

Espaces vectoriels normés, calcul différentiel

Karine Beauchard

24 janvier 2017

Table des matières

1	Rappels : topologie dans les espaces métriques	7
1.1	Espaces métriques	7
1.2	Ouverts d'un espace métrique	7
1.3	Suites d'un espace métrique	8
1.4	Applications continues entre espaces métriques	8
1.5	Espaces métriques compacts	9
1.5.1	Définitions	9
1.5.2	Fonctions continues sur un compact	10
1.6	Espaces métriques complets	10
1.6.1	Définitions	10
1.6.2	Prolongement des applications uniformément continues	11
1.6.3	Théorème du point fixe	12
1.6.4	Théorème d'Ascoli	12
1.7	Notions topologiques versus notions métriques	15
1.8	Au programme de l'interrogation	15
1.9	Quelques exercices corrigés	16
1.9.1	Topologie des espaces métriques	16
1.9.2	Prolongement des applications uniformément continues	17
1.9.3	Théorème du point fixe	17
1.9.4	Théorème d'Ascoli	19
2	Espaces vectoriels normés	21
2.1	Normes	21
2.1.1	Définition	21
2.1.2	Normes équivalentes	22
2.2	Théorème de Riesz	23
2.3	Espaces de Banach	24
2.4	Séries dans les evn	26
2.5	Séparabilité	28
2.6	Au programme de l'interrogation	29
2.7	Quelques exercices corrigés	30
2.7.1	Manipulations de normes	30
2.7.2	Normes sur des espaces de suites	31
2.7.3	Normes sur des fonctions C^1	32
2.7.4	Normes L^p	33
2.7.5	Normes sur les fonctions lipschitziennes	34
2.7.6	Utilisation de la complétude : point fixe	36

3	Applications linéaires entre evn	39
3.1	Norme subordonnée	39
3.2	Norme d'algèbre	42
3.3	Généralisation aux applications multi-linéaires	44
3.4	Prolongement par densité des ALC	45
3.5	Dualité (rudiments)	45
3.6	Au programme de l'interrogation	48
3.7	Quelques exercices corrigés	48
4	Séries de Fourier	53
4.1	Coefficients de Fourier	53
4.1.1	Définition, règles de calcul	53
4.1.2	Décroissance et régularité	54
4.1.3	Noyau de Dirichlet et noyau de Fejer	55
4.2	Théorème de Fejer	56
4.3	Théorème de Dirichlet	57
5	Espaces de Hilbert	61
5.1	Espaces préhilbertiens	61
5.2	Espace de Hilbert et théorème de projection	63
5.2.1	Espace de Hilbert	63
5.2.2	Théorème de projection sur un sev de dimension finie	64
5.2.3	Théorème de projection sur un convexe fermé	65
5.3	Conséquences du théorème de projection	67
5.3.1	Théorème du supplémentaire orthogonal	67
5.3.2	Dualité : théorème de Riesz	68
5.4	Bases hilbertiennes	68
5.4.1	Définition, existence	68
5.4.2	Caractérisation par l'égalité de Bessel	68
5.4.3	Application aux séries de Fourier	70
5.4.4	Autres exemples de bases hilbertiennes	71
5.5	Au programme de l'interrogation	71
5.6	Quelques exercices corrigés	71
5.7	Annexe 1 : Application du théorème de Riesz : résolution d'EDP elliptiques	76
6	Théorie de Baire et applications	81
6.1	Théorème de Baire	81
6.2	Théorème de Banach-Steinhaus	82
6.2.1	Enoncé	82
6.2.2	Application aux séries de Fourier	83
6.3	Théorèmes de l'application ouverte et d'isomorphisme de Banach	84
6.3.1	Enoncé	84
6.3.2	Application aux séries de Fourier	85
6.4	Au programme de l'interrogation	86
6.5	Exercices corrigés	86
7	Topologie faible dans les Hilbert	89
7.1	Suites faiblement convergentes dans un Hilbert	89
7.2	Compacité faible	90
7.3	Application à l'optimisation	91
7.4	Qq relations entre différents types de convergences	91

7.5	Au programme de l'interrogation	92
8	Le théorème spectral sur un Hilbert	93
8.1	Endomorphisme adjoint	94
8.2	Opérateurs compacts sur un Banach	96
8.3	Spectre et valeurs propres	96
8.4	Annexe 1 : Réduction des endomorphismes normaux en dimension finie	98
8.5	Annexe 2 : Propriétés des opérateurs compacts sur un Hilbert	99
8.6	Annexe 3 : Preuve partielle du théorème spectral	99
8.7	Au programme de l'interrogation	101
9	Théorèmes de Hahn Banach	
	complément de dualité	103
9.1	Théorème de Hahn Banach analytique	103
9.1.1	Preuve de H-B analytique sur un Hilbert	104
9.1.2	Prolongement avec une dimension de plus	104
9.1.3	Preuve de H-B analytique en dimension finie	104
9.1.4	Preuve de H-B analytique dans le cas général via l'axiome de Zörn	105
9.2	Complément de dualité	106
9.3	Théorème de Hahn Banach géométrique	107
9.3.1	Hyperplans (rappels)	107
9.3.2	Théorème de Hahn Banach géométrique	109
9.4	Au programme de l'interrogation	109
10	Fonctions d'une variable réelle	111
10.1	Dérivabilité	111
10.1.1	Définition	111
10.1.2	Propriétés élémentaires	112
10.2	Fonctions à valeurs réelles : Rolle, EAF, Taylor Lagrange	114
10.2.1	Théorème de Rolle	114
10.2.2	Egalité des accroissements finis	115
10.2.3	Formule de Taylor Lagrange	115
10.3	Fonctions à valeurs vectorielles : IAF, Taylor Young et reste intégrale	117
10.3.1	Inégalité des accroissements finis	117
10.3.2	Formule de Taylor Young	118
10.3.3	Formule de Taylor avec reste intégral	119
10.3.4	Application au prolongement	120
10.4	Dérivabilité et suites/séries de fonctions	122
10.5	Fonctions convexes	122
10.5.1	Définition	122
10.5.2	Régularité des fonctions convexes	123
10.5.3	Caractérisation de la convexité	125
10.5.4	Inégalités de convexité classiques	126
10.5.5	Convexité et optimisation	126
10.6	Au programme de l'interrogation	126
10.7	Appendice 1 : Intégrale de Riemann	126

11 Différentielle	129
11.1 Différentiabilité	130
11.1.1 Définition	130
11.1.2 Exemples classiques	131
11.1.3 Propriétés élémentaires	137
11.1.4 Thm des fonctions composées et conséquences	139
11.1.5 Différentiabilité et inversion	141
11.1.6 Inégalité des accroissements finis et conséquences	143
11.1.7 Gradient	144
11.1.8 Différentiabilité et suites/séries d'applications	144
11.2 Différentielles partielles	148
11.2.1 Différentielle partielle d'ordre 1	148
11.2.2 Différentielle partielle d'ordre 2	150
11.2.3 Différentielle partielle d'ordre n	154
11.2.4 Exercices type	154
11.3 Différentielle d'ordre ≥ 2	156
11.3.1 Différentielle d'ordre 2	156
11.3.2 Différentielle d'ordre supérieur	159
11.4 Formules de Taylor	160
11.4.1 Taylor Young	160
11.4.2 Taylor avec reste intégral	161
11.4.3 Inégalité de Taylor-Lagrange	161
11.5 En dimension finie	161
11.5.1 Reformulation des précédents résultats	161
11.5.2 Matrice Jacobienne et changement de variables	162
11.5.3 Gradient	163
11.5.4 Hessienne	163
11.6 Optimisation et convexité	164
11.6.1 Problèmes d'extrémum	164
11.6.2 Applications convexes	164
11.6.3 Optimisation des applications convexes	166
11.6.4 Exercices-type	166
12 Inversion locale et fonctions implicites	169
12.1 Théorème d'inversion locale	169
12.1.1 C^1 -difféomorphisme	169
12.1.2 Enoncé et preuve du TIL	169
12.1.3 Exercices-type	172
12.2 Théorème des fonctions implicites	174
12.2.1 Enoncé du TFI	174
12.2.2 Exercices type	176
12.3 Sous-variétés	181
12.3.1 Définitions équivalentes	181
12.3.2 Espace tangent	184
12.3.3 Exercices type	186
12.4 Théorème des extrêma liés	189
12.4.1 Enoncé	189
12.4.2 Exercices-type	190

Chapitre 1

Rappels : topologie dans les espaces métriques

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les résultats de la topologie des espaces métriques qui seront utiles pour étudier les espaces vectoriels normés, dans les chapitres ultérieurs. L'essentiel des preuves est laissé au lecteur.

1.1 Espaces métriques

Definition 1 (Distance, espace métrique) Une *distance* sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

- $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$ [séparation]
- $d(x, y) = d(y, x)$ [symétrie]
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in E$ [inégalité triangulaire].

Alors (E, d) est un espace **métrique**.

Exemple : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn alors $d(x, y) := \|x - y\|$ définit une norme sur E .

Definition 2 (Boule ouverte/fermée, diamètre, borné) Soit (E, d) un espace métrique. Pour $x \in E$ et $r > 0$, on définit la **boule ouverte** de centre x et rayon r

$$B(x, r) := \{y \in E; d(x, y) < r\}$$

et la **boule fermée** de centre x et rayon r

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in E; d(x, y) \leq r\}.$$

Le **diamètre** d'une partie A de (E, d) est $\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y); x, y \in A\}$. A est **bornée** si $\text{diam}(A) < \infty$.

1.2 Ouverts d'un espace métrique

Definition 3 (Ouvert, fermé) Soit (E, d) un espace métrique. Un sous-ensemble Ω de E est **ouvert** si, pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$. Un sous ensemble F de E est **fermé** si son complémentaire est ouvert.

Proposition 1 1. (Axiomes d'ouverts) E et $\emptyset$ sont ouverts. Une union quelconque d'ouverts est ouverte. Une intersection finie d'ouverts est ouverte.

2. (Axiomes de fermés) E et $\emptyset$ sont fermés. Une intersection quelconque de fermés est fermée. Une union finie de fermés est fermée.

Définition 4 (Intérieur, adhérence, densité) Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E et $x \in E$.

x est **intérieur** à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. L'**intérieur** de A , notée $\text{Int}(A)$, est l'ensemble des points intérieurs à A .

x est **adhérent** à (ou **point d'accumulation de**) A si $\forall r > 0$, $B(x, r)$ contient un point de A différent de x . L'**adhérence** de A , notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents.

A est **dense** dans E si $E = \overline{A}$.

Proposition 2 Soit (E, d) un e.m. et A une partie de E .

- L'intérieur d'une partie A de E est l'union des ouverts contenus dans A .
- L'adhérence d'une partie A de E est l'intersection des fermés contenant A .

Définition 5 (Distances équivalentes) Deux distances d et d' sur E sont **équivalentes** s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $C_1 d \leq d' \leq C_2 d$.

Proposition 3 Deux distances équivalentes ont les mêmes ouverts.

1.3 Suites d'un espace métrique

Définition 6 (Convergence, limite) Soit (E, d) un e.m., $a \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers a si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_n \in B(a, \epsilon), \forall n > n_0.$$

Alors a est la **limite** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qu'on note $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Proposition 4 Soit (E, d) un e.m. $a \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . EQU :

1. Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a .
2. Pour tout $r > 0$, $B(a, r)$ contient des x_n d'indice n arbitrairement grand.

On dit alors que a est **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple : La suite $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ admet pour valeurs d'adhérence -1 et $+1$.

1.4 Applications continues entre espaces métriques

Proposition 5 Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m., $f : E \rightarrow F$, $a \in E$ et $b \in F$. EQU :

1. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in B_E(a, r)$ alors $f(x) \in B_F(b, \epsilon)$.
2. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E convergeant vers a , $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b .

Alors b est **limite de f quand x tend vers a** : $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Définition 7 (Continuité en un point) Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m., $f : E \rightarrow F$ et $a \in E$. f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Proposition 6 Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m. et $f : E \rightarrow F$. EQU :

1. f est continue en tout point a de E .
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E .

3. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E .

Alors f est **continue** (globalement).

Exemple : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (elle est polynomiale). $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue $\det$.

Définition 8 (Continuité uniforme, caractère lipschitzien) Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m. et $f : E \rightarrow F$. f est **uniformément continue** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in E, d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Soit $M > 0$. f est **M -lipschitzienne** si

$$d_F(f(x), f(y)) \leq M d_E(x, y), \forall x, y \in E.$$

f est **contractante** si elle est k -lipschitzienne avec $k < 1$.

Contractante $\Rightarrow$ Lipschitzienne $\Rightarrow$ Uniformément continue, mais la réciproque est fautive. En effet, la fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue (car continue sur un compact : théorème de Heine), mais elle n'est pas lipschitzienne car

$$\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; 0 \leq x < y \leq 1 \right\} \geq |f'(\epsilon)| = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.$$

La première inégalité découle de la définition de $f'(\epsilon)$ comme limite des taux d'accroissement. En fait, pour $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, on a [exercice]

$$\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; a \leq x < y \leq b \right\} = \|f'\|_\infty.$$

1.5 Espaces métriques compacts

1.5.1 Définitions

Proposition 7 Soit (E, d) un e.m. et A une partie de E . EQU :

1. De toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente. [Bolzano Weierstrass]
2. De tout recouvrement de A par des ouverts de E on peut extraire un sous-recouvrement fini de A . [Borel Lebesgue]

Alors A est un **compact** de (E, d) .

Preuve : [Borel Lebesgue $\Rightarrow$ Bolzano Weierstrass] utilise le théorème des compacts emboîtés (qui se démontre à partir de Borel Lebesgue) avec $F_n := \text{Adh}_X\{x_k; k \geq n\}$. Il fournit $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n_k \in \mathbb{N}$ tq $d(l, x_{n_k}) < 1/k$. Ainsi $x_{n_k} \rightarrow l$.

[Bolzano Weierstrass $\Rightarrow$ Borel Lebesgue] requiert une base dénombrable de voisinages, qu'on a bien sur un e.m. et utilise le Lemme de la maille. Voir poly Nier-Iftimie. $\square$

Proposition 8 1. Une intersection qdq de compacts est compacte.

2. Une union finie de compacts est compacte.
3. Le produit cartésien d'un nb fini de compacts est compact.
4. Un fermé d'un compact est compact.
5. Tout compact est borné.
6. Une suite d'un compact qui n'admet qu'une valeur d'adhérence converge.
7. Toute suite décroissante de compacts non vide admet une intersection non vide [thm des compacts emboîtés].
8. Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.
9. Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

1.5.2 Fonctions continues sur un compact

Proposition 9 (Fonctions continues sur un compact) 1. *L'image d'un compact par une application continue est compacte.*

2. *Toute fonction numérique sur un compact est bornée et atteint ses bornes.*

3. *La distance entre un fermé et un compact disjoints est > 0 .*

Preuve : Le 1. se démontre élémentairement puis 2. et 3. s'en déduisent. $\square$

Proposition 10 (Théorème de Heine) *Toute fonction continue sur un e.m. compact est uniformément continue.*

Preuve : Soient $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m., K un compact de E et $f : K \rightarrow F$ continue. Par l'absurde, on suppose que f n'est pas uniformément continue sur K :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x, y \in K \text{ vérifiant } d_E(x, y) < \delta \text{ et } d_F(f(x), f(y)) > \epsilon.$$

Alors, avec $\delta = \frac{1}{n}$, on construit deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de K telles que $d_E(x_n, y_n) \rightarrow 0$ et $d_F(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Quitte à extraire $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (a, b) dans $K \times K$ (car il est compact). Alors $d(a, b) = 0$ cad $a = b$ et $d(f(a), f(b)) \geq \epsilon > 0$: contradiction. $\square$

1.6 Espaces métriques complets

1.6.1 Définitions

Définition 9 (Suite de Cauchy) *Soit (E, d) un e.m. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est **de Cauchy** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_p, x_q) \leq \epsilon, \forall p, q \geq n_0.$$

Proposition 11 *Dans un e.m.,*

1. *une suite convergente est de Cauchy,*
2. *une suite de Cauchy est bornée,*
3. *une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge,*
4. *l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est encore une suite de Cauchy (la continuité de l'application ne suffit pas)*

Preuve :

1. Utiliser la définition de convergence avec ϵ et l'inégalité triangulaire.
2. On fixe ϵ et $n_0 = n_0(\epsilon)$ associé. Alors, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x_p) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_p) \leq M$ où $M := 2[\epsilon + \max\{d(x_k, x_{n_0}); 0 \leq k < n_0\}]$ est indépendant de (n, p) .
3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un e.m. (E, d) . On suppose qu'elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans (E, d) vers $a \in E$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tels que $d(x_p, x_q) \leq \epsilon, \forall p, q \geq n_0$ et $d(x_{\phi(n)}, a) < \epsilon, \forall n \geq n_0$. Ainsi, pour $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} d(x_n, a) &\leq d(x_n, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, a) \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \quad \text{car } \phi(n) \geq n \geq n_0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

4. Contre-exemple : $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $(0, 1)$ et $f : x \in (0, \infty) \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ est continue mais $(f(1/n) = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$. $\square$

Définition 10 (e.m. complet) Une e.m. (E, d) est **complet** si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Des exemples seront donnés ultérieurement, en Section 2.3.

