ou d'égalité) ; en fait, il ne s'agit que d'étudier la façon dont on doit parler et raisonner avec les expressions du langage mathématique.

Les traits caractéristiques de la logique du premier ordre sont :

* l'utilisation de [*variables*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Variable_%28math%C3%A9matiques%29) comme {\displaystyle x}, {\displaystyle y,} etc. pour dénoter des éléments du domaine d'interprétation ;
* l'utilisation de [*prédicats*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A9dicat_%28logique_math%C3%A9matique%29) (ou *relations*) sur les éléments ;
* l'utilisation de [*connecteurs logiques*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Connecteurs_logiques) (et, ou, implique etc.) ;
* l'utilisation de deux [*quantificateurs*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Quantificateur_%28logique%29), l'un universel (« Quel que soit », « pour tout » noté [∀](https://fr.wikipedia.org/wiki/%E2%88%80)) et l'autre existentiel (« il existe au moins un … tel que », noté [∃](https://fr.wikipedia.org/wiki/%E2%88%83)).

Le *calcul des prédicats du premier ordre égalitaire* adjoint au calcul des prédicats un symbole de relation, l'égalité, dont l'interprétation est l'affirmation que deux éléments sont les mêmes, et qui est axiomatisée en conséquence. Suivant le contexte, on peut parler simplement de calcul des prédicats pour le calcul des prédicats égalitaire.

On parle de logique du premier ordre par opposition aux [logiques d'ordre supérieur](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_d%27ordre_sup%C3%A9rieur), où l'on peut aussi quantifier sur les prédicats ou les fonctions en plus des variables. En outre, cet article ne traite que de la logique du premier ordre [classique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_classique), mais on notera qu'il existe aussi une [logique du premier ordre intuitionniste](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_intuitionniste#Le_calcul_des_pr%C3%A9dicats_intuitionniste).

## Introduction

Alors que la logique propositionnelle traite des propositions déclaratives simples, la logique du premier ordre couvre en plus les prédicats et la quantification.

Un prédicat prend en entrée une ou plusieurs entités du domaine du discours et en sortie, il est soit Vrai, soit Faux. Considérons les deux phrases "Socrate est un philosophe" et "Platon est un philosophe". En logique propositionnelle, ces phrases sont considérées comme non liées et peuvent être désignées, par exemple, par des variables telles que p et q. Le prédicat "est un philosophe" apparaît dans les deux phrases, dont la structure commune est "a est un philosophe". La variable a est instanciée en tant que "Socrate" dans la première phrase, et est instanciée en tant que "Platon" dans la deuxième phrase. Alors que la logique du premier ordre permet l'utilisation de prédicats, tels que "est un philosophe" dans cet exemple, la logique propositionnelle ne le permet pas.

Les relations entre les prédicats peuvent être énoncées à l'aide de connecteurs logiques. Considérons, par exemple, la formule du premier ordre "si a est un philosophe, alors a est un savant". Cette formule est un énoncé conditionnel dont l'hypothèse est " a est un philosophe " et la conclusion " a est un savant ". La vérité de cette formule dépend de l'objet désigné par a, et des interprétations des prédicats "est un philosophe" et "est un savant".

Les quantificateurs peuvent être appliqués aux variables d'une formule. La variable a de la formule précédente peut être quantifiée universellement, par exemple avec la phrase du premier ordre "Pour tout a, si a est un philosophe, alors a est un savant". Le quantificateur universel "pour chaque" dans cette phrase exprime l'idée que l'affirmation "si a est un philosophe, alors a est un savant" est valable pour tous les choix de a.

La négation de la phrase "Pour tout a, si a est un philosophe, alors a est un savant" est logiquement équivalente à la phrase "Il existe a tel que a est un philosophe et a n'est pas un savant". Le quantificateur existentiel "il existe" exprime l'idée que l'affirmation "a est un philosophe et a n'est pas un savant" est valable pour un certain choix de a.

Les prédicats "est un philosophe" et "est un savant" prennent chacun une seule variable. En général, les prédicats peuvent prendre plusieurs variables. Dans la phrase du premier ordre "Socrate est le professeur de Platon", le prédicat "est le professeur de" prend deux variables.

## Syntaxe

### Définition



Exemple d'une formule de la logique du premier ordre. Le schéma montre les quantificateurs, les occurrences des symboles de fonctions et des symboles de prédicats.

