

Espaces Vectoriels Normés

Définitions - Exemples - Propriétés de base

Résumé de cours préparé par

Prof. N. Benouhiba

- 1 Norme
- 2 Topologie associée à une norme
- 3 Equivalence de Normes
- 4 Notion de limite
- 5 Suite de Cauchy
- 6 Espaces de Banach
- 7 Dual topologique d'un espace de Banach

Définition

Le symbole K désigne le corps réel $\mathbb{R}$ ou le corps complexe $\mathbb{C}$.

Définition

Soit E un espace vectoriel sur K . Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ❶ **Séparation** : $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- ❷ **Homogénéité** : $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.
- ❸ **Inégalité triangulaire** : $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

- ▷ Une norme $N(\cdot)$ est souvent notée par $\|\cdot\|$.
- ▷ Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé espace vectoriel normé (K -evn).
- ▷ Si l'application satisfait (2) et (3) seulement, elle est appelée semi-norme.

Exemples de Normes

- L'espace vectoriel $E = \mathbb{C}$ muni de l'application module est un $\mathbb{C}$ -evn.
- Les applications

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_N|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$$

$$\|x\|_3 = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|)$$

définissent des normes sur $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.

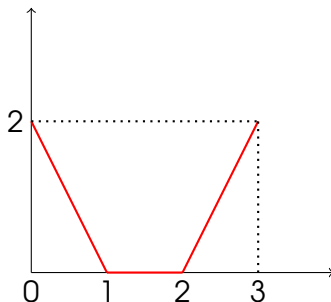
- Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'application

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions continues $C[a, b]$.

Exemples de Normes

- L'application $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [1,2]} |f(x)|$ est une semi-norme sur $C[0, 3]$. Observer la fonction g



La fonction est telle que $g \neq 0$ pourtant $\sup_{x \in [1,2]} |g(x)| = 0$.

Topologie associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -evn. L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|; x, y \in E$$

est une distance sur l'espace E .

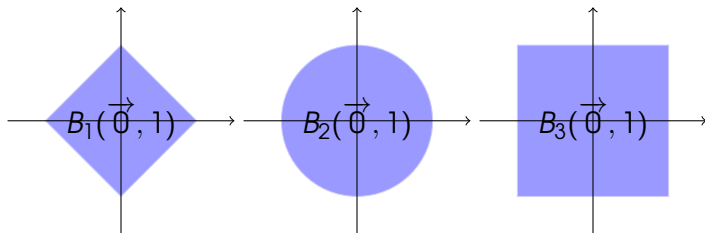
Définition

Soient $a \in E$ et $0 \leq r < +\infty$.

- ❶ La boule ouverte de centre a et de rayon r est $B(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| < r\}$ avec $B(a, 0) = \emptyset$.
- ❷ La boule fermée de centre a et de rayon r est $B'(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\}$.
- ❸ La sphère de centre a et de rayon r est $S(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| = r\}$.

Exemples de boules ouvertes

Boules ouvertes dans $\mathbb{R}^2$



$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \|x\|_3 = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Proposition

Pour tout point a d'un K -evn $(E, \|\cdot\|)$ et tout réel r positif, on a

- $B(a, r) = \widehat{B'(a, r)}$
- $B'(a, r) = \overline{B(a, r)}$
- $S(a, r) = \partial B(a, r) = \partial B'(a, r).$

► Toutes les notions topologiques dans les espaces normés sont analogues à celles des espaces métriques : ouvert, fermé, voisinage, densité, compacité...

Définition

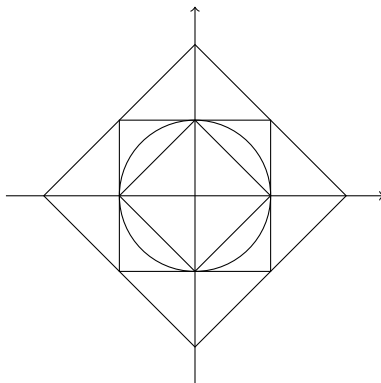
Soit E un K -evn. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ définies sur E sont dites équivalentes si

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E : c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

- ▶ Deux normes équivalentes engendrent la même topologie.
- ▶ Dans les K -evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exemple de normes équivalentes

L'équivalence des normes $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$ dans $\mathbb{R}^2$



$$B_1(\vec{0}, 1) \subset B_2(\vec{0}, 1) \subset B_3(\vec{0}, 1) \subset B_1(\vec{0}, 2)$$

Définition

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un K -evn $(E, \|\cdot\|)$ est convergente de limite $l \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n > n_0 \Rightarrow \|x_n - l\| < \varepsilon).$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - l\| = 0$.

- ▶ La limite d'une suite si elle existe est unique.
- ▶ Soit $(\|\cdot\|_i)_{i \in I}$ une famille de normes équivalentes. Il suffit qu'une suite soit convergente pour l'une de ces normes pour qu'elle le soit pour les restantes.

Définition

Une suite (x_n) d'un K -evn $(E, \|\cdot\|)$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n, m > n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon)$$

- ▶ Toute suite de Cauchy est bornée.
- ▶ Toute suite convergente est de Cauchy (attention, l'inverse n'est pas en général vrai).

Définition

Un espace normé est dit complet si toutes ses suites de Cauchy y converge. Il est appelé alors espace de Banach.

- ▶ La boule unité fermé d'un espace de Banach est compacte si et seulement s'il est de dimension finie.
- ▶ Tout fermé d'un espace de Banach est un Banach.
- ▶ Tout K -evn de dimension finie est un espace de Banach.

Exemples d'espaces de Banach

- $\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$: l'espace des suites complexes bornées $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|; x \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}).$$

- $C_b(I)$: l'espace des fonctions continues bornées de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Définition

Soit E un K -evn.

- Une forme sur E est une application $\phi : E \rightarrow K$.
- Une forme linéaire ϕ est dite continue sur E si

$$\exists c > 0, \forall x \in E : |\phi(x)| \leq c\|x\|.$$

- Le dual topologique E^* de E est l'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur E .
-
- ▷ L'application $\|\phi\|_* = \inf\{c > 0 : |\phi(x)| \leq c\|x\|, \forall x \in E\}$ est une norme sur l'espace vectoriel E^* .
 - ▷ L'espace E^* est un Banach.