Proposition 12 1. Une intersection qdq de complets est complète.

2. Une union finie de complets est complète.

3. Le produit cartésien fini (ou dénombrable) de complets est complet (pour la topologie produit).

4. Dans un e.m. complet, les sous-ensembles complets sont les sous-ensembles fermés, en particulier $\mathbb{R}^n$ est complet.

5. Tout e.m. compact est complet.

6. Un e.m. (E, d) est complet ssi toute suite décroissante $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés de E dont le diamètre tend vers zéro, $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$, a une intersection non vide (et réduite à un point).

1.6.2 Prolongement des applications uniformément continues

Théorème 1 (Théorème de prolongement) Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des espaces métriques avec (F, d_F) complet, $D \subset E$ une partie dense de E et $f : (D, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application uniformément continue. Alors f admet un unique prolongement par continuité $\tilde{f} : E \rightarrow F$. De plus, $\tilde{f}$ est une application uniformément continue $(E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$.

Notez bien que seule la complétude de l'espace d'arrivée compte, pas celle de l'espace de départ.

Preuve :

Convergence point par point : Soit $x \in E \setminus D$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de D convergeant vers x dans (E, d_E) . Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d_E) [notez que E n'a pas besoin d'être complet pour que cette implication soit vraie]. Comme f est uniformément continue, alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (F, d_F) . Or (F, d_F) est complet, donc la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F) .

Définition de $\tilde{f}$: Vérifions que cette limite ne dépend que de x et pas de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie, pour que la définition $\tilde{f}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ soit légitime. Soit $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite convergeant vers x . Soit $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité de $f : (D, d_E) \rightarrow (F, d_F)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y, z \in D, d_E(y, z) < \delta \Rightarrow d_F(f(y), f(z)) < \epsilon. \quad (1.1)$$

Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers a , il existe n_0 tel que $d_E(x_n, x'_n) < \delta$ pour tout $n > n_0$. Alors $d_F(f(x_n), f(x'_n)) < \epsilon$ pour tout $n > n_0$. En passant à la limite $[n \rightarrow \infty]$, on obtient $d_F(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)) < \epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Uniforme continuité de $\tilde{f}$: Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ de sorte que (1.1) ait lieu. Soient $x, y \in E$ tels que $d_E(x, y) < \delta/2$. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de D convergeant respectivement vers x et y . Alors, pour n assez grand, $d_E(x_n, y_n) < \delta$ et donc $d_F(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$. En passant la limite, on obtient $d_F(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon$. $\square$

Applications :

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ α -Höldériennes. Alors $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

2. L'intégrale (de Riemann) définie sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ admet un unique prolongement continu sur $\mathcal{L}^1((0, 1), \mathbb{R})$ (voir TD1).
3. Unicité du complété d'un espace métrique (voir TD1)
4. La transformée de Fourier, qui est définie sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ par la formulation intégrale, se prolonge par uniforme continuité sur tout $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.6.3 Théorème du point fixe

Proposition 13 (Théorème du point fixe) Soit (E, d) un e.m. complet et $f : E \rightarrow E$ une application contractante. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$.

De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f , définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, converge vers a de façon géométrique :

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Il est important de bien connaître ce théorème (hypothèses + 3 conclusions). L'énoncé est optimal : toutes ses hypothèses sont nécessaires !

Exercice : Trouver 4 contre-exemples (E, f) de la forme suivante

- E em, $f : E \rightarrow E$ contractante mais n'admet pas de point fixe parce que E n'est pas complet,
- E em complet, f contractante mais n'admet pas de point fixe parce que f n'envoie pas E dans E ,
- E em complet, $f : E \rightarrow E$ mais n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle vérifie $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$,
- E em complet, $f : E \rightarrow E$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.

Preuve : Soit $x_0 \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des itérés de x_0 par f . Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d) . En effet,

$$d[x_n, x_{n+1}] = d[f(x_{n-1}), f(x_n)] \leq kd[x_{n-1}, x_n] \quad \text{donc} \quad d[x_n, x_{n+1}] \leq k^n d[x_0, x_1], \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{aligned} d[x_n, x_{n+p}] &\leq d[x_n, x_{n+1}] + \dots + d[x_{n+p-1}, x_{n+p}] \\ &\leq (k^n + \dots + k^{n+p-1}) d[x_0, x_1] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} \rightarrow 0 \text{ quand } [n \rightarrow \infty]. \end{aligned}$$

Comme (E, d) est complet alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons a sa limite. En passant à la limite $[n \rightarrow \infty]$ dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $f(a) = a$. En passant à la limite $[p \rightarrow \infty]$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient la majoration d'erreur géométrique. Par l'absurde, supposons que f admette un autre point fixe $a' \neq a$. Alors

$$d[a, a'] = d[f(a), f(a')] \leq kd[a, a'] < d[a, a'] : \text{contradiction.} \square$$

1.6.4 Théorème d'Ascoli

Théorème 2 (Théorème d'Ascoli) Soit (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet et A une partie de $C^0(E, F)$. EQU :

1. A est relativement compacte dans $(C^0(E, F), d_\infty)$ où

$$d_\infty(f, g) := \sup\{d_F[f(x), g(x)]; x \in E\}, \forall f, g \in C^0(E, F).$$

2. A est équicontinue, cad

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, y \in E, d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon, \forall f \in A$$

et $A_x := \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact dans F pour tout $x \in E$.

Remarque 1 Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie alors (relativement compact dans $(E, \|\cdot\|)$) $\Leftrightarrow$ (borné).

Preuve de 2. $\Rightarrow$ 1. :

Étape 1 : Il existe $D \subset E$ dénombrable et dense dans E . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut extraire de $\{B_E(x, 1/n); x \in E\}$ un sous-recouvrement fini de E : il existe une famille $x_{n,k}$ indexée par $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq K_n$ (avec K_n fini) telle que

$$E \subset \bigcup_{1 \leq k \leq K_n} B_E\left(x_{n,k}, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors $\{x_{n,k}; n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq K_n\}$ est dénombrable et dense dans E .

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de A . Montrons qu'elle admet une sous-suite convergente dans $(C^0(E, F), d_\infty)$.

Étape 2 : Extraction qui converge simplement sur D . Pour tout $d \in D$, $(f_n(d))_{n \in \mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $\overline{A_d}$, qui est compact dans (F, d_F) . Par un procédé d'extraction diagonale, on obtient une extraction ψ telle que, pour tout $d \in D$, $(f_{\psi(n)}(d))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F) vers une limite notée $f(x)$.

Étape 3 : f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue $E \rightarrow F$, toujours notée f . L'hypothèse d'équicontinuité de A implique l'uniforme continuité de $f : (D, d_E) \rightarrow (F, d_F)$, par passage à la limite, donc le théorème de prolongement des applications uniformément continues s'applique.

Étape 4 : $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur E . Soit $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité de f et équicontinuité de A , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \text{et} \quad d_F(g(x), g(y)) < \epsilon, \forall g \in A.$$

Comme D est dense dans (E, d_E) alors $E \subset \bigcup_{x \in D} B_E(x, \delta)$. Or E est compact, donc (Borel Lebesgue) on peut en extraire un sous-recouvrement fini de E : il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_N \in D$ tels que

$$E \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N} B_E(x_j, \delta).$$

Comme $f_{\psi(n)}(x_j) \rightarrow f(x_j)$ pour $j = 1, \dots, N$ (cf Étape 1 : notez bien que $x_j \in D$) alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_F[f_{\psi(n)}(x_j), f(x_j)] < \epsilon \quad \forall n > n_0, 1 \leq j \leq N.$$

Soit $n > n_0$. Soit $x \in E$. Il existe $j \in [1, N]$ tel que $x \in B(x_j, \delta)$. Alors

$$d_F[f_{\psi(n)}(x), f(x)] \leq d_F[f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(x_j)] + d_F[f_{\psi(n)}(x_j), f(x_j)] + d_F[f(x_j), f(x)] \leq 3\epsilon.$$

Ceci vaut pour tout $x \in E$ donc $d_\infty(f_{\psi(n)}, f) \leq 3\epsilon$. □

Au lieu des Étapes 3 et 4, on peut aussi montrer que $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $C^0(E, F)$, comme dans Hirsh-Lacombe.

Preuve de 1. $\Rightarrow$ 2. :

Étape 1 : Montrons que A_x est relativement compact dans (F, d_F) pour tout $x \in E$. Soit $x \in E$ et $(y_n = f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de A_x , cad $f_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme A est relativement compact dans $C^0(E, F)$, alors il existe une extraction ψ telle que $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur E . En particulier, $(y_{\psi(n)} = f_{\psi(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F .

Étape 2 : Montrons que A est équicontinue. Soit $\epsilon > 0$. $\overline{A}$ est compact dans $(C^0(E, F), d_\infty)$ donc (Borel Lebesgue) il existe $N \in \mathbb{N}$ et $f_1, \dots, f_N \in \overline{A}$ tels que

$$\overline{A} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N} B_{d_\infty}(f_j, \epsilon).$$

Pour $j = 1, \dots, N$, f_j est continue sur le compact E , donc (Heine) elle est uniformément continue. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F[f_j(x), f_j(y)] < \epsilon, \forall 1 \leq j \leq N.$$

Soient $x, y \in E$ tels que $d_E(x, y) < \delta$ et $f \in A$. Il existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $f \in B_{d_\infty}(f_j, \epsilon)$. Alors

$$d_F[f(x), f(y)] \leq d_F[f(x), f_j(x)] + d_F[f_j(x), f_j(y)] + d_F[f_j(y), f(y)] \leq 3\epsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $f \in A$ donc A est équicontinue. □

Exemple : Pour $M > 0$ et $\alpha \in (0, 1]$, l'ensemble

$$\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \forall x, y \in [0, 1]\}$$

est relativement compact dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Contre-exemple : La bosse glissante.

Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non nulle. Montrer que la suite $(\tau_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue et bornée dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais qu'elle n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Applications :

- Soient X, Y des compacts de $\mathbb{R}^n$ et $K \in C^0(X \times Y, \mathbb{R})$. Pour $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, on définit $Tf : Y \rightarrow \mathbb{R}$ par $Tf(y) := \int_X K(x, y)f(x)dx$. Montrer que $T : C^0(X, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(Y, \mathbb{R})$ et que T est un opérateur compact. (Hirsch Lacombe)
- Pour $0 < \alpha < \beta < 1$, l'injection

$$C^{0, \beta}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^{0, \alpha}([0, 1], \mathbb{R})$$

est compacte (ref : Zuily Queffelec ou Hirsch Lacombe)

Remarque : Si (E, d) est un espace métrique compact et $A \subset C^0(E, F)$ alors EQU :

1. A est équicontinue en tout point :

$$\forall x_0 \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta_{x_0, \epsilon} > 0 \text{ tel que } \forall y \in E, d(x_0, y) < \eta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \epsilon, \forall f \in A.$$

2. A est uniformément équicontinue :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall f \in A.$$

Cela justifie qu'on parle d'"équicontinuité" (au lieu d'"uniforme équicontinuité") dans le théorème d'Ascoli.

Preuve de 1 $\Rightarrow$ 2 : On suppose que A est équicontinue en tout point. Montrons que A est uniformément équicontinue. Soit $\epsilon > 0$. (E, d) est compact donc (Borel Lebesgue) de $\{B(x, \eta_{x,\epsilon}/2); x \in E\}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini de E :

$$E \subset \cup_{1 \leq n \leq N} B(x_n, \eta_n/2) \quad (1.2)$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $\eta_n := \eta_{x_n, \epsilon}$. Soit $\eta := \min\{\eta_n/2; 1 \leq n \leq N\}$ et $x, y \in E$ vérifiant $d(x, y) < \eta$. Par (1.2) existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $d(x, x_j) < \eta_j/2$. Alors

$$\begin{aligned} d(y, x_j) &\leq d(y, x) + d(x, x_j) \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &< \eta + \eta_j/2 < \eta_j, \end{aligned}$$

donc $|f(x) - f(x_j)| < \epsilon$ et $|f(y) - f(x_j)| < \epsilon$ pour tout $f \in A$. Par inégalité triangulaire, on en déduit que $|f(x) - f(y)| < 2\epsilon$ pour tout $f \in A$. $\square$

1.7 Notions topologiques versus notions métriques

Quand on étudie des problèmes de convergence, on s'aperçoit vite que la notion de distance est trop restrictive (par exemple, la topologie de la convergence simple sur la boule unité de $L^\infty(0, 1)$ n'est pas métrisable), ce qui conduit à introduire les espaces topologiques.

Definition 11 $(E, \mathcal{O})$ est un **espace topologique** si $\mathcal{O}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par intersection finie, union quelconque et contient E et $\emptyset$. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont les **ouverts** et leurs complémentaires dans E sont les **fermés**.

Parmi les notions introduites dans les sections précédentes,

- certaines sont des notions **topologiques** : elles requièrent seulement la notion d'**ouvert** pour être définies (remplacer les boules ouvertes par des voisinages ouverts dans les définitions).
- d'autres sont **métriques** : elles requièrent une **distance** pour être définies.

Notions topologiques	Notions métriques
ouvert/fermé	distance
adhérence	boule
intérieur	diamètre
point adhérent / d'accumulation	borné
densité	
suite convergente,	suite de Cauchy
limite	lipschitzien/contractant
continuité	continuité uniforme
compacité	complétude

La caractérisation séquentielle des notions (topologiques) de

- continuité (définie avec des voisinages ouverts)
- compacité (définie par l'hypothèse de séparation et la propriété de Borel-Lebesgue)
- valeur d'adhérence (définie avec des voisinages ouverts)

est valable dans les espaces métriques, mais n'est pas vraie avec des espaces topologiques généraux : il faut une base dénombrable de voisinages de chaque point, voir poly Nier-Iftimie.

1.8 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation :

- toutes les définitions,
- la caractérisation des compacts dans un e.m. (Borel Lebesgue et Bolzano-Weierstrass),
- énoncé et preuve du thm de prolongement des applications uniformément continues,
- énoncé et preuve du thm de point fixe de Banach,
- énoncé du thm d'Ascoli,
- les exercices d'application directe des
 - thm de prolongement des AUC (voir TD),
 - thm de point fixe de Banach (suites récurrentes, voir TD),
 - thm d'Ascoli (fonction M -lipschitziennes, opérateurs intégraux, voir TD).

1.9 Quelques exercices corrigés

1.9.1 Topologie des espaces métriques

Exercice 1.1 : Soit (E, d) un espace métrique.

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérences dans (E, d) est fermé dans (E, d) .
2. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vide de (E, d) et $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.
 - 2.a) Montrer que tout voisinage ouvert de K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.
 - 2.b) Montrer que, si (F, d_F) est un espace métrique et $f : (E, d) \rightarrow (F, d_F)$ est continue alors $f(K) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(K_n)$.
3. Supposons (E, d) compact et que $f : E \rightarrow E$ conserve les distances : $d[f(x), f(y)] = d[x, y]$ pour tous $x, y \in E$.
 - 3.a) Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, on peut construire à partir de $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $f(E)$ qui converge vers x_0 .
 - 3.b) En déduire que f est surjective.
4. Supposons (E, d) compact et que $f : E \rightarrow E$ satisfait $d[f(x), f(y)] \geq d[x, y]$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que f conserve les distances. Qu'en déduire ?