Cette section donne une brève présentation de la syntaxe du langage formel du calcul des prédicats.

On se donne pour alphabet :

* un ensemble de symboles appelés [*variables*](https://fr.wikipedia.org/wiki/Variable_%28math%C3%A9matiques%29), toujours infini : {\displaystyle x}, {\displaystyle y}, {\displaystyle z}, etc. ;
* un ensemble de symboles appelés *constantes*, éventuellement vide : {\displaystyle a}, {\displaystyle b}, {\displaystyle c}, etc. ;
* un ensemble de symboles de fonctions : {\displaystyle f}, {\displaystyle g}, {\displaystyle h}, etc. ;
* un ensemble de symboles de *prédicats* : {\displaystyle P}, {\displaystyle Q}, {\displaystyle R}, etc.

Chaque symbole de fonction et chaque symbole de prédicat a une *[arité](https://fr.wikipedia.org/wiki/Arit%C3%A9%22%20%5Co%20%22Arit%C3%A9)* : il s'agit du nombre d'arguments ou d'objets auxquels il est appliqué. Par exemple, le prédicat {\displaystyle B} pour « est bleu(e) » a une arité égale à 1 (on dit qu'il est unaire ou [monadique](https://fr.wiktionary.org/wiki/monadique)), tandis que le prédicat {\displaystyle amis} pour « être amis » a une arité de deux (on dit qu'il est binaire ou dyadique).

* Les symboles {\displaystyle \forall } (*quel que soit*) et {\displaystyle \exists } (*il existe*), appelés *quantificateurs*.
* Les symboles {\displaystyle \lnot } (*non*), {\displaystyle \land } (*et*), {\displaystyle \lor } (*ou*) et {\displaystyle \to } (*implique*), qui sont des *connecteurs* que possède aussi le [calcul des propositions](https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_propositions).
* Les symboles de ponctuation « ) » et « ( ».

On pourrait se contenter d'un seul quantificateur {\displaystyle \forall } et de deux connecteurs logiques {\displaystyle \lnot } et {\displaystyle \land } en définissant les autres connecteurs et quantificateur à partir de ceux-ci. Par exemple {\displaystyle \exists x\;P(x)} est défini comme {\displaystyle \lnot (\forall x\;\lnot P(x))}.

Les formules du calcul des prédicats du premier ordre sont définies par induction :

* {\displaystyle P(t\_{1},\dots ,t\_{n})} si {\displaystyle P} un symbole de prédicat d'arité *n* et *t*1, …, *tn* sont des [termes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Terme_%28logique%29) (une telle formule est appelée un *atome* ou une *formule atomique*) ;
* ¬*e* si e est une formule ;
* (*e*1∧*e*2) si *e*1 et *e*2 sont des formules ;
* (*e*1∨*e*2) si *e*1 et *e*2 sont des formules ;
* (*e*1→*e*2) si *e*1 et *e*2 sont des formules ;
* {\displaystyle \forall x\;e} si *e* est une formule ;
* {\displaystyle \exists x\;e} si *e* est une formule.

On appelle *énoncé* une formule dont toutes les variables sont liées par un quantificateur (donc qui n'a pas de variable libre).

### Exemples

Exemple 1

Si on se donne pour constantes les deux symboles 0 et 1, pour symboles de fonctions binaires + et ., et pour symboles de prédicats binaires les symboles = et <, alors le langage utilisé peut être interprété comme étant celui de l'arithmétique. *x* et *y* désignant des variables, *x*+1 est un [terme](https://fr.wikipedia.org/wiki/Terme_%28logique%29), 0+1+1 est un [terme](https://fr.wikipedia.org/wiki/Terme_%28logique%29) clos, *x*<*y*+1 est une formule, 0+1+1<0+1+1+1 est une formule close.

Exemple 2

Si on se donne un ensemble de variables quelconque, une constante notée *e*, un symbole de fonction binaire noté \*, un symbole de fonction unaire notée -1, un symbole de relation binaire =, alors le langage utilisé peut être interprété comme étant celui de la théorie des groupes. Si *x* et *y* désignent des variables, *x*\**y* est un terme, *e*\**e* est un terme clos, *x*=*y*\**y* est une formule, *e*=*e*\**e*-1 et (*e*-1 \* *e*)-1 = (*e*-1)-1 sont des formules closes.