SOLUTION :

1. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Adh}\{x_k; k \geq n\}$. Il est fermé dans (E, d) car intersection (qlq) de fermés de (E, d) .

2.a) Soit V un voisinage ouvert de K dans (E, d) : V est un ouvert de (E, d) et $K \subset V$. Alors $F := E \setminus V$ est un fermé de E . Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $K_n \subset V$.

Par l'absurde, supposons que, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n_1 \geq n_0$, tel que K_{n_1} n'est pas contenu dans V , cad $K_{n_1} \cap F \neq \emptyset$. Comme la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors $K_n \cap F \neq \emptyset$ pour tout $n \leq n_1$, et en particulier pour tout $n \leq n_0$. Ceci est vrai pour tout n_0 donc $K_n \cap F \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $(K_n \cap F)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vide de (E, d) donc (théorème des compacts emboîtés) $\bigcap [K_n \cap F] \neq \emptyset$. Or $\bigcap [K_n \cap F] = (\bigcap K_n) \cap F = K \cap F$ par décroissance des K_n donc $K \cap F \neq \emptyset$: contradiction.

2.b) Il est clair que $f(K) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(K_n)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(K_n)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K_n$ tel que $y = f(x_n)$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans K_0 , qui est compact dans (E, d) , donc il existe une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow a \in K$. En passant à la limite dans la relation $y = f[x_{\varphi(n)}]$ on obtient $y = f(a)$. Ainsi, $y \in f(K)$.

3.a) La suite $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact E donc admet une sous-suite convergente

$(f^{\phi(n)}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $y_n := f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0)$ est à valeurs dans $f(E)$ et

$$\begin{aligned} d[y_n, x_0] &= d[f^{\phi(n)}(y_n), f^{\phi(n)}(x_0)] \text{ car } f \text{ conserve les distances} \\ &= d[f^{\phi(n+1)}(x_0), f^{\phi(n)}(x_0)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ par choix de } \phi. \end{aligned}$$

3.b) La question précédente montre que $E \subset \overline{f(E)}$. Or $f(E)$ est fermé (l'image d'un compact par une application continue est compact, donc fermé) donc $E = \overline{f(E)}$.

4. Soient $x_0 \neq x'_0 \in E$. La suite $(f^n(x_0), f^n(x'_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $E \times E$ donc elle admet une sous-suite $(f^{\phi(n)}(x_0), f^{\phi(n)}(x'_0))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $E \times E$. On a

$$\begin{aligned} d[x_0, x'_0] &\leq d[f(x_0), f(x'_0)] \leq d[f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0), f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x'_0)] \text{ par hypothèse sur } f \\ &\leq d[f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0), x_0] + d[x_0, x'_0] + d[x'_0, f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x'_0)], \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Or,

$$\begin{aligned} d[f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0), x_0] &\leq d[f^{\phi(n+1)}(x_0), f^{\phi(n)}(x_0)] \text{ par hypothèse sur } f \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ car } (f^{\phi(n)}(x_0))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \end{aligned}$$

En passant à la limite $[n \rightarrow \infty]$ dans la relation précédente, on obtient

$$d[x_0, x'_0] \leq d[f(x_0), f(x'_0)] \leq d[x_0, x'_0].$$

On revient ainsi à la question précédente : $f(E) = E$.

1.9.2 Prolongement des applications uniformément continues

Exercice 1.2 : Trouver un contre-exemple au théorème de prolongement des applications uniformément continues, lorsqu'on retire l'hypothèse de complétude pour l'espace d'arrivée.

SOLUTION : $E = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $D = \mathbb{Q}$, $F = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ et $id : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ est uniformément continue, mais n'admet pas de prolongement par continuité $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$.

1.9.3 Théorème du point fixe

Exercice 1.3 : [Contre-exemples et variations sur le point-fixe, cf :Rouvière]

1/Trouver des contre-exemples dans les cas suivants :

1.a/ X em, $F : X \rightarrow X$ contractante mais n'admet pas de point fixe parce que X n'est pas complet.

1.b/ X em complet, F contractante mais n'admet pas de point fixe parce que F n'envoie pas X dans X .

1.c/ X em complet, $F : X \rightarrow X$ mais n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle vérifie $\|F(x) - F(y)\| < \|x - y\|$.

1.d/ X em complet, $F : X \rightarrow X$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.

2) Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (p composée p fois) soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe dans E . Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers a .

SOLUTION : (faire des dessins!)

1.a/ $f(x) = x/2$, $E = (0, 1)$ (ouvert)

1.b/ $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $E = [0, 1]$

1.c/ $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $E = \mathbb{R}$

1.d/ $f(x) = x$, $E = \mathbb{R}$

Exercice 1.4 : [Convergence locale de la méthode de Newton 1D]

Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$ et que pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \neq 0$. Pour $x_0 \in [a, b]$, on définit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- 1/ Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.
- 2/ Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq C|x_n - \tilde{x}|^2$ (convergence quadratique).
- 3/ En déduire que $C|x_n - \tilde{x}| \leq (C|x_0 - \tilde{x}|)^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION :

1/ L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \Phi : & [a, b] & \rightarrow [a, b] \\ & x & \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right|$$

est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $\Phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ pour tout $x \in [a, b]$. En particulier, $\Phi'(\tilde{x}) = 0$. Par continuité de Φ' , il existe $\epsilon > 0$ tel que $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$. Alors (inégalité des accroissements finis), Φ envoie $[\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ sur lui-même et est contractante sur cet intervalle. Le théorème du point fixe justifie que, pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.

2/ On a

$$x_{n+1} - \tilde{x} = x_n - \tilde{x} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)} (f(\tilde{x}) - f(x_n) - f'(x_n)(\tilde{x} - x_n))$$

donc l'inégalité des accroissements finis fournit la conclusion avec $C := \frac{\|f''\|_{L^\infty(a,b)}}{2\delta}$ où $\delta := \inf\{|f'(y)|; y \in [a, b]\}$ est > 0 (fonction > 0 et continue sur un compact).

3/ En multipliant pas C des 2 cotés, on obtient $C|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq (C|x_n - \tilde{x}|)^2$ d'où la conclusion (récurrence immédiate).

Exercice 1.5 : [Méthode des approximations successives]

On souhaite calculer $\tilde{x}$ vérifiant $f(\tilde{x}) = 0$. On remplace $f(\tilde{x}) = 0$ par $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$ avec par exemple $F(x) = f(x) - x$. On utilise alors une suite récurrente du type

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Les exemples suivants présentent différents comportements possibles pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (convergence globale, convergence locale, pas de convergence).

1/ [Théodor] On souhaite calculer une valeur approchée de la solution positive $\tilde{x}$ de $x - \ln(1+x) - 0,2 = 0$ à l'aide des termes de la suite

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = \ln(x_n + 1) + 0,2 \end{cases}$$

Montrer qu'il y a convergence globale (ie : pour tout $x_0 > 0$ la suite converge vers $\tilde{x}$) et que la convergence est géométrique.

2/ [Demailly, p96] On souhaite calculer une valeur approchée des racines du polynôme $X^3 - 4X + 1$ à l'aide des termes de la suite

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n^3 + 1). \end{cases}$$

Montrer que cette méthode ne permet d'approcher qu'une racine et que la convergence est locale (ie : x_0 doit être assez proche de cette racine). Proposer une autre fonction F pour approcher les autres racines.

SOLUTION :

1/ La fonction $f(x) := \ln(x+1) + 0,2$ satisfait $f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$ pour tout $x \geq 0$. Attention, la dérivée tend vers 1 quand $[x \rightarrow 0]$ donc il faut rester à distance > 0 de $x = 0$ pour avoir de la contraction. On a $f(0) = 0,2 > 0$ donc il existe $\delta \in (0, x_0)$ tel que $f(\delta) > \delta$. Alors $f : [\delta, \infty) \rightarrow [\delta, \infty)$ est $\frac{1}{1+\delta}$ -contractante et le thm du point fixe s'applique.

2/ La fonction $g(x) := x^3 - 4x + 1$ change de monotonie en $x = \pm\sqrt{4/3}$, elle tend vers $-\infty$ quand $[x \rightarrow -\infty]$, elle est > 0 en $x = -\sqrt{4/3}$, < 0 en $x = \sqrt{4/3}$ et tend vers $+\infty$ quand $[x \rightarrow +\infty]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle admet donc 3 zéros x_1, x_2, x_3 tels que $-\infty < x_1 < -\sqrt{4/3} < x_2 < \sqrt{4/3} < x_3 < \infty$.

Notons $f(x) := \frac{x^3+1}{4}$. Pour répondre à la question, on doit évaluer $f'(x_j)$ pour $j = 1, 2, 3$. Or, $f'(x) = \frac{3x^2}{4}$ et $f'(\pm\sqrt{4/3}) = 1$ donc $f'(x_1) > 1$, $0 \leq f'(x_2) < 1$ et $f'(x_3) > 1$. La méthode proposée ne permet d'approcher que x_2 . Pour approcher x_1 et x_3 , on peut itérer f^{-1} (dont la dérivée est nécessairement < 1 en ces points).

Voir le chapitre suivant pour d'autres applications du théorème de point fixe.

1.9.4 Théorème d'Ascoli

Exercice 1.6 : L'objectif est de démontrer le théorème de Cauchy-Arzela-Peano.

Théorème : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$ continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe $T > 0$ et une fonction $x \in C^1((t_0 - T, t_0 + T), \mathbb{R}^n)$ solution de

$$(\Sigma) \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \forall t \in (t_0 - T, t_0 + T), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Pour cela, on admettra le *Théorème de point fixe de Schauder : Soit E un Banach, K un convexe fermé non vide de E et $\Phi : K \rightarrow K$ continue telle que $\overline{\Phi(K)}$ est compact dans E . Alors il existe $x \in K$ tel que $\Phi(x) = x$.*

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$

1) Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que toute solution de (Σ) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ soit à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$. Alors $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ est appelé compact de sécurité pour (Σ) .

2) Soit $E := C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r_0))$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $x \in E$, on définit

$$\Phi(x) : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ par } \Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

2.a) Montrer que Φ est bien définie et à valeurs dans E .

2.b) Conclure.

SOLUTION

1) Soit $T_0 > 0$ tel que $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$. f est continue sur le compact $C_0 := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ donc il existe $M > 0$ tel que $|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in C_0$. Soit $T := \min\{T_0; r_0/M\}$, x solution de (Σ) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ et

$$\tau := \sup\{t \in [t_0, t_0 + T]; \|x(t) - x_0\| \leq r_0\}.$$

Par l'absurde, supposons que $\tau < T$. Alors

$$r_0 = \|x(\tau) - x_0\| = \left\| \int_0^\tau f(s, x(s)) ds \right\| \leq \tau M < TM \leq r_0 \quad : \text{contradiction}.$$

En conclusion, $\tau = T$ cad $x(t) \in \overline{B}(x_0, r_0)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

2) Pour $x \in E$, $\Phi(x)$ est bien définie car $C \subset I \times \Omega$, continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ par convergence dominée, à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$ car $MT \leq r_0$.

3) On applique le thm de point fixe de Schauder à Φ avec $E = K$. On prouve que $\overline{\Phi(E)}$ est compact dans $C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r_0))$ grâce au thm d'Ascoli.

- $[t_0 - T, t_0 + T]$ est compact, $\overline{B}(x_0, r_0)$ est complet, $\Phi(E) \subset C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r_0))$
- pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\Phi(E)(t)$ est relativement compact car $\subset \overline{B}(x_0, r_0)$
- $\Phi(E)$ est équicontinu car, pour tous $t_1, t_2 \in [t_0 - T, t_0 + T]$ et $y \in E$

$$\|\Phi(y)(t_1) - \Phi(y)(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s)) ds \right\| \leq M|t_1 - t_2|.$$

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

Dans cette section, E est un ev sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Normes

2.1.1 Définition

Définition 12 (Norme, evn) Une *norme* sur E est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

- (N1) : $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$
- (N2) : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$,
- (N3) : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ [inégalité triangulaire].

Alors $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (evn).

Il résulte de l'inégalité triangulaire que $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne sur E , donc continue :

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in E.$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn alors $d : (x, y) \in E \times E \rightarrow \|x - y\| \in \mathbb{R}_+$ est une distance sur E . Tous les résultats établis au Chapitre 1, pour les e.m., s'appliquent donc, en particulier, aux evn. Mais les evn jouissent de propriétés supplémentaires qui font l'objet des sections ultérieures.

Exemples :

- $E = \mathbb{R}^n, \|\cdot\| = \|\cdot\|_p, p \in [1, \infty]$.
- $E = l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ou $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (suites à support fini), $\|x\|_p := (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$.
- $E = l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ou $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\|x\|_\infty := \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$.
- $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|; t \in [0, 1]\}$, $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, p \in [1, \infty)$.
- $E = C^k([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f\| := \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty$.

Remarque 2 ($\mathcal{L}^p((0, 1), \mathbb{R}), \|\cdot\|_p$) n'est pas un espace vectoriel normé car $\|\cdot\|_p$ est seulement une semi-norme : $\|f\|_p = 0$ ssi $f = 0$ p.p. Pour obtenir un evn, il faut quotienter par la relation d'équivalence définie par l'égalité p.p.

Preuve de l'inégalité triangulaire dans $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: Elle est évidente pour $p = 1$ et $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Soit $p' \in (1, \infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Étape 1 : Inégalité de Hölder. Par concavité du $\ln$ on a (faire un dessin)

$$\ln(xy) = \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{p'} \ln(y^{p'}) \leq \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}\right), \forall x, y \in (0, \infty),$$

donc, par croissance de $\exp$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}, \forall x, y \in (0, \infty).$$

On en déduit que, pour $x \in l^p$ et $y \in l^{p'}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|}{\|x\|_p} \frac{|y_n|}{\|y\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} = 1$$

cad

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

Étape 2 : Inégalité de Minkowski. Pour $x, y \in l^p$, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\ &\leq \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p} \right] \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^{p'(p-1)} \right)^{1/p'} \text{ par Hölder} \\ &\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p/p'} \text{ car } p'(p-1) = p \end{aligned}$$

Comme $p - \frac{p}{p'} = 1$, on en déduit que $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. □

Exercice : Démontrer l'inégalité triangulaire dans $(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

2.1.2 Normes équivalentes

Definition 13 (Normes équivalentes) Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E sont équivalentes s'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq C_2 \|x\|, \forall x \in E.$$

Théorème 3 Sur un $\mathbb{R}$ -evn normé $(E, \|\cdot\|)$ **de dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve : On peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$ (construire une bijection entre E et $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une base). Montrons que toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}(x) := \sup\{|x_k|; 1 \leq k \leq n\}$. Rappelons que les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ sont les fermés bornés (cela se déduit de la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$ et du fait qu'un produit cartésien de compacts est compact pour la topologie produit). En particulier la sphère unité $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_{\infty} = 1\}$ est compacte dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$.

Étape 1 : Montrons que $\|\cdot\|$ est continue (pour la topologie de $\|\cdot\|_{\infty}$). Pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \|x + h\| - \|x\| \right| \leq \|h\| = \left\| \sum_{k=1}^n h_k e_k \right\| \leq \|h\|_{\infty} M \text{ où } M := \sum_{k=1}^n \|e_k\|,$$

ainsi $\|\cdot\|$ est M-lipschitzienne $(E, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ donc continue.

Étape 2 : Argument de compacité. L'application $\|\cdot\| : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue et > 0 sur le compact $\mathcal{S}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier $C_1 := \min\{\|x\|; x \in \mathcal{S}\}$ est un réel > 0 . Alors

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_{\infty}} \right\|, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

donc, par le 2e axiome de norme

$$C_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n. \square$$

Corollaire 1 Dans un evn de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

Preuve : Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et deux normes équivalentes ont les mêmes ensembles compacts. $\square$

Proposition 14 Dans un evn $(E, \|\cdot\|_E)$, tout sev F de dimension finie est fermé.

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de F qui converge dans $(E, \|\cdot\|)$ vers $a \in E$. Alors elle est bornée dans $(F, \|\cdot\|)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $(F, \|\cdot\|)$ vers $b \in F$. L'unicité de la limite de $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ implique $a = b \in F$. $\square$

Contre-exemples en dimension infinie :

- Pour $1 \leq p < q \leq \infty$, $l^p \subset l^q$ avec injection continue : $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$. En effet $\|\cdot\|_q^q \leq \|\cdot\|_\infty^{q-p} \|\cdot\|_p^p \leq \|\cdot\|_p^q$. Mais $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ ne sont pas équivalentes sur $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, car il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_p \leq C \|\cdot\|_q$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_p \leq C \|\cdot\|_q$. En appliquant cette inégalité à $x := (1_{[1,n]}(k))_{k \in \mathbb{N}}$, on obtient $n^{1/p} \leq C n^{1/q}$. Or $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ donc l'asymptotique $[n \rightarrow \infty]$ fournit une contradiction.
- Pour $1 \leq p < q \leq \infty$, $L^q(0,1) \subset L^p(0,1)$ avec injection continue : $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$. En effet, pour $f \in L^q(0,1)$, l'inégalité de Hölder montre que

$$\|f\|_p^p := \int_0^1 |f(x)|^p dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^1 1^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} = \|f\|_q^p$$

avec $r := \frac{q}{p} \in (1, \infty)$ et $r' \in (1, \infty)$ tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Mais $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ ne sont pas équivalentes sur $L^q(0,1)$ car il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_q \leq C \|\cdot\|_p$.

Montrons le pour $p = 1$ et $q = \infty$. Il suffit de considérer la suite de fonctions 'triangle' $f_n(x) = (1 - nx)1_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$, qui satisfait $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$. Ou la suite de fonctions $g_n(x) := x^n$ qui satisfait $\|g_n\|_\infty \equiv 1$ et $\|g_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$.

Exercice : Traiter le cas général $1 \leq p < q \leq \infty$.

Exercice : Montrer que, pour tout $f \in L^\infty(0,1)$ alors $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$.

- Pour $1 \leq p < q \leq \infty$, il n'y a pas d'inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ et aucune des inégalités $\|\cdot\|_p \leq C \|\cdot\|_q$ ou $\|\cdot\|_q \leq C \|\cdot\|_p$ n'est vraie sur $L^p \cap L^q(\mathbb{R})$.
Montrons-le pour $p = 1$ et $q = 2$: On a $\frac{1}{x} 1_{[1, \infty)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $\notin L^1(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} 1_{(0,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ mais $\notin L^2(\mathbb{R})$ donc il n'y a pas d'inclusion. De plus, $f_n := \frac{1}{n} 1_{[0,n]}(x) \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$ car $\|f_n\|_{L^1} = 1$ et $g_n := \sqrt{n} 1_{[0,1/n]}(x) \rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$ car $\|g_n\|_{L^2} = 1$. Ainsi $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$.

2.2 Théorème de Riesz

Théorème 4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -evn. Il y a équivalence entre les énoncés suivants :

1. E est de dimension finie,
2. la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|)$ est compacte : de toute suite bornée de E on peut extraire une sous-suite convergente.

Preuve : Supposons $\mathcal{B} := \overline{B_E}(0, 1)$ compacte. Alors du recouvrement ouvert $\mathcal{B} \subset \cup_{x \in \mathcal{B}} B_E(x, 1/2)$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $\mathcal{B} \subset \cup_{1 \leq j \leq N} B_E(x_j, 1/2)$. Montrons que $F := \text{Vect}\{x_1, \dots, x_N\}$ coïncide avec E . Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in E \setminus F$. Comme F est fermé, il existe $y \in F$ tel que $d := \text{dist}(x, F) = \|x - y\| > 0$ (fonction continue sur un compact). Alors $\frac{x-y}{d} \in \mathcal{B}$ donc il existe $1 \leq j \leq N$ tel que $\|\frac{x-y}{d} - x_j\| < \frac{1}{2}$. Ainsi $y + dx_j \in F$ et $\|x - (y + dx_j)\| < \frac{d}{2}$: contradiction. $\square$

Notez que la structure d'ev et la présence d'une norme (homogénéité) sont cruciales dans cette preuve (une distance ne suffirait pas).

Exemple de suite bornée dans un evn de dimension infinie qui n'admet pas de sous-suite convergente : Considérons $E = L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$, muni de la norme

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

et $f_n(t) := e^{int}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(L^2(0, 2\pi), \|\cdot\|_2)$ est un evn et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $(L^2(0, 2\pi), \|\cdot\|_2)$. Montrons qu'elle n'admet pas de sous-suite convergente dans $(L^2(0, 2\pi), \|\cdot\|_2)$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une extraction ϕ et $f \in L^2(0, 2\pi)$ tels que $\|f_{\phi(n)} - f\|_2 \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$. Alors

$$\|f\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{\phi(n)}\|_2 = 1,$$

donc, par le Lemme de Riemann Lebesgue,

$$\begin{aligned} \|f_{\phi(n)} - f\|_2^2 &= \|f_{\phi(n)}\|_2^2 + 2\Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\phi(n)t} dt \right) + \|f\|_2^2 \\ &= 2 + \Re \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\phi(n)t} dt \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2 : \text{contradiction.} \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 3 Lorsque E est de dimension infinie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E , alors (f_n) n'admet pas nécessairement une sous-suite qui converge pour la topologie forte de E (celle de la norme $\|\cdot\|_E$). Mais, pour un espace E convenable ('Banach réflexif'), on peut construire une autre topologie sur E , appelée 'topologie faible', telle que toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement. Cette convergence, bien que plus faible, est parfois suffisante dans les applications. Nous la définirons précisément ultérieurement dans le cadre particulier d'un espace de Hilbert. Par exemple, la suite f_n , définie ci-dessus, converge faiblement vers 0 dans $L^2(0, 2\pi)$.

2.3 Espaces de Banach

Définition 14 (Espace de Banach) *Un espace de Banach est un evn complet.*

Exemples :

- $\mathbb{R}$ est complet (passer par la compacité des fermés bornés) et donc tout ev de dimension finie est complet (quelle que soit la norme considérée).
- Pour $p \in [1, \infty]$, $(l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est complet.
- Pour $p \in [1, \infty]$, $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est complet (voir cours d'intégration).
- Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn et $(F, \|\cdot\|_F)$ un Banach. L'espace $C_b^0(E, F) := \{f : E \rightarrow F \text{ continue et bornée}\}$, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_F; x \in E\}$$

est un Banach. Notez que seule la complétude de l'espace d'arrivée F importe (l'espace de départ E n'a pas besoin d'être complet).

Preuve de la comp  tude de $(l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$: Soit $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 = k_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|x^k - x^j\|_{l^p} < \epsilon, \forall j, k > k_0.$$

C'est à dire,

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^j|^p < \epsilon^p, \forall j, k > k_0 \quad \text{lorsque } p < \infty, \quad (2.1)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } |x_n^k - x_n^j| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}, j, k > k_0 \quad \text{lorsque } p = \infty. \quad (2.2)$$

  tape 1 : Convergence $[k \rightarrow \infty]$ du terme général. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous $k, j \in \mathbb{N}$, on a $|x_n^k - x_n^j| \leq \|x^k - x^j\|_{l^p}$ donc la suite $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, elle converge.

Notons $x_n^\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

  tape 2 : Montrons que $x^\infty \in l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et que $\|x^p - x^\infty\|_{l^p} \rightarrow 0$ quand $[p \rightarrow \infty]$. Soit $\epsilon > 0$, $k_0 = k_0(\epsilon)$ fourni par l'hypothèse de Cauchy et $k > k_0$. Si $p < \infty$, on fait $[j \rightarrow \infty]$ dans (2.1) en utilisant le Lemme de Fatou

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^\infty|^p = \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{j \rightarrow \infty} |x_n^k - x_n^j|^p \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^j|^p < \epsilon^p.$$

Ceci montre à la fois que $x^\infty \in l^p$ (espace vectoriel) et que $x^k \rightarrow x^\infty$ dans l^p , c'est-à-dire $\|x^k - x^\infty\|_{l^p} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Si $p = \infty$, on fait $[j \rightarrow \infty]$ dans (2.2)

$$|x_n^k - x_n^\infty| = \lim_{j \rightarrow \infty} |x_n^k - x_n^j| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ceci montre à la fois que $x^\infty \in l^\infty$ (espace vectoriel) et que $x^k \rightarrow x^\infty$ dans l^∞ c'est-à-dire $\|x^k - x^\infty\|_{l^\infty} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$

Alternative    Fatou : on peut aussi manipuler des sommes finies pour éviter les problèmes de passage à la limite dans la somme infinie. Soit $\epsilon > 0$, $k_0 = k_0(\epsilon)$ fourni par l'hypothèse de Cauchy et $k > k_0$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $j > k_0$, on a

$$\sum_{n=0}^N |x_n^k - x_n^j|^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^j|^p < \epsilon^p.$$

On peut passer à la limite $[j \rightarrow \infty]$ dans le premier terme, car il s'agit une somme FINIE, ainsi

$$\sum_{n=0}^N |x_n^k - x_n^\infty|^p \leq \epsilon^p.$$

Ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$ donc (la somme d'une série de termes positifs est la borne supérieure de ses sommes partielles)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^\infty|^p \leq \epsilon^p.$$

Ceci montre à la fois que $x^\infty \in l^p$ (espace vectoriel) et que $x^k \rightarrow x^\infty$ dans l^p . $\square$

Preuve de la compétude de $(C_b^0(E, F), \|\cdot\|_\infty)$: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(C_b^0(E, F), \|\cdot\|_\infty)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application $E \rightarrow F$ continue bornée et

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|f_n - f_p\|_\infty < \epsilon, \forall n, p > n_0.$$

Étape 1 : Convergence ponctuelle $[n \rightarrow \infty]$. Soit $x \in E$. On a

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \|f_n - f_p\|_\infty < \epsilon, \forall n, p > n_0(\epsilon) \quad (2.3)$$

donc $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Comme $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. On obtient ainsi une application $f : E \rightarrow F$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **simplement** vers f .

Étape 2 : Montrons que $f \in C_b^0(E, F)$ et que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$. Soit $\epsilon > 0$ et $n > n_0(\epsilon)$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_p(x)\|_F < \epsilon$$

grâce à (2.3). Ainsi, $(f_n - f)$ est bornée et $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ pour tout $n > n_0(\epsilon)$. Ceci montre que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$. Il en résulte que $f \in C_b^0(E, F)$ (une limite uniforme d'applications continues et bornées est continue et bornée). $\square$

La méthode utilisée dans ces 2 preuves est très générale et doit être connue ! Exercez-vous en montrant la complétude des espaces suivants :

- $(C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, l'ensemble des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui tendent vers zéro à l'infini
- $\mathcal{L}_c(E, F)$ où $(E, \|\cdot\|_E)$ est un evn et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un Banach.

Contre-exemples :

- Pour $p \in [1, \infty]$, $(c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, n'est pas complet car $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. (rappelons que dans un e.m. complet, les sous-espaces complets sont les sous-espaces fermés). En effet la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ définie par $x^k = \left(\frac{1_{[0, k]}(n)}{(n+1)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $l^p(\mathbb{N})$ vers x^∞ qui n'est pas à support fini.
Exercice : Quel est le complété de $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_p$?
- Pour $p \in [1, \infty)$, $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ n'est pas complet car $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $(L^p(0, 1), \|\cdot\|_p)$.

2.4 Séries dans les evn

Définition 15 (Convergence absolue et critère de Cauchy des séries dans un evn) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E . La série $\sum x_n$ **converge (CV)** si la suite $(\sum_{k=0}^n x_k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge :

$$\exists L \in E \text{ tel que } \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\| \sum_{k=0}^n x_k - L \right\| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

La série $\sum x_n$ est **absolument/normalement convergente (ACV)** si $\sum_{n=0}^\infty \|x_n\| < \infty$.
La série $\sum x_n$ satisfait le **critère de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right\| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0, p \in \mathbb{N}.$$

La convergence d'une série est une notion topologique : elle ne requiert que la notion d'ouvert. Le caractère de Cauchy est une notion métrique : elle requiert la notion de distance. En revanche, la convergence normale est spécifique aux espaces normés.

Proposition 15 1. Dans un evn, une série convergente est de Cauchy.

2. Dans un evn, une série de Cauchy tend vers zero : $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

3. Un evn est complet ssi toute série de Cauchy converge.

4. Dans un **Banach**, ACV $\Rightarrow$ CV. La réciproque est fausse.

5. Soit E Banach, $\sum x_n$ ACV et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective. Alors $\sum x_{\sigma(n)}$ est ACV et $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (sommabilité commutative). On peut alors noter $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ sa somme (cette notation n'indique pas d'ordre de sommation).

Attention à ne pas confondre les notations $\sum x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$:

- $\sum x_n$ désigne la série de terme général x_n ,
- $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ désigne la somme de cette série, lorsqu'elle converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x_n,$$

et l'ordre sur $\mathbb{N}$ est très important dans cette définition,

- la notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est réservée aux séries commutativement convergentes : la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme les termes

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x_{\sigma(n)}, \forall \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijective.}$$

Preuve :

3. Pour passer d'une suite de Cauchy (x_n) à une série $\sum y_n$ de Cauchy, on définit $y_n := x_{n+1} - x_n$.

4. Passer par le critère de Cauchy. Contre-exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (critère des séries alternées), mais ne converge pas absolument.

5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E telle que la série $\sum x_n$ CVA et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

Pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^K \|x_{\sigma(k)}\| = \sum_{n \in \sigma([0, K])} \|x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

donc la série $\sum x_{\sigma(k)}$ CVA.

Notons $L := \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Soit $\epsilon > 0$. On cherche $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| \sum_{n=0}^K x_{\sigma(k)} - L \right\| < \epsilon, \quad \forall K \geq K_0.$$

Par convergence de $\sum x_n$ et $\sum \|x_n\|$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| \sum_{n=0}^{N_0} x_n - L \right\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n > N_0} \|x_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme σ est une bijection de $\mathbb{N}$, l'entier $K_0 := \min\{K \in \mathbb{N}; [0, N_0] \subset \sigma([0, K])\}$ est bien défini. Alors, pour tout $K \geq K_0$, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^K x_{\sigma(k)} - L \right\| = \left\| \sum_{n \in \sigma([0, K])} x_n - L \right\| \leq \left\| \sum_{n=0}^{N_0} x_n - L \right\| + \sum_{n \in \sigma([0, K]) \setminus [0, N_0]} \|x_n\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \square$$

Contre-exemple : Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = y$.

Preuve : On somme des termes > 0 , $S_p := \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k}$ jusqu'à ce que $S_{p_0-1} \leq y < S_{p_0}$. Puis on somme des termes < 0 : $S_{p_0+q} := \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{2k} - \sum_{j=0}^q \frac{1}{2j+1}$ jusqu'à ce que $S_{p_0+q_0} < y \leq S_{p_0+q_0-1}$. Puis on remet des termes > 0 , $S_{p_0+q_0+p} := \sum_{k=1}^{p_0+p} \frac{1}{2k} - \sum_{j=0}^{q_0} \frac{1}{2j+1}$ jusqu'à ce que $S_{p_0+q_0+p_1-1} \leq y < S_{p_0+q_0+p_1}$...etc.

On peut également démontrer le résultat suivant (plus délicat).

Proposition 16 *Soit E un $\mathbb{R}$ -evn de dimension finie et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . Il y a équivalence entre*

1. la **série** $\sum \|x_n\|$ converge,
2. pour toute application $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective, la **série** $\sum x_{\phi(n)}$ converge.

2.5 Séparabilité

On rappelle qu'une suite est nécessairement indexée par $\mathbb{N}$, alors qu'une famille peut être indexée par un ensemble quelconque d'indice, possiblement non dénombrable.