### Prédicats, formules closes, formules polies, variables libres, variables liées

Lorsqu’une variable {\displaystyle x} appartient à une sous-formule précédée d’un quantificateur, {\displaystyle \forall x} ou {\displaystyle \exists x}, elle est dite liée par ce quantificateur. Si une variable n’est liée par aucun quantificateur, elle est libre.

La distinction entre variable libre et variable liée est importante. Une variable liée ne possède pas d'identité propre et peut être remplacée par n'importe quel autre nom de variable qui n'apparaît pas dans la formule. Ainsi, {\displaystyle \exists x(x<y)} est identique à {\displaystyle \exists z(z<y)} mais pas à {\displaystyle \exists x(x<z)} et encore moins à {\displaystyle \exists y(y<y)}.

Une formule close est une formule dont toutes les variables sont liées. Un prédicat est une formule qui contient une ou plusieurs variables libres. On peut considérer les prédicats comme des concepts. Ainsi, {\displaystyle \forall x\exists y(x<y)} est une formule close du langage de l'arithmétique. {\displaystyle \forall x(x<z)} est un prédicat portant sur la variable *z*.

Une formule est dite polie lorsque d'une part aucune variable n'y a à la fois d'occurrences libres et d'occurrences liées et que d'autre part aucune variable liée n'est soumise à plus d'une *mutification* (on dit qu'un signe est *mutificateur* lorsqu'il permet de confirmer l'hypothèse d'une variable liée).

**Logique mathématique exercices corrigés**

**Exercice 1**

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes :

1. ∀*x* ∈ [*−1, 0*], *−3x2 + 5x + 2*< *0.*
2. (∃*x* ∈ **ℝ**) , (∀*x* ∈ **ℝ**) , *x − 2y* < *0*.
3. (∃*x*∈ **ℝ**) , (∀*x* ∈ **ℝ**) , *x* < *y2*.
4. (∀*x* ∈ **ℝ**) , (∃*y* ∈ **ℝ**) , *x + y* ≻*0.*

##### Exercice 2

1. Montrer que : ∀(x, y) ∈ ([1, +∞[)2, x ≠ y ⇒ (x − 1)√x+1 ≠ (y − 1)√y+1.
2. Montrer que : ∀(x, y) ∈ **ℝ**2, (x + √x2+1)(y+√y2+1) = 1 ⇔  x + y = 0.
3. Montrer que : ∀(a, b, c) ∈ **ℝ**3, a2 + b2 = c2 ⇒ ∣a∣ ≤ ∣c∣ et ∣b∣ ≤ ∣c∣.
4. Montrer que : ∀x ∈ **ℝ**\*, ∣1 + 1/x∣ ≤ √2√x2+1/x2 .
5. Montrer que : ∀x ∈ **ℝ**\*, √∣x∣/2 + √1/2∣x∣ ≤ √∣x∣+1/∣x∣.

##### Exercice 3

1. Soit n ∈ **ℕ**\*. Montrer que si n est un carré parfait, alors 2n ne peut pas être un carré parfait.
2. Soit n ∈ **ℕ**. Montrer que : 3 divise n2 ⇔ 3 divise n.
3. Montrer que : √3 ∉ **ℚ**.
4. Soit n ∈ **ℕ**. Montrer que : √4n2+5n+3 ∉ **ℕ**.
5. Montrer que : ∀(a, b, c, d) ∈ **ℚ**4. n + √2m = p + √2q ⇔ (n = p et m = q).

##### Exercice 4

1. Résoudre dans **ℝ** l’équation suivante (E) : ∣2x2 − x − 6∣ − ∣x + 1∣ − 1 = 0.
2. Résoudre dans **ℝ** les inéquations suivantes (I) et (I′) :

(I) : √x2+1 − 2x + 1 ≤ 0 ; (I′) : √x−1 ≥ x − 7

##### Exercice 5

1. Montrer que : (∀n ≥ 5) , n2 < 2n.
2. Montrer que : (∀n ∈ **ℕ**) , ∑nk=1 k2 = n(n+1)(2n+1)/6.
3. Montrer que : (∀a ∈ **ℝ**\* ∖ {−1}) , (∀n ∈ **ℕ**) , ∑2nk=0 (−1)kak = a2n+1+1/a+1 .
4. Montrer que : (∀n ∈ **ℕ**) , 11 divise 32n + 26n−5.