Définition 16 (séparabilité, famille totale) *Un e.m. (E, d) est **séparable** s'il existe une partie D de E dénombrable et dense dans (E, d) .*

*Dans un evn $(E, \|\cdot\|)$, une famille $(f_j)_{j \in J}$ est une **famille totale de E** si $\text{Vect}_{\mathbb{K}}\{f_j; j \in J\}$ est dense dans E .*

Notez que $\text{Vect}_{\mathbb{K}}\{f_j; j \in J\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires FINIES de vecteurs f_j et que son adhérence n'a pas forcément de caractérisation en terme de série.

Si $(f_j)_{j \in J}$ est une famille totale de $(E, \|\cdot\|)$, alors, pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que $\|x - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est une combinaison linéaire finie des vecteurs $\{f_j; j \in J\}$: $x_n = \sum_{j \in J_n} x_n^j f_j$ où J_n est une partie finie de J et $x_n^j \in \mathbb{R}$ pour tout $j \in J_n$ et $n \in \mathbb{N}$. Mais il n'y a pas forcément de lien entre x_n^j et x_{n+1}^j . La suite $(x_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$ peut très bien ne pas être stationnaire.

Exemples :

- $\mathbb{R}^n$ est séparable car $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^n$.
- Pour $p \in [1, \infty)$, $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est séparable car $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et dense dans $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille totale de $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
- $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, muni de $\|\cdot\|_{\infty}$ est séparable (mm partie dénombrable dense et mm famille totale).
- Lorsque (E, d) est un espace métrique compact alors $C^0(E, \mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_{\infty}$ est séparable. Voir [Hirsch-Lacombe page 25] pour la preuve dans le cas général. Lorsque $E = [0, 1]$, alors $\mathbb{Q}[X]$ est dense dans $C^0([0, 1])$, grâce au théorème de Weierstrass.

Pour montrer qu'un espace n'est pas séparable, on utilise souvent le lemme suivant.

Lemme 1 Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. S'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j \in J}$ d'ouverts de E , non vide et deux à deux disjoints, alors E n'est pas séparable.

Preuve : Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E dense dans $(E, \mathcal{O})$. Alors, pour tout $j \in J$, il existe $n_j \in \mathbb{N}$ tel que $g_{n_j} \in O_j$. Comme les O_j sont 2 à 2 disjoints, alors $j \in J \mapsto n_j \in \mathbb{N}$ est injective, ce qui contredit la non-dénombrabilité de J . $\square$

Exemples d'espaces non séparables :

- $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{l^\infty}(1_A, 1/2); A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.
- $L^\infty((0, 1), \mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{L^\infty((0,1))}(1_{[0,a]}, 1/2); a \in (0, 1)\}$.
- $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f_a, 1/2); a \in (0, 1)\}$ où $f_a(x) := \sin(ax)$ avec $a \in (0, 1)$. Pour $a \neq a' \in (0, 1)$, on peut exhiber $x \in \mathbb{R}$ tel que $|f_a(x) - f_{a'}(x)| \geq 1$ en considérant le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + \frac{a}{a'}\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. On peut aussi considérer la famille $B_{L^\infty(\mathbb{R})}(\varphi_A, 1/2); A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ où $\varphi_A(x) = \sum_{a \in A} (1 - |x - a|)_+$ (faire une dessin).

Preuve de la non dénombrabilité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: On peut utiliser l'argument de la diagonale de Cantor (qui permet aussi de démontrer la non dénombrabilité de $[0, 1]$). Pour toute partie dénombrable D , de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on va construire un élément B de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'appartient pas à D , ce qui fournit la conclusion. Notons $D := \{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ où $A_n \subset \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit $B := \{n \in \mathbb{N}; n \notin A_n\}$. Alors B est une partie de $\mathbb{N}$ et $B \neq A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $B \notin D$. $\square$

Proposition 17 Un evn $(E, \|\cdot\|)$ est séparable si et seulement si il admet une famille totale dénombrable formée de vecteurs linéairement indépendants.

On rappelle que des vecteurs $\{f_j, j \in J\}$ en quantité infinie sont linéairement indépendants si toute combinaison linéaire FINIE des f_j ayant une somme nulle a tous ses coefficients nuls.

Preuve : Un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie est toujours séparable. Considérons donc un evn $(E, \|\cdot\|)$ de dimension infinie sur $\mathbb{K}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $(E, \|\cdot\|)$ admette une famille totale dénombrable formée de vecteurs linéairement indépendants $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considérons $D := \text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $D := \text{Vect}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors D est dénombrable et dense dans E .

$\Rightarrow$ Supposons que E est séparable. Soit $D = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de E et dense dans $(E, \|\cdot\|)$. Quitte à ré-indexer, on peut supposer que $a_0 \neq 0$. On définit par récurrence une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers de la façon suivante : $n_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n_k := \min\{n > n_{k-1}; a_n \neq 0 \text{ et } (a_{n_0}, \dots, a_{n_{k-1}}, a_n) \text{ est libre}\}$. Notez que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, n_k est bien défini car E est de dimension infinie. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Vect}\{a_n; 0 \leq n \leq n_k\} = \text{Vect}\{a_{n_j}; 0 \leq j \leq k\}$, donc $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable et totale de $(E, \|\cdot\|)$. $\square$

On verra plus tard qu'un des intérêts des Banach séparables est que leur topologie faible (sur la boule unité) est métrisable : la topologie faible entre alors dans le cadre sécurisant des topologies d'espaces métriques, ou les propriétés de compacité, continuité, adhérence ont une caractérisation séquentielle.

2.6 Au programme de l'interrogation

En interrogation, sont exigibles

- toutes les définitions,

- énoncé et preuve du thm d'équivalence des normes en dim finie + exos d'application directe,
- preuve de la non équivalence des normes d'espaces fonctionnels (celles faites en cours),
- énoncé et preuve du thm de Riesz,
- la preuve classique de complétude : pour l^p , $C_b^0(E, F)$, $\mathcal{L}_c(E, F)$,...

2.7 Quelques exercices corrigés

2.7.1 Manipulations de normes

Exercice 2.1 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|}, \quad \forall x, y \in E \setminus \{0\}.$$

SOLUTION : Il est équivalent de montrer que (faire un dessin)

$$\left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \leq 2\|x - y\|, \quad \forall x, y \in E \setminus \{0\}.$$

L'inégalité triangulaire justifie

$$\begin{aligned} \left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| &\leq \|x - y\| + \left\| y - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \\ &\leq \|x - y\| + \left| 1 - \frac{\|x\|}{\|y\|} \right| \|y\| \\ &\leq \|x - y\| + \left| \|y\| - \|x\| \right| \\ &\leq 2\|x - y\|. \end{aligned}$$

Exercice 2.2 : Le but de cet exercice est de démontrer le théorème [cf Rouvière]

Théorème : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace-vectoriel normé. EQU :

(A) E est de dimension finie

(B) toutes les normes sur E sont équivalentes.

1/ Montrer que (A) implique (B).

2/ Donner un contre-exemple en dimension infinie.

3/ Le but de cette question est de montrer que (B) implique (A).

3.a/ Supposons (B). Montrer que toute forme linéaire sur E est continue.

Indication : considérer $\|x\| + |f(x)|$ où f est une forme linéaire.

3.b/ Montrer que, sur tout espace de dimension infinie, il existe une forme linéaire non continue.

3.c/ Conclure.

SOLUTION :

1/ Reproduire la preuve du cours.

2/ Sur $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes : il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_\infty \leq C\|\cdot\|_1$ car $\|t^n\|_\infty = 1$ et $\|t^n\|_1 = 1/(n+1)$.

3.a/ Soit f une forme linéaire sur E . $N(x) := \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E (vérifier les 3 axiomes). Par hypothèse (B), il existe $M > 0$ telle que $N(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$. Alors $|f(x)| \leq (M-1)\|x\|$ pour tout $x \in E$ donc f est continue.

3.b/ Soit E un espace de dimension infini et $(e_i)_{i \in I}$ une base algébrique de E (Zörn). Soit $I' = \{i_k; k \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de I . On définit une forme linéaire f sur E par l'image de la base $(e_i)_{i \in I} : f(e_j) = 0$ si $j \notin I'$ et $f(e_j) = n\|e_j\|$ si $j = i_n \in I'$. Alors f n'est pas continue sur E .

Exercice 2.3 : On considère le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $E := \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$, muni de

$$N_0(a + b\sqrt{2}) := |a + b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_\infty(a + b\sqrt{2}) := \max\{|a|, |b|\}.$$

- 1/ Vérifier que N_0 et N_∞ sont des normes sur E .
- 2/ Soit $x := \sqrt{2} - 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $a_nb_n < 0$.
- 3/ En déduire que $(\sqrt{2} + 1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.
- 4/ Montrer que N_0 et N_∞ ne sont pas équivalentes sur E .
- 5/ Commenter. (ref : Treves, Topological vector spaces, distributions and kernels)

SOLUTION :

- 1/ Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale pour N_∞ :

$$\begin{aligned} N_\infty(a + a' + (b + b')\sqrt{2}) &= \max\{|a + a'|; |b + b'|\} \\ &\leq \max\{|a| + |a'|; |b| + |b'|\} \\ &\leq \max\{|a|; |b|\} + \max\{|a'|; |b'|\} \\ &\leq N_\infty(a + b\sqrt{2}) + N_\infty(a' + b'\sqrt{2}). \end{aligned}$$

- 2/ Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. C'est clair pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie au rang n . On a

$$(\sqrt{2} - 1)^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$$

où $a_{n+1} = (2b_n - a_n)$ et $b_{n+1} = (a_n - b_n)$. Alors

$$a_{n+1}b_{n+1} = (2b_n - a_n)(a_n - b_n) = 3a_nb_n - a_n^2 - 2b_n^2$$

est < 0 comme somme de 3 termes < 0 .

- 3/ Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. C'est clair pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie au rang n . On a

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + 1)^{n+1} &= (|a_n| + |b_n|\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1) = (2|b_n| + |a_n|) + \sqrt{2}(|a_n| + |b_n|), \\ |a_{n+1}| &= |2b_n - a_n| = 2|b_n| + |a_n| \quad \text{et} \quad |b_{n+1}| = |a_n - b_n| = |a_n| + |b_n| \end{aligned}$$

car a_n et b_n sont de signes opposés.

- 4/ Par l'absurde, supposons qu'il existe $C > 0$ telle que $N_\infty \leq CN_0$. Alors

$$\max\{|a_n|; |b_n|\} = N_\infty[(\sqrt{2} - 1)^n] \leq CN_0[(\sqrt{2} - 1)^n] = C|\sqrt{2} - 1|^n \rightarrow 0.$$

Or,

$$\max\{|a_n|; |b_n|\} = N_\infty[(\sqrt{2} + 1)^n] \geq \frac{1}{1 + \sqrt{2}}|\sqrt{2} + 1|^n \rightarrow \infty : \text{contradiction.}$$

5/ E est clairement un espace vectoriel de dimension finie, $= 2$, sur $\mathbb{Q}$. Mais ses normes ne sont pas toutes équivalentes. Ainsi l'énoncé '*Sur un $\mathbb{R}$ -evn normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes*' n'est pas valable lorsque le corps de base $\mathbb{R}$ est remplacé par $\mathbb{Q}$. Ceci est dû au fait que la sphère unité de $(\mathbb{Q}^n, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte dans cet espace (elle n'est pas fermée).

2.7.2 Normes sur des espaces de suites

Exercice 2.4 : On considère l'espace $c_c = c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites à support fini.

- 1/ Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes (2 à 2) sur c_c .
- 2/ Montrer que c_c n'est complet pour aucune de ces normes.

SOLUTION :

1/ $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$ mais il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_\infty$. En effet, $\|1_{[0,n]}\|_1 = n$ et $\|1_{[0,n]}\|_\infty = 1$.

$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$ mais il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_\infty$. En effet $\|1_{[0,n]}\|_2 = \sqrt{n}$ et $\|1_{[0,n]}\|_\infty = 1$.

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes car il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$. En effet, $\|1_{[0,n]}\|_1 = n$ et $\|1_{[0,n]}\|_2 = \sqrt{n}$.

2/ $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ pour tout $p \in [1, \infty]$. Il n'est pas fermé dans $(l^p, \|\cdot\|_p)$ car la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, définie par $x^k := \left(\frac{1_{n \in [0,k]}}{(n+1)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite de $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui converge dans l^p vers x^∞ , qui n'est pas à support fini. En conséquence, $(c_c(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ n'est pas complet.

Rappel de cours : dans un e.m. complet, les sous espaces complets sont les sous-espaces fermés.

2.7.3 Normes sur des fonctions C^1

Exercice 2.5 : Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_1 := \sup\{|f(t) + f'(t)|; t \in [0, 1]\}$$

définissent 2 normes équivalentes sur E , pour lesquelles E est complet.

SOLUTION : Vérifier les axiomes de norme.

Etape 1 : Montrons que $(E, \|\cdot\|)$ est complet. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$. Alors $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, qui est complet (cours) donc elle converge uniformément vers $g \in C^0([0, 1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n(t) = \int_0^t f'_n(s) ds$$

donc f_n converge uniformément vers f définie par $f(t) := \int_0^t g(s) ds$. Par définition, $f \in E$ et $f' = g$ donc $f_n \rightarrow f$ dans $(E, \|\cdot\|)$.

Etape 2 : Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E , cad que l'axiome de séparation est vérifié. Si $f \in E$ et $\|f\|_1 = 0$ alors f résout l'EDO linéaire

$$\begin{cases} f'(t) = -f(t), \forall t \in [0, 1], \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

donc $f = 0$ (il y a unicité de la solution, pour une EDO linéaire).

Etape 3 : Montrons que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes équivalentes. Il est clair que $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|$. On doit majorer f et f' avec $(f + f')$. On sent poindre la formule

$$\frac{d}{dt} [f(t)e^t] = (f + f')(t)e^t \quad \text{cad} \quad f(t)e^t = \int_0^t (f + f')(s)e^s ds$$

qui donne

$$|f(t)| = e^{-t} \left| \int_0^t (f + f')(s)e^s ds \right| \quad \text{donc} \quad \|f\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty e^1.$$

Par ailleurs

$$|f'(t)| \leq |(f + f')(t)| + |f(t)| \quad \text{donc} \quad \|f'\|_\infty \leq (1 + e^1)\|f + f'\|.$$

En conclusion $\|\cdot\| \leq (1 + 2e^1)\|\cdot\|_1$.

Exercice 2.6 : Considérons sur $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(f) := \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

- 1/ Montrer que N est une norme sur E .
- 2/ Montrer que $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$ pour tout $f \in E$.
- 3/ Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E .

SOLUTION :

- 1/ Vérifier les axiomes de normes. On remarque que N dérive d'un produit scalaire...
- 2/ Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient, pour tout $f \in E$

$$|f(x)| = \left| f(0) + \int_0^x f'(t) dt \right| \leq |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'|^2 \right)^{1/2}.$$

On élève au carré en utilisant $2ab \leq a^2 + b^2$:

$$|f(x)|^2 \leq 2|f(0)|^2 + 2 \int_0^1 |f'|^2 = 2N(f)^2.$$

- 3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|x^n\|_\infty = 1$ et $N(x^n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \rightarrow \infty$ donc ces 2 normes ne sont pas équivalentes.

2.7.4 Normes L^p

Exercice 2.7 : Quelles relations d'inclusion entre les espaces $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$? Quelles inégalités entre les normes $\|\cdot\|_p$?

1. Si $\nu(X) < \infty$ alors $\left(L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \right)_{p \in [1, \infty]}$ est décroissante pour l'inclusion et l'injection $L^p \subset L^q$ pour $p > q$ est continue : $\|f\|_q \leq \|f\|_p \nu(X)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$ pour tout $f \in L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ (Hölder).
2. Si ν n'est pas bornée alors il n'y a pas d'inclusion en général :
 $\frac{1}{x} 1_{[1, \infty)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $\notin L^1(\mathbb{R})$,
 $\frac{1}{\sqrt{x}} 1_{(0, 1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ mais $\notin L^2(\mathbb{R})$.
3. Si $1 \leq r < p < s \leq \infty$ alors $L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \subset L^r \cap L^s(X, \mathbb{C}, \nu)$ et (inégalité d'interpolation : conséquence de Hölder)

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r^\theta \|f\|_s^{1-\theta}, \quad \forall f \in L^p, \text{ où } \theta \in (0, 1) \text{ est tel que } \frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}.$$

4. Est ce que $f \in \cap_{1 \leq p < \infty} L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ implique $f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$? Non, pas nécessairement. Par exemple pour $X = (0, 1)$ et ν la mesure de Lebesgue, la fonction $\ln \in L^p(0, 1)$ pour tout $p \in [1, \infty)$, mais $\notin L^\infty(0, 1)$.
5. En revanche, $\left(f \in \cap_{1 \leq p < \infty} L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \text{ et } \|f\|_p \leq C, \forall p \in [1, \infty) \right) \Rightarrow \left(f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu) \right)$.

En effet, si $A_m := \{|f| \geq m\}$ est de mesure > 0 alors $C \geq \|f\|_p \geq m \nu(A_m)^{1/p}$ pour tout $p \in [1, \infty)$ donc en passant à la limite $[p \rightarrow \infty]$, on obtient $C \geq m$. On en déduit que $f \in L^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq C$.

Exercice 2.8 : Comparaison des topologies

1. Sur $L^s \cap L^r$, les suites convergentes pour $\|\cdot\|_s$ et $\|\cdot\|_r$ ne sont pas les mêmes :
 $f_n := \frac{1}{n} 1_{[0,n]}(x) \longrightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$ car $\|f_n\|_{L^1} = 1$.
 $f_n := \sqrt{n} 1_{[0,1/n]}(x) \longrightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$ car $\|f_n\|_{L^2} = 1$.
2. Donc les normes $\|\cdot\|_s$ et $\|\cdot\|_r$ ne sont pas équivalentes sur $L^s \cap L^r$, les topologies associées sont différentes.

Exercice 2.9 : Est ce que $\|\cdot\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\cdot\|_p$?

1. Si $\nu(X) < \infty$ et $f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$ alors $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$.
 En effet, pour tout $p \in [1, \infty)$, on a $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \nu(X)^{1/p}$ donc

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty. \quad (2.4)$$

De plus, pour tout $\epsilon > 0$, $A_\epsilon := \{|f| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\}$ est de mesure > 0 et

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\nu(x) \right)^{1/p} \geq \left(\int_{A_\epsilon} |f(x)|^p d\nu(x) \right)^{1/p} \geq (\|f\|_\infty - \epsilon) \nu(A_\epsilon)^{1/p}$$

donc $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty. \quad (2.5)$$

On déduit de (2.4) et (2.5) que $(\|f\|_p)_{p \in [1, \infty)}$ converge vers $\|f\|_\infty$ quand $[p \rightarrow \infty]$.

2. Si $r \in [1, \infty)$, $f \in \cap_{r \leq p < \infty} L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ et $f \notin L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$ alors $\|f\|_p \rightarrow \infty$ quand $[p \rightarrow \infty]$.
 En effet, pour tout $M > 0$, $A_M := \{|f| \geq M\}$ est de mesure > 0 et $\|f\|_p \geq M \nu(A_M)^{1/p}$ pour tout $p \in [r, \infty)$ donc $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq M$. Ceci est vrai pour tout $M > 0$ donc $\|f\|_p \rightarrow \infty$ quand $[p \rightarrow \infty]$.

2.7.5 Normes sur les fonctions lipschitziennes

Exercice 2.10 : Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1/ Montrer que l'application $N : L \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(f) := |f(0)| + \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; 0 \leq x < y \leq 1 \right\}$$

est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur L .

- 2/ Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq cN(f)$ pour tout $f \in L$.
- 3/ Existe-t-il une constante $c' > 0$ telle que $N(f) \leq c'\|f\|_\infty$ pour tout $f \in L$?

SOLUTION :

- 1/ Vérifier que $N(f)$ est fini pour tout $f \in L$ ainsi que les 3 axiomes de norme sur N .
- 2/ Pour $f \in L$, on a

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} |x| \leq N(f), \forall x \in (0, 1].$$

Ainsi $\|\cdot\|_\infty \leq N$.

- 3/ Non. On exploite le fait que $N(f)$ est minoré par $\|f'\|_\infty$ pour construire un contre-exemple :
 $f_n(x) := \sqrt{1 + \frac{1}{n} - x}$ satisfait $\|f_n\|_\infty = |f_n(0)| = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ (borné) et $\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; x \neq y \in [0, 1] \right\} \geq |f'_n(1)| = \frac{\sqrt{n}}{2}$ (diverge).

Exercice 2.11 : Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

1/ Montrer que l'application $N : L \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(f) := \|f\|_{\infty} + \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; 0 \leq x < y \leq 1 \right\}$$

est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur L .

2/ Montrer que (L, N) est complet.

3/ Montrer que la boule unité fermée de (L, N) est une partie compacte de $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$.

SOLUTION :

1/ Vérifier que $N(f)$ est fini pour tout $f \in L$ ainsi que les 3 axiomes de norme sur N .

2/ Une suite de Cauchy pour N est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty}$. Comme $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ est complet, elle converge uniformément vers $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(f_n - f_p) < \epsilon$ pour tout $n, p > n_0$. En particulier

$$\frac{|(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(y)|}{|x - y|} < \epsilon, \forall x \neq y \in [0, 1], \forall n, p > n_0.$$

Fixons $n > n_0$ et faisons $[p \rightarrow \infty]$ dans cette inégalité :

$$\frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)|}{|x - y|} < \epsilon, \forall x \neq y \in [0, 1], \forall n, p > n_0.$$

Ainsi $N(f_n - f) < 2\epsilon$ pour tout $n > n_0$: ceci montre à la fois que $f \in \mathcal{L}$ (ev) et que $f_n \rightarrow f$ en norme N .

3/ Appliquer le théorème d'Ascoli.

Exercice 2.12 : Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $f \in \mathcal{L}$,

$$\|f\|_{Lip} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

1/ Soit $f \in \mathcal{L}$, positive (et non nulle). Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$f(x)^2 \leq 2\|f\|_{Lip} \int_x^{x + \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y) dy.$$

2/ Montrer que, si $f \in \mathcal{L} \cap L^1(\mathbb{R})$, alors $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ et f tend vers 0 à l'infini.

3/ Montrer que, sur $E = \mathcal{L} \cap L^1(\mathbb{R})$, l'application $\|\cdot\|_{Lip}$ définit une norme.

4/ Montrer que, pour $f \in E$, on a :

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|f\|_{Lip}.$$

5/ Les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{Lip}$ sont-elles équivalentes sur E ?

6/ Les normes $\|\cdot\|_{Lip}$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{Lip}$ sont-elles équivalentes sur E ?

7/ Les normes $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{Lip}$ sont-elles équivalentes sur E ?

SOLUTION : 1/ Pour $f \in \mathcal{L}$ positive, on a

$$\begin{aligned}
 f(x)^2 &= \|f\|_{Lip} f(x) \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}} \\
 &= \|f\|_{Lip} \int_x^{x + \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y) dy \\
 &\leq \|f\|_{Lip} \int_x^{x + \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} (f(y) + |f(x) - f(y)|) dy \\
 &\leq \|f\|_{Lip} \int_x^{x + \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y) dy + \|f\|_{Lip} \int_x^{x + \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} \|f\|_{Lip} |y - x| dy \\
 &\leq \|f\|_{Lip} \int_x^{x + \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y) dy + \|f\|_{Lip}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}} \right)^2 \\
 &\leq \|f\|_{Lip} \int_x^{x + \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y) dy + \frac{f(x)^2}{2}.
 \end{aligned}$$

2/ $L^1(\mathbb{R})$ et uniformément continue $\Rightarrow$ tend vers 0 à l'infini (Lemme de Barbalat, se démontre par l'absurde). Donc, a fortiori, $\mathcal{L} \cap L^1 \subset C_0^0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$.

3/ Pour montrer [N1], on utilise $f(x) \rightarrow 0$ quand $[x \rightarrow \infty]$.

4/ $f \in E$ implique $|f| \in E$ et d'après (1),

$$|f(x)|^2 \leq 2\|f\|_{Lip} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \leq \|f\|_{Lip}^2 + \|f\|_{L^1}^2$$

donc $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{Lip} + \|\cdot\|_1$.

5/ Non : il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_{Lip} + \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$. Soit $\theta \in C_c^0(\mathbb{R})$. Alors $f_n(x) := \theta(x/n) \in \mathcal{L} \cap L^1(\mathbb{R})$, $\|f_n\|_\infty \equiv \|\theta\|_\infty$ mais $\|f_n\|_1 = n\|\theta\|_1$ diverge.

6/ Non. Par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_{Lip} \leq C\|\cdot\|_{Lip}$. Alors, d'après (4) $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_{Lip} \leq C\|\cdot\|_{Lip}$. Considérons $f_n \in C^0(\mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -n) \cup (n, \infty), \\ 1 + \frac{x}{n} & \text{si } x \in (-n, 0), \\ 1 - \frac{x}{n} & \text{si } x \in (0, n). \end{cases}$$

Alors $1 = \|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_{Lip} = \frac{1}{n}$: contradiction.

7/ Non. Par absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_{Lip} \leq C\|\cdot\|_1$. Alors $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_{Lip} \leq C\|\cdot\|_1$. Soit $\theta \in C_c^0(\mathbb{R})$ et $f_n(x) := n\theta(nx)$. Alors

$$n\|\theta\|_\infty = \|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_1 = C\|\theta\|_1 : \text{contradiction.}$$

2.7.6 Utilisation de la complétude : point fixe

Exercice 2.13 : On considère $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $K \in C^0([a, b]^2, \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\phi \in E$, l'équation

$$f(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

admet une unique solution $f \in E$.

SOLUTION : K est continue sur le compact $[a, b]^2$ donc uniformément majorée (par $\|K\|_\infty$).

Soit $a_1 \in [a, b]$ tel que $|a_1 - a|\|K\|_\infty < 1$ et ou bien $a_1 = b$, ou bien $|a_1 - a|\|K\|_\infty > 1/2$. Alors le thm du point fixe s'applique à $\Theta_0 : C^0([a, a_1]) \rightarrow C^0([a, a_1])$ définie par

$$\Theta_0(f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x), \quad \forall x \in [a, a_1].$$

Le point fixe fournit une solution f_0 , sur $[a, a_1]$, de l'équation considérée. Si $a_1 = b$, on a fini. Sinon, on itère la procédure.

Soit $a_2 \in [a_1, b]$ tel que $|a_2 - a_1| \|K\|_\infty < 1$ et ou bien $a_2 = b$, ou bien $|a_2 - a_1| \|K\|_\infty > 1/2$. Alors le théorème de point fixe d'applique à $\Theta_1 : C^0([a_1, a_2]) \rightarrow C^0([a_1, a_2])$ définie par

$$\Theta_1(f)(x) = \int_{a_1}^x K(x, y) f(y) dy + \phi_1(x), \forall x \in [a_1, a_2],$$

avec

$$\phi_1(x) := \int_a^{a_1} K(x, y) f_0(y) dy + \phi(x), \forall x \in [a_1, a_2].$$

Le point fixe f_1 satisfait clairement $f_1(a_1) = f_0(a_1)$ et en recollant f_0 et f_1 , on obtient une solution continue de l'équation considérée sur $[a, a_2]$.

Pour conclure, il suffit de montrer qu'on couvre $[a, b]$ en un nombre fini d'étape. Ceci est lié au fait qu'on impose que $|a_{j+1} - a_j| \|K\|_\infty > 1/2$: on couvre nécessairement $[a, b]$ en moins de $[2\|K\|_\infty(b-a)] + 1$ étapes.

Exercice 2.14 : [Résolution d'une équation non linéaire] Soit $C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et 1-périodiques $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1/ Montrer que $(C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

2/ Montrer que l'équation fonctionnelle

$$f(t + \sqrt{2})^2 + f(t - \sqrt{2})^2 + 100f(t) = \sin(2\pi t)$$

admet une solution f continue et 1-périodique.

SOLUTION :

Le but de cet exercice est d'appliquer le théorème du point fixe pour résoudre une équation non linéaire. La présence de la nonlinéarité oblige à choisir convenablement l'espace de Banach, cad le rayon de la boule (ce qui n'est pas forcément le cas en linéaire : cf exercice précédent). La première chose est de trouver la bonne formulation de point fixe, pour avoir une contraction. On est guidé par la présence du grand nombre '100'.

1/ Reproduire la preuve habituelle.

2/ Considérons

$$\Theta : C_{per}^0(\mathbb{R}) \mapsto C_{per}^0(\mathbb{R})$$

définie par

$$\Theta(f)(t) = \frac{1}{100} \left(\sin(2\pi t) - f(t - \sqrt{2})^2 - f(t + \sqrt{2})^2 \right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Θ est clairement à valeurs dans $C_{per}^0(\mathbb{R})$, mais elle n'est pas contractante sur tout l'espace (de même que $x \mapsto x^2$ n'est pas contractante sur tout $\mathbb{R}$). Pour avoir une contraction, on doit donc considérer Θ sur une boule fermée de $(C_{per}^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) : \overline{B}(0, R)$ avec $R > 0$ permettant, à la fois que Θ envoie $\overline{B}(0, R)$ sur elle-même et que Θ soit contractante sur $\overline{B}(0, R)$.

Pour que Θ envoie $\overline{B}(0, R)$ sur elle-même, on souhaite que R vérifie

$$\frac{1}{100} (1 + 2R^2) < R.$$

De plus, on a

$$\left| \left(\Theta(f_1) - \Theta(f_2) \right)(t) \right| \leq \frac{1}{100} \left| (f_1 + f_2)(f_1 - f_2)(t - \sqrt{2}) + (f_1 + f_2)(f_1 - f_2)(t + \sqrt{2}) \right|.$$

Donc, pour que Θ soit contractante sur $\overline{B}(0, R)$, on souhaite que R vérifie

$$\frac{1}{100}(2R + 2R) = \frac{R}{25} < 1.$$

Il reste à montrer qu'il existe bien $R \in (0, 25)$ vérifiant $2R^2 - 100R + 1 < 0$. Ce polynôme admet pour racine $\lambda_{\pm} = \frac{100 \pm \sqrt{(100)^2 - 8}}{4}$, il est donc < 0 sur (λ_-, λ_+) et l'expression explicite de λ_- montre que $\lambda_- < 25$. On en déduit que toute valeur de $R \in (\lambda_-, 25)$ convient.

Chapitre 3

Applications linéaires entre evn

3.1 Norme subordonnée

Proposition 18 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. EQU :

1. f est continue en 0.
2. f est continue.
3. Il existe $M > 0$ ('réel de continuité') tel que $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E$.

En particulier, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ est continue.

Preuve : $1 \Rightarrow 2$ par linéarité.

$2 \Rightarrow 3$ Par continuité de f en zéro, il existe $\delta > 0$ tel que $\|f(y)\|_F \leq 1$ pour tout $y \in E$ vérifiant $\|y\|_E \leq \delta$. Par linéarité et axiome [N2] de norme, il en découle de

$$\|f(x)\|_F = \left\| \frac{\|x\|_E}{\delta} f\left(\frac{\delta x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{\delta}, \forall x \in E.$$

Ainsi, $M := 1/\delta$ est un réel de continuité pour f donc f est continue.

$3 \Rightarrow 1$ est évidente.

Enfin supposons que E soit de dimension finie. Ops $E = \mathbb{R}^n$. Par équivalence des normes en dimension finie, il existe $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_E$. La linéarité de f et l'inégalité triangulaire justifient que

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{j=1}^N x_j f(e_j) \right\|_F \leq M\|x\|_1 \leq MC\|x\|_E, \forall x \in E$$

où $M := \max\{\|f(e_j)\|_F; 1 \leq j \leq N\}$. Donc f est continue. □

Ce dernier résultat est très lié à l'équivalence des normes en dimension finie. Exercice : Soit E un evn sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Montrer que toutes les formes linéaire sur E sont continues.