##### Exercice 6

1. Montrer que : (∀n ∈ **ℕ**\*) , n(n − 1)(n − 2) × … × 3 × 2 × 1 ≥ 2n−1.
2. On pose : (∀n ∈ **ℕ**) , Sn = 1 + 2 + 22 + … + 2n.

Montrer que : (∀n ∈ **ℕ**) , Sn = 2n+1 − 1.

#### Devoir surveillé sur la logique et raisonnement

##### Exercice 1

1. Soient a, b, x et y des réels non nuls.

Montrer que :

ax + by = 1 ⇒ 1/x2+y2 ≤ a2 + b2

2. Montrer que :

∀(a, b) ∈ (]0, +∞[)2, a2 = b + 1 ⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a+1) = 1

3. Soient a, b et c des réels.

a) Vérifier que : (a + b)2 − (a − b)2 = 4ab.

b) Montrer que :

∣ab∣ ≻ c2/2 ⇒ ∣a−b∣ ≻ c ou ∣a + b∣ ≻ c

4. Montrer que :

∀(x, y) ∈ **ℝ**2\*, y ≠ −3/4x ⇒ x−y/x+y ≠ 7

5. n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair. Montrer que : n/m ∉ **ℕ**.

##### Exercice 2

1. Montrer que :

∀(a, b) ∈ ([0, +∞[)2 , √a+1 − √b+1 < √a − √b ⇔  a ≻ b

2. Montrer que :

∀(x, y) ∈ **ℝ**2, √x2+1 + √y2+1 = 2 ⇔  x = y = 0

3. Soient a et b deux réels non nuls.

a) Montrer que :

(a + 1/a) = (b + 1/b) ⇔ (a = b ou a = 1/b)

b) Déduire l’ensemble des solutions de l’équation (E) : x2 + 1/x2 = 17/4.

##### Exercice 3

1. Soit n ∈ **ℕ**. On pose : un = (1 + 1)2 × (1 + 1/3)2 × (1 + 1/5)2 × … × (1 + 1/2n+1)2.
	1. Montrer que : ∀n ∈ **ℕ**, un+1 = un(1 + 1/2n+3)2.
	2. Montrer que : ∀n ∈ **ℕ**, un ≻ 2n +3.
2. Montrer que : (∀n ∈ **ℕ**) , 6 divise n(n + 1)(n + 2) .

##### Exercice 4

Résoudre dans **ℝ**2 le système suivant :

{ x3 + x2 − 2 = 0 et x2 + xy − y + y2 = 0

##### Correction du devoir surveillé

##### Exercice 1

1. Soient (a, b, x, y) ∈ **ℝ**4\*.

On suppose que ax + by = 1, et on montre que : 1/x2+y2 ≤ a2 + b2 .

1/x2+y2 − (a2 + b2) = 1−(x2+y2)(a2+b2)/x2+y2

= 1−(a2x2 + b2x2 + a2y2 + y2b2)/x2+y2

= 1−(a2x2 + b2y2 + a2y2 + b2x2)/x2+y2

= 1−((ax + by)2 − 2axby + a2y2 + b2x2)/x2+y2

= 1−(1 − 2axby + a2y2+ b2x2)/x2+y2

= 1−1+2axby−a2y2−b2x2/x2+y2

= −(a2y2 − 2aybx + b2x2)/x2+y2

= −(ay − bx)2/x2+y2

Donc 1/x2+y2 − (a2 + b2) ≤ 0, c’est-à-dire : 1/x2+y2 ≤ a2 + b2. D’où

ax + by = 1 ⇒ 1/x2+y2 ≤ a2 + b2 .

2. Soit (a, b) ∈ (]0, +∞[)2.

a2 = b + 1

⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a+1) = 1.

Donc

∀(a, b) ∈ (]0, +∞[)2.  a2 = b + 1 ⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a+1) = 1.

3. a) Soient (a, b, c) ∈ **ℝ**3.

(a + b)2 − (a − b)2 = a2 + 2ab + b2 − a2 + 2ab − b2

= 4ab

b) Soient (a, b, c) ∈ **ℝ**3.

L’assertion : ∣ab∣ ≻ c2/2 ⇒ ∣a − b∣ ≻ c ou ∣a + b∣ ≻ c, est équivalente à :

∣a − b∣ ≤ c et ∣a + b∣ ≤ c ⇒ ∣ab∣ ≤ c2/2 .

On suppose que ∣a − b∣ ≤ c et ∣a + b∣ ≤ c et on montre que : ∣ab∣ ≤ c2/2 .

On a 4ab = (a + b)2 − (a − b)2 , donc

∣4ab∣ = ∣(a + b)2 − (a − b)2∣ ≤ ∣a + b∣2 + ∣a − b∣2

et comme ∣a + b∣2 ≤ c2 et ∣a − b∣2 ≤ c2 , alors

∣4ab∣ ≤ 2c2

par suite

∣ab∣ ≤ c2/2.

Par contraposition ceci équivalent à :

∣ab∣ ≻ c2/2 ⇒ ∣a−b∣ ≻ c ou ∣a + b∣ ≻ c

4. Soit (x, y) ∈ **ℝ**2\*

L’assertion : y ≠ −3/4x ⇒ x−y/x+y ≠ 7, est équivalent à :

x−y/x+y = 7 ⇒ y = −3/4x

On a

x−y/x+y = 7

⇒  x − y = 7(x + y)

⇒ − y − 7y = −x + 7x

⇒ −8y = 6x

⇒ y = −6x/8

⇒ y = −3/4x

Par contraposition ceci équivalent à :

∀(x, y) ∈ **ℝ**2\*, y ≠ −3/4x ⇒ x−y/x+y ≠ 7

5. Soient n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair.

On suppose par l’absurde que : n/m ∈ **ℕ**. Donc

∃p ∈ **ℕ**, n/m = p

Alors n = p.m, ce qui est contradictoire puisque n est impair et m.p est pair. Donc

n/m ∉ **ℕ**

#### Devoir maison logique et raisonnement

##### ****Exercice 1**** (Les deux questions sont indépendantes)

1. On considère les deux assertions :

P : (∀x ∈ **ℝ**+) , x ≥ 2√x − 1 et Q : (∀y ∈ **ℝ**)(∃x ∈ **ℝ**) , xy ≠ x.

a) Donner la négation de P et Q.

b) Montrer que P est vraie et Q est fausse.

2. Donner la négation des assertions suivantes :

R : (∀x ∈ **ℝ**)(∃k ∈ **ℤ**) , k ≤ x < x + 1 et F : ∀(α, β) ∈ **ℝ**2, (α − β > 1 ⇒ ∃n ∈ **ℤ**, α < n < β)

##### ****Exercice 2**** (Les questions sont indépendantes)

1. Montrer que : ∀(a, b) ∈ (]0, +∞[)2, a2 = b + 1 ⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a + 1) = 1.
2. Montrer par la contraposée que : (∀n ∈ **ℕ**) , n2/3 ∈ **ℕ** ⇒ n/3 ∈ **ℕ**.
3. Soit x ∈ **ℝ**+, montrer que : √x/x2−x+1 ≤ 4/3√x.
4. Soit n ∈ **ℕ**, montrer que : √4n2+5n+3 ∉ **ℕ**.

##### ****Exercice 3**** (Les questions sont indépendantes)

1. Résoudre dans **ℝ** l’inéquation : (I) : √x−1 ≥ x − 7.
2. Montrer que : (∀x ∈ **ℝ**) , x6 − x5 + x4 − x3 + x2 − x + 3/4 > 0. (Étudier : x ≤ 0, 0 < x < 1 et x ≥ 1).
3. Montrer que : (n ∈ **ℕ**\*) , 1 + 3 + 5 + … + (2n + 1) = (n + 1)2.

##### ****Exercice 4****

Déterminer l’ensemble de définition des fonctions suivantes :

ƒ(x) = √(∣x∣ − 2)∣x∣ , { ƒ(x) = 3x+1/√x+2 , si x ≤ 1 et ƒ(x) = x2/2x−1 , si x > 1 et ƒ(x) = x−1/x2+x+m , (m est un paramètre)

#### Correction du devoir maison

##### Exercice 1

1. **On considère les deux assertions :**

P **: (∀**x**∈ ℝ+) ,** x**≥**2√x − 1 **et**Q**: (∀**y**∈ ℝ)(∃**x**∈ ℝ) ,** xy ≠ x.