Exemples :

- $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, $K \in C^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$ et $T : E \rightarrow E$ définie par

$$T(f)(x) := \int_0^1 K(x, t) f(t) dt, \forall x \in [0, 1].$$

Le théorème de continuité sous l'intégrale (ou de CVD) justifie que T est bien à valeurs dans E :

* pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto K(x, t)f(t)$ est continue $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

* l'intégrande $K(x, t)f(t)$ admet un majorant indépendant de x et intégrable par rapport à $t \in (0, 1)$: $|K(x, t)f(t)| \leq \|K\|_\infty |f(t)|$. De plus,

$$\|T(f)\|_\infty \leq \sup \left\{ \int_0^1 |K(x, t)| dt; x \in [0, 1] \right\} \|f\|_\infty$$

donc T est continue $E \rightarrow E$.

– Pour $f \in L^1(0, 2\pi)$ on définit

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

alors $c_n(f) \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$ (Lemme de Riemann Lebesgue). De plus l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} F : (L^1(0, 2\pi), \|\cdot\|_1) & \rightarrow & (c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array} \right|$$

est linéaire et continue car $\|F(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Contre-exemples :

- $E = F = \mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| := \sum_{k=0}^n |a_k|$. Alors $L : E \rightarrow E'$ définie par $L(P) = P'$ est linéaire mais pas continue. En effet, pour $P = X^n$ on a $P' = nX^{n-1}$ donc $\frac{\|P'\|}{\|P\|} = n$ n'est pas majorée $[n \rightarrow \infty]$.
- $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Alors $L : f \in E \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue. En effet, pour les fonctions triangle $f_n := (1 - nx)1_{[0, 1/n]}(x)$, $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|_1} = \frac{n}{2}$ n'est pas majoré $[n \rightarrow \infty]$.

Definition 17 ($\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}_c(E, F)$) On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires $E \rightarrow F$ et $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues $E \rightarrow F$.

Proposition 19 1. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, les 4 réels suivants sont égaux

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}; x \in E \setminus \{0\} \right\}, \\ & \sup \{ \|f(x)\|_F; x \in E, \|x\|_E = 1 \}, \\ & \sup \{ \|f(x)\|_F; x \in E, \|x\|_E \leq 1 \}, \\ & \inf \{ M \geq 0; \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \forall x \in E \}, \end{aligned}$$

on note $\|f\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}$ leur valeur commune. Les 3 bornes supérieures sont atteintes lorsque E est de dimension finie. Si E est de dimension infinie, ce n'est pas forcément le cas (voir exemples ci-dessous).

2. $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E, F)})$ est un evn.
3. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet, alors $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E, F)})$ est un espace de Banach.
4. Si E, F, G sont des evn, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}_c(E, G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}_c(F, G)} \|f\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}.$$

Preuve : Les points 1. et 2. se vérifient élémentairement et 4. résulte de la caractérisation de $\|g \circ f\|_{\mathcal{L}_c(E, G)}$ comme plus petit réel de continuité. Montrons 3.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E, F)})$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application linéaire continue $E \rightarrow F$ et

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|f_n - f_p\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} < \epsilon, \forall n, p \geq n_0. \quad (3.1)$$

Etape 1 : Convergence point par point. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, $\epsilon > 0$, et $n_0 = n_0\left(\frac{\epsilon}{\|x\|_E}\right)$ comme ci-dessus. Alors

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \|f_n - f_p\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \|x\|_E < \epsilon, \forall n, p \geq n_0.$$

Ainsi, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Or, $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet donc $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ est bien définie dans F .

On définit ainsi une application $f : E \rightarrow F$ qui est linéaire. En effet, pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $f_n(\lambda x + y) = \lambda f_n(x) + f_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, en passant à la limite [$n \rightarrow \infty$], $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Etape 2 : Montrons que $f : E \rightarrow F$ est continue et que $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \rightarrow 0$.
Soit $\epsilon > 0$, $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ comme dans (3.1) et $n \geq n_0$. Pour $x \in E$ fixé, on a

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \epsilon \|x\|_E, \forall p > n_0,$$

donc, en passant à la limite [$p \rightarrow \infty$], on obtient

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon \|x\|_E.$$

Ceci est vrai pour tout $x \in E$ donc $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ (espace vectoriel) et $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq \epsilon$. $\square$

Définition 18 (Norme subordonnée) Lorsque $E = F$, on note $\mathcal{L}_c(E)$ au lieu de $\mathcal{L}_c(E, E)$. Alors $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E)}$ est appelée '**norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ subordonnée** à $\|\cdot\|_E$ '.

Exemples :

– Notons $\|\cdot\|_p$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\|A\|_1 = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|; 1 \leq j \leq n \right\},$$

$$\|A\|_\infty = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|; 1 \leq i \leq n \right\},$$

$$\|A\|_2 = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = \sqrt{\rho(A^*A)},$$

où $\rho(M) := \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(M)\}$ est appelé 'rayon spectral de M '.

Faisons la preuve pour la norme $\|\cdot\|_1$, les autres sont laissées en exercice [voir : Ciarlet Thm 1.4-2 page 16-17 ou Rouvières] Soit $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $m := \max \left\{ \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|; 1 \leq j \leq n \right\} = \sum_{i=1}^n |A_{i,j_0}|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j} x_j| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \quad (\text{intersion de sommes finies}) \\ &\leq m \|x\|_1, \end{aligned}$$

donc $\|A\|_1 \leq m$. Or $\|Ae_{j_0}\| = \sum_{i=1}^n |A_{i,j_0}| = m$ donc $\|A\|_1 = m$.

- $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $L : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t)dt$. Montrons que L est continue et calculons $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E)}$. On a

$$|L(f)| = \left| \int_0^1 f(t)dt \right| \leq \|f\|_\infty, \forall f \in E$$

donc L est continue et $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq 1$. En considérant $f = 1$, qui vérifie $L(f) = 1$ et $\|f\|_\infty = 1$, on voit que $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E)} = 1$.

Cet exemple est particulièrement facile car le sup définissant $\|L\|$ est atteint. Lorsque E est de dimension infinie, ce sup peut ne pas être atteint, il faut alors travailler à ϵ -près, avec une suite de vecteurs test f_n , comme dans l'exemple suivant.

- $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$L(f) := \int_0^1 (1 - 2t)f(t)dt.$$

On a

$$|L(f)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |1 - 2t|dt = \frac{\|f\|_\infty}{2}, \forall f \in E,$$

donc L est continue et $\|L\| \leq \frac{1}{2}$. Pour que l'inégalité ci-dessus soit une égalité, il faudrait prendre $f(t) = \text{signe}(t - \frac{1}{2})$, mais cette fonction n'est pas continue. Pour montrer que $\|L\| = \frac{1}{2}$, on va donc considérer une suite de fonctions test continues f_n qui 'approchent' $t \mapsto \text{signe}(t - \frac{1}{2})$ (faire un dessin)

$$f_n(t) := \begin{cases} \text{signe}(t - \frac{1}{2}) & \text{si } |t - \frac{1}{2}| > 1/n, \\ n(t - \frac{1}{2}) & \text{si } |t - \frac{1}{2}| \leq 1/n. \end{cases}$$

Alors $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ et $L(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$. En effet,

* $(1 - 2t)f_n(t) \rightarrow |1 - 2t|$ quand $n \rightarrow \infty$ pour presque tout $t \in (0, 1)$,

* l'intégrande $(1 - 2t)f_n(t)$ admet une domination indépendante de n et intégrable en $t \in (0, 1)$:

$$|(1 - 2t)f_n(t)| \leq |1 - 2t|,$$

donc le théorème de CVD justifie que $L(f_n) \rightarrow \int_0^1 |1 - 2t|dt = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\|L\| \geq \limsup \frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{2}.$$

Il est important de bien maîtriser la méthode permettant de calculer la norme subordonnée d'un opérateur L :

1. Montrer que $L(f) \leq C\|f\|$ avec une série d'inégalités les plus fines possibles.
2. Chercher les cas d'égalité dans chacune des inégalité précédentes.
3. Si un vecteur $f \in E \setminus \{0\}$ les réalise simultanément, alors il prouve que $C = \|L\|$. Sinon, travailler à ϵ -près, comme dans l'exemple précédent.

3.2 Norme d'algèbre

Définition 19 (Algèbre normée, algèbre de Banach) Une *algèbre normée* est une algèbre (sur $\mathbb{K}$) munie d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative :

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \forall x, y \in E.$$

(on dit parfois que $\|\cdot\|$ est une norme 'matricielle', mais ce vocabulaire peut mener à des confusions). Une *algèbre de Banach* est une algèbre normée complète.

Exemples et propriétés :

- $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E)})$ est une algèbre normée.
- Si E est complet alors $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E)})$ est une algèbre de Banach.
- Les normes subordonnées sont toujours sous-multiplicatives. Mais les normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas forcément subordonnées. Par exemple, la norme de Frobenius $\|M\|_{Fr} := \sqrt{\text{Tr}(M^*M)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |M_{i,j}|^2}$ est sous-multiplicative : l'inégalité de Cauchy-Schwarz justifie et une interversion de sommes finies justifient que

$$\|AB\|_{Fr}^2 = \sum_{i,j=1}^n |(AB)_{i,j}|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |A_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n |B_{l,j}|^2 \right) = \|A\|_{Fr}^2 \|B\|_{Fr}^2.$$

Mais la norme de Frobenius n'est pas subordonnée car $\|I_n\| = \sqrt{n} > 1$. Elle vérifie de plus $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{Fr} \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_2$. [cf Ciarlet Thm 1.4-4 page 20].

- Il existe également des normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour lesquelles $\|I_n\| = 1$ mais qui ne sont pas des normes subordonnées. Par exemple $\|A\| := \min\{\|A\|_1; \|A\|_\infty\}$ [exercice délicat].
- Toute norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfait $\rho(\cdot) \leq \|\cdot\|$. De plus, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$, il existe une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|\cdot\| \leq \rho(\cdot) + \epsilon$. Exercice [cf Ciarlet Thm 1.4-3 pages 18-19].

Contre-exemples : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|A\| := \max\{|A_{i,j}|; 1 \leq i, j \leq n\}$. Alors $\|\cdot\|$ n'est pas une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, la matrice A n'ayant que des 1 partout vérifie $\|A\| = 1$ et $\|A^2\| = n$ donc $\|A^2\|$ n'est pas $\leq \|A\|^2$.

Proposition 20 1. Soit $(X, \|\cdot\|, +, \cdot)$ une algèbre **de Banach**. Alors l'ensemble $\text{Inv}(X)$ des éléments inversibles de X est un ouvert de X .

2. En particulier, si E est un **Banach**, alors le groupe des isomorphismes de E , $\mathcal{G}l(E) := \{f \in \mathcal{L}_c(E) \text{ inversible}\}$, est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.

Preuve : Si E est de dimension finie, $\mathcal{G}l(E)$ est ouvert comme image réciproque par l'application déterminant de l'ouvert $\mathbb{R}^*$. La preuve générale suivante n'a d'intérêt que si E est de dimension infinie.

Soit $(X, \|\cdot\|, +, \cdot)$ une algèbre de Banach. Notons 1_X son élément unité.

Étape 1 : Montrons que la boule ouverte centrée en 1_X et de rayon $= 1$ est $\subset \text{Inv}(X)$. Soit $h \in X$ tel que $\|h\| < 1$. La série $\sum h^n$ converge absolument car (norme sous-multiplicative) $\|h^n\| \leq \|h\|^n$. Comme $(X, \|\cdot\|)$ est complet, alors la série $\sum h^n$ converge. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a (suite télescopique) $(1_X - h) \sum_{n=0}^N h^n = 1_X - h^{N+1}$ donc (norme sous-multiplicative)

$$\left\| (1_X - h) \sum_{n=0}^N h^n - 1_X \right\| = \|h^{N+1}\| \leq \|h\|^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

En passant à la limite $[N \rightarrow \infty]$, on obtient $(1_X - h) \sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1_X$. Ainsi $(1_X - h)$ est inversible et $\sum_{n=0}^{\infty} h^n = (1_X - h)^{-1}$.

Étape 2 : Montrons que, pour tout $a \in \text{Inv}(X)$, $B(a, 1/\|a^{-1}\|) \subset \text{Inv}(X)$. Pour $h \in X$ vérifiant $\|h\| < 1/\|a^{-1}\|$, on a (sous-multiplicativité) $\|a^{-1}h\| \leq \|a^{-1}\| \|h\| < 1$ donc $a + h = a(I + a^{-1}h)$ est inversible comme produit de deux inversibles. $\square$

3.3 Généralisation aux applications multi-linéaires

Proposition 21 Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n}), (F, \|\cdot\|_F)$ des evn et $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application n -linéaire. On muni $E_1 \times \dots \times E_n$ de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sup\{\|x_1\|_{E_1}, \dots, \|x_n\|_{E_n}\}$ (ou de toute norme équivalente). EQU :

1. f est continue,
2. f est continue en zéro,
3. il existe $M > 0$ tel que $\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$.

Preuve : $2 \Rightarrow 3$. Par continuité de f en zéro il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E_1 \times \dots \times E_n$ vérifiant $\|x\| \leq \delta$ alors $\|f(x)\|_F \leq 1$. Alors

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F = \delta^n \|x_1\|_{E_1} \|x_n\|_{E_n} f\left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, \dots, \frac{\delta x_n}{\|x_n\|_{E_n}}\right) \leq \delta^n \|x_1\|_{E_1} \|x_n\|_{E_n},$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \setminus \{0\}$.

$3 \Rightarrow 1$. On a

$$\begin{aligned} & \left\| f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \right\|_F \\ = & \left\| f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \right. \\ & + f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n) \\ & + \dots \\ & \left. + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \right\|_F \\ = & \left\| f(h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) + f(x_1, h_2, \dots, x_n + h_n) + \dots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n) \right\|_F \text{ par multi-linéarité} \\ \leq & M \sum_{j=1}^n \|h_j\|_{E_j} (\prod_{k < j} \|x_k\|_{E_k}) (\prod_{p > j} \|x_p + h_p\|_{E_p}) \\ \leq & M(\|x\| + 1)^{n-1} \|h\| \text{ quand } \|h\| < 1 \end{aligned}$$

qui tend vers zéro quand $\|h\| \rightarrow 0$. □

On note $\mathcal{L}_c(E_1, \dots, E_n; F)$ l'espace vectoriel des formes n -linéaires continues $E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$. Muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1, \dots, E_n; F)} := \sup \left\{ \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F}{\|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}}; x_1 \in E_1 \setminus \{0\}, \dots, x_n \in E_n \setminus \{0\} \right\},$$

c'est un evn. Si F est complet alors c'est un Banach. Exercice : Le démontrer.

Proposition 22 Soient E_1, E_2, F des evn, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E_1 , $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de E_2 .

1. Si $\sum x_n$ CV (resp. ACV) dans E_1 et $f \in \mathcal{L}_c(E_1, F)$ alors $\sum f(x_n)$ CV (resp. ACV) dans F et

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right).$$

2. Si E_1, E_2, F sont **complets**, $\sum x_n$ CVA dans E_1 et $\sum y_m$ CVA dans E_2 alors $(f(x_n, y_m))_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille normalement sommable dans F et

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}} f(x_n, y_m) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{m=0}^{\infty} y_m\right)$$

(le membre de gauche est à comprendre au sens des familles sommables, en particulier, on peut sommer dans l'ordre qu'on veut sans modifier la somme).

Preuve du 2 : Soit A une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset [0, p] \times [0, p]$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in A} \|f(x_n, y_m)\|_F &\leq \|f\| \sum_{(n,m) \in A} \|x_n\|_{E_1} \|y_m\|_{E_2} \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{n=0}^p \|x_n\|_{E_1} \right) \left(\sum_{m=0}^p \|y_m\|_{E_2} \right) \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{E_1} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \|y_m\|_{E_2} \right). \end{aligned}$$

Les sommes finies sont majorées donc la famille $(f(x_n, y_m))_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est normalement sommable dans F . On peut donc sommer ses termes dans n'importe quel ordre sans changer la valeur de la somme. On a

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{(n,m) \in [0, N]^2} f(x_n, y_m) - f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{m=0}^{\infty} y_m\right) \right\|_F \\ &\leq \left\| f\left(\sum_{n > N} x_n, \sum_{m=0}^N y_m\right) \right\|_F + \left\| f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{m=0}^N y_m\right) \right\|_F \quad \text{par bilinearité} \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{n > N} \|x_n\|_{E_1} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \|y_m\|_{E_2} \right) + \|f\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{E_1} \right) \left(\sum_{m > N} \|y_m\|_{E_2} \right) \\ &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que la somme de la famille $(f(x_n, y_m))_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est $f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{m=0}^{\infty} y_m\right)$. $\square$

3.4 Prolongement par densité des ALC

On déduit du Chapitre 1 le résultat suivant.