**a) La négation de**P**et**Q.

**∴ La négation de**P**est :**P−**: (∃**x **∈ ℝ+),**x**<**2√x − 1.

**∴ La négation de**Q**est :**Q−**: (∃**y**∈ ℝ)(∀**x**∈ ℝ) ,**xy = x.

**b) Montrons que**P**est vraie et**Q**est fausse.**

**∴ Soit**x**∈ ℝ+.**

**On a**

x**≥**2√x − 1 **⇔**√x2 − 2√x + 1**≥**0**⇔ (**√x − 1**)**2**≥**0

**comme l’assertion (**√x − 1**)**2**≥**0**est vraie pour tout**x**∈ ℝ+, ce qui signifie que l’assertion**P**est vraie.**

**∴ Si**y = 1**, on obtient l’égalité :**x = x**qui est vraie pour tout**x**∈ ℝ, alors l’assertion** Q−**est vraie, par suite l’assertion**Q **est fausse.**

**2. La négation des assertions**R**et**F.

**∴ La négation de l’assertion** R **est :**R−**: (∃**x **∈ ℝ)(∀**k**∈ ℤ),**k**>** x**ou** x **≥**x + 1.

**∴ La négation de l’assertion**F**est :**F−**: ∃(**α, β**) ∈ ℝ**2, α − β **>** 1**et (∀**n**∈ ℤ,** α**≥**n **ou**n**≥**β**).**

##### Exercice 2

1. **Montrons que : ∀(**a, b**) ∈ (]**0, +∞**[)**2, a2 = b + 1 **⇒**√a−√b+√a+√b**/**√2**(**a + 1**)**= 1**.**
2. **Montrons par la contraposée que : (∀**n**∈ ℕ) ,**n2/3**∈ ℕ ⇒**n/3**∈ ℕ.**

**Soit**n**∈ ℕ.**

**L’assertion :**n2/3 **∈ ℕ ⇒** n/3**∈ ℕ est équivalente :** n/3**∉ ℕ ⇒** n2/3 **∉ ℕ.**

**On suppose que**n/3**∉ ℕ. On va distinguer deux cas lorsque**n = 3k + 1**ou** n = 3k + 2**tel que** k **∈ ℕ.**

**∴ Si** n = 3k + 1, **alors**

n2 =**(**3k + 1**)**2 = 9k2 + 6k + 1 = 3**(**3k2 + 2k**)**+ 1

**On pose** p = 3k2 + 2k **∈ ℕ. On obtient :**n2 = 3p + 1.**Donc ceci signifie que**3**ne divise pas**n2. **(c’est-à-dire :**n2/3**∉ ℕ).**

**∴ Si** n = 3k + 2**, alors**

n2 =**(**3k + 2**)**2 = 9k2 + 12k + 4 = 3**(**3k2 + 4k + 1**)**+ 1

**On pose**p′ = 3k2 + 4k + 1 **∈ ℕ. On obtient :**n2 = 3p′ + 1.**Donc ceci signifie que** 3**ne divise pas**n2**. (c’est-à-dire :**n2/3 **∉ ℕ).**

**On conclut que dans tous les deux cas**n2/3**∉ ℕ. Ceci signifie que :**n/3**∉ ℕ ⇒**n2/3**∉ ℕ. Donc par contraposition ceci est équivalente à :**

**(∀**n**∈ ℕ) ,**n2/3**∈ ℕ ⇒**n/3**∈ ℕ.**

**3. Soit**x **∈ ℝ+, montrer que :**√x/x2−x+1**≤**4/3√x.

**4. Soit**n**∈ ℕ. Montrons que :**√4n2+5n+3**∉ ℕ.**

**On suppose par l’absurde que**√4n2+5n+3**∈ ℕ. Alors**

**∃**m**∈ ℕ,**√4n2+5n+3 = m

**Donc**

4n2 + 5n + 3 = m2

**On a : (**2n + 1**)**2**<**4n2 + 5n + 3 et 4n2 + 5n + 3 **< (**2n + 2**)**2. **C’est-à-dire**

**(**2n + 1**)**2**<** 4n2 + 5n + 3**< (**2n + 2**)**2

**donc**

**(**2n + 1**) <**√4n2+5n+3 **< (**2n + 2**)**

**d’où**

**(**2n + 1**) <**m**< (**2n + 2**).**

**C’est une contradiction car on peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs (**2n + 1**) et (**2n + 2**).**

**Ceci signifie que**

**(∀**n**∈ ℕ) ,**√4n2+5n+3 **∉ ℕ.**