Proposition 23 (Prolongement des ALC) *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach, D un sev de E dense dans E . Toute application linéaire continue $f : D \rightarrow F$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\tilde{f} : E \rightarrow F$ telle que $\|f\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} = \|\tilde{f}\|_{\mathcal{L}_c(D, F)}$.*

Nous verrons ultérieurement un autre théorème de prolongement, sans hypothèse de densité, le théorème de Hahn Banach.

3.5 Dualité (rudiments)

Définition 20 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ est un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $E' := \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ le **dual topologique** de E .*

Il s'agit d'un evn pour la norme

$$\|f\|_{E'} := \sup\{|f(x)|; x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

De plus, $(E', \|\cdot\|_{E'})$ est un espace de Banach (même si E n'est pas complet : seule la complétude de l'espace d'arrivée importe).

Proposition 24 *1. Lorsque $(E, \|\cdot\|)$ est un evn de dimension finie alors E' est isomorphe à E ; en particulier, E et E' sont de même dimension.*

2. Ca n'est pas forcément le cas en dimension finie.

Preuve de l'énoncé 1. : Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E . Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on définit $b_j^* \in E'$ par $b_j^*(b_k) = \delta_{j,k}$ pour $k = 1, \dots, n$ (un endomorphisme est déterminé par l'image d'une base). Alors l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \zeta : & E & \rightarrow E' \\ & x = \sum_{j=1}^n x_j b_j & \mapsto \sum_{j=1}^n x_j b_j^* \end{array} \right|$$

– est bien définie, par unicité de la décomposition de x sur la base $(b_1, \dots, b_n)$

- est clairement linéaire
- est injective : si $\zeta(x) = 0$ dans E' alors $0 = \zeta(x)(e_k) = x_k$ dans $\mathbb{K}$ pour $k = 1, \dots, n$ donc $x = 0$
- est surjective : si $\psi \in E'$ alors $\psi = \sum_{j=1}^n \psi(b_j) b_j^*$ (linéarité) donc $\psi = \zeta\left(\sum_{j=1}^n \psi(b_j) b_j\right)$.

En conclusion, E' est isomorphe à E donc de même dimension. La famille $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ est appelée famille duale de $(b_1, \dots, b_n)$. $\square$

Remarque 4 Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne et si $(b_1, \dots, b_n)$ est une base orthonormée de E , alors ζ est une isométrie. En effet, b_j^* est alors le produit scalaire contre b_j donc, pour $x \in E$, $\zeta(x)$ est le produit scalaire contre x et $\|\zeta(x)\|_{E'} = \|x\|_E$.

Mais ζ n'est pas forcément une isométrie. En effet, considérons $E = \mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne et la base (b_1, b_2) définie par $b_1 := e_1$, $b_2 := e_1 + e_2$. Alors, pour $j = 1, 2$, φ_j est le produit scalaire euclidien contre b_j^* défini par $b_1^* = e_1 - e_2$, $b_2^* = e_2$ (on vérifie trivialement que $\langle b_j, b_k^* \rangle = \delta_{j,k}$). On a

$$\|x_1 b_1 + x_2 b_2\|^2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 x_2 \quad \text{et} \quad \|x_1 b_1^* + x_2 b_2^*\|^2 = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2,$$

donc ζ n'est pas une isométrie.

Preuve de l'énoncé 2 : On va voir ci dessous que le dual topologique de $(l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ est isométrique à $(l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Or, il n'existe pas d'isomorphisme continu entre $(l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, car le premier est séparable et le 2ème ne l'est pas.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un isomorphisme continu

$$L : (l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \rightarrow (l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

Montrons que l'ensemble dénombrable $D := \text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{L(e_k); k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $(l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, ce qui fournira la contradiction.

Soit $x \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Comme L est surjectif alors il existe $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ tel que $x = L(u)$. Nous avons déjà vu qu'il existe $v \in \text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ tel que $\|u - v\|_1 < \epsilon/\|L\|$. Alors $L(v) \in D$ et

$$\|x - L(v)\|_\infty = \|L(u) - L(v)\|_\infty \leq \|L\| \|u - v\|_1 < \epsilon,$$

ce qui fournit la conclusion $\square$

Proposition 25 On munit $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de leurs normes canoniques respectives $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} \Phi : l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \rightarrow \left((l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}))', \|\cdot\|_{(l^1)'} \right) \\ u & \mapsto \left| \begin{array}{ll} \Phi(u) : l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme isométrique (en particulier continu). Il permet d'identifier $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ au dual topologique de $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Preuve :

Etape 1 : Montrons que Φ est bien définie et isométrique, cad $\|\Phi(u)\|_{(l^1)'} = \|u\|_\infty$ pour tout $u \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Soit $u \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Pour $x \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on a $|u_n x_n| \leq \|u\|_\infty |x_n|$ donc la série $\sum x_n u_n$ converge dans $\mathbb{R}$ (evn complet donc CVA $\Rightarrow$ CV). Ainsi, $\Phi(u)(x)$ est bien défini, de plus $|\Phi(u)(x)| \leq \|u\|_\infty \|x\|_1$, donc $\|\Phi(u)\|_{(l^1)'} \leq \|u\|_\infty$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|u\|_\infty - \epsilon \leq |u_N| \leq \|u\|_\infty$. Alors $\Phi(u)(e_N) = |u_N| \geq (\|u\|_\infty - \epsilon)\|e_N\|_1$ donc $\|\Phi(u)\|_{(l^1)'} \geq \|u\|_\infty - \epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $\|\Phi(u)\|_{(l^1)'} = \|u\|_\infty$.

Etape 2 : Montrons que Φ est surjective. Soit $\xi \in (l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ et $u_n := \xi(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et que $\xi = \Phi(u)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| = |\xi(e_n)| \leq \|\xi\|_{(l^1)'} \|e_n\|_1 = \|\xi\|_{(l^1)'}$ donc $u \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Soit $x \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrons que $\xi(x) = \Phi(u)(x)$, c'est à dire que $\sum_{n=0}^\infty u_n x_n = \xi(x)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - x1_{[0,N]}\|_1 < \frac{\epsilon}{\|\xi\|_{(l^1)'}}$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour $n \geq N$, on obtient

$$|\xi(x) - \sum_{n=0}^N u_n x_n| = |\xi(x) - \xi(x1_{[0,N]})| \leq \|\xi\|_{(l^1)'} \|x - x1_{[0,N]}\|_1 < \epsilon,$$

ce qui fournit la conclusion. $\square$

Exercice : Démontrer le résultat suivant, avec une preuve similaire.

Proposition 26 On munit $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} \Phi : l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \rightarrow \left((c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}))', \|\cdot\|_{(c_0)'} \right) \\ u & \mapsto \left| \begin{array}{ll} \Phi(u) : l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{n=0}^\infty x_n u_n \end{array} \right. \end{array} \right|$$

est un isomorphisme isométrique (en particulier continu). Il permet d'identifier $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ au dual topologique de $(c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Lorsque E est de dimension infinie, on ne peut plus forcément identifier E à E' , mais on peut toujours identifier E à un sev de E'' (le **bidual** de E).

Proposition 27 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'injection canonique

$$\left| \begin{array}{ll} J : E & \rightarrow E'' \\ x & \mapsto \left| \begin{array}{ll} J(x) : E' & \rightarrow \mathbb{K} \\ \xi & \mapsto \xi(x) \end{array} \right. \end{array} \right|$$

permet d'identifier E à un sous-espace vectoriel de E'' .

Preuve : *Etape 1 : Montrons que J est bien définie et continue.* Pour $x \in E$, il est clair que $J(x)$ est une forme linéaire sur E' . De plus, $|J(x)(\xi)| = |\xi(x)| \leq \|\xi\|_{E'} \|x\|_E$ pour tout $\xi \in E'$ donc $J(x)$ est continue sur $(E', \|\cdot\|_{E'})$ et $\|J(x)\|_{E''} \leq \|x\|_E$.

Etape 2 : Montrons que J est une isométrie. Ce point sera démontré ultérieurement, grâce au théorème de Hahn Banach. Il nécessite la caractérisation de la norme par dualité

$$\|x\|_E = \sup\{\xi(x); \xi \in E', \|\xi\|_{E'} \leq 1\}. \square$$

Ainsi, E est toujours isométrique à un sev de E'' . Les espaces de Banach pour lesquels J est surjective sont appelés **espaces de Banach réflexifs** : cette propriété est très importante quand on manipule les topologies faibles : elle permet que la boule unité fermée soit compacte pour la topologie faible.

3.6 Au programme de l'interrogation

En interrogation, sont exigibles

- preuve de la continuité d'une application linéaire et calcul de sa norme subordonnée, sur des exemples simples tels que ceux traités en cours ou en TD,
- idem pour une application multi-linéaire,

3.7 Quelques exercices corrigés

Exercice 3.1 : [Ciarlet] On note $\|\cdot\|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$. On note $\rho(A) := \sup\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

1/ Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2/ Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cad vérifiant $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$). Montrer que $\|A\| \geq \rho(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3/ Montrer que, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un réel $\epsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$.

4/ Montrer que $A^n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssi $\rho(A) < 1$.

5/ Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$.

SOLUTION :

1/ Utiliser $\|Ax\|_2^2 = \langle x, A^*Ax \rangle$ et diagonaliser la matrice symétrique A^*A dans une bon.

2/ Considérer un vecteur propre.

3/ Il existe $U \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure. Soit $D_\delta := \text{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$. En calculant $D_\delta^{-1}TD_\delta$, on voit que, pour $\delta > 0$ assez petit, on aura $\|D_\delta^{-1}TD_\delta\|_\infty < \rho(A) + \epsilon$ (cela fait apparaître δ^{j-i} en facteur du terme surdiagonal d'indices (i, j)). Alors $\|A\| := \|(D_\delta U)^{-1}AD_\delta U\|_\infty$ répond à la question.

4/ Invoquer l'équivalence des normes et utiliser la norme de la question précédente.

5/ On a, grâce à la question 2, $\rho(A) = \rho(A^k)^{1/k} \leq \|A^k\|^{1/k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour conclure, on va montrer que, pour tout ϵ , il existe $k_0 = k_0(\epsilon)$ tel que $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon$ pour tout $k \geq k_0$. Soit $\epsilon > 0$. La matrice $A_\epsilon := \frac{A}{\rho(A) + \epsilon}$ satisfait $\rho(A_\epsilon) < 1$, donc d'après la question précédente, $A_\epsilon^k \rightarrow 0$ quand $[k \rightarrow \infty]$. En particulier, il existe k_0 tel que $\|A_\epsilon^k\| = \frac{\|A^k\|}{(\rho(A) + \epsilon)^k} \leq 1$ pour tout $k \geq k_0$. Ceci fournit $\|A^k\| \leq (\rho(A) + \epsilon)^k$, cad $\|A^k\|^{1/k} \leq (\rho(A) + \epsilon)$ pour tout $k \geq k_0$.

Exercice 3.2 : Montrer que la formule linéaire $T : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(0)$ est continue vis à vis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour la norme $\|\cdot\|_1$.

SOLUTION : $|T(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$. Par absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|T(f)| \leq C\|f\|_1, \forall f \in C^0([0, 1])$. Considérons $\theta \in C_c^0((-1, 1), \mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$ et $f_n := n\theta(nx)$. Alors

$$n = |f_n(0)| \leq C\|f_n\|_1 = \|\theta\|_1 : \text{contradiction.}$$

Exercice 3.3 : On considère l'espace $c_0 = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites de nombres réels convergeant vers zéro, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que son dual est isométrique à $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : (c_0)' = l^1$.

SOLUTION :

Etape 1 : $l^1 \subset (c_0)'$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. La forme linéaire $x \in c^0 \mapsto \sum_{n=0}^\infty x_n u_n$ est

continue car

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| |u_n| \leq \|x\|_{l^\infty} \|u\|_{l^1}.$$

Étape 2 : $(c^0)' \subset l^1$. Soit $\xi \in (c^0)'$ et $u_n := \xi(e_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tel que $|u_n| = \xi(\epsilon_n e_n)$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N |u_n| = \xi \left(\sum_{n=0}^N \epsilon_n e_n \right) \leq \|\xi\|_{(c^0)'},$$

les sommes partielles sont uniformément majorées donc $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Montrons que $\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n$ pour tout $x \in c^0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Soit $x \in c^0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leq \epsilon / \|\xi\|_{(c^0)'}$, $\forall n > N$. Alors

$$\left| \xi(x) - \sum_{n=0}^N x_n u_n \right| = |\xi(x - x 1_{[-N, N]})| \leq \|\xi\|_{(c^0)'} \frac{\epsilon}{\|\xi\|_{(c^0)'}} = \epsilon.$$

Exercice 3.5 :

Soit (X, ν) un espace mesuré σ -fini et $p, p' \in [1, \infty]$ des exposants conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1. Soit $f \in L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu)$. Montrer que

$$\begin{aligned} \Phi(f) : L^p(X, \mathbb{C}, \nu) &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \int_X g f d\nu \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$.

2. Montrer que $\Phi : L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu) \rightarrow \left(L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \right)'$ est une isométrie.

SOLUTION :

1. L'inégalité de Hölder justifie la continuité et $\|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \leq \|f\|_{L^{p'}}$.

2. Soit $f \in L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu)$. Montrons que $\|\Phi(f)\|_{(L^p)'} = \|f\|_{L^{p'}}$. On a $f = |f|u$ où u est une fonction mesurable de module 1.

1er cas : $1 < p < \infty$. La fonction $g := \bar{u}|f|^{p'-1}$ appartient à $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ car $p(p'-1) = p'$ et

$$\|g\|_{L^p} = \left(\int_X |g|^p d\nu \right)^{1/p} = \left(\int_X |f|^{p'} d\nu \right)^{1/p} = \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}.$$

On a

$$\Phi(f).g = \int_X u |f| \bar{u} |f|^{p'-1} d\nu = \|f\|_{L^{p'}}^{p'}$$

et

$$|\Phi(f).g| \leq \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|g\|_{L^p} = \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$$

donc

$$\|f\|_{L^{p'}}^{p'} \leq \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$$

ce qui fournit la conclusion, puisque $p' - \frac{p'}{p} = 1$.

2e cas : $p = \infty$. Alors $g := \bar{u} \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$, $\|g\|_{L^\infty} = 1$ et $\Phi(f).g = \|f\|_{L^1}$ donc $\|\Phi(f)\|_{(L^\infty)'} \geq \|f\|_{L^1}$.

3e cas : $p = 1$. Soit $A \subset X$ mesurable de mesure finie. Alors $g := \bar{u}1_A$ appartient à $L^1(X, \mathbb{C}, \nu)$,

$$\Phi(f).g = \int_A u|f|\bar{u}d\nu = \int_A |f|d\nu$$

et

$$|\Phi(f).g| \leq \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \|g\|_{L^1} = \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \nu(A),$$

donc

$$\int_A |f|d\nu \leq \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \nu(A).$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq \|\Phi(f)\|_{(L^1)'}$ (voir Lemme 2 ci-dessous).

Lemme 2 Soit (X, ν) un espace mesuré σ -fini, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ν -mesurable et $C > 0$.

$\left(\int_A |f|d\nu \leq C\nu(A), \forall A \subset X \text{ mesurable de mesure finie} \right) \Rightarrow \left(f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu) \text{ et } \|f\|_{L^\infty} \leq C \right)$.

Preuve du Lemme 2 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de X en ensembles de mesure finie et $B := \{|f| > C\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \int_X 1_{B \cap X_n} (|f| - C) d\nu \text{ car } (|f| - C) > 0 \text{ sur } B \cap X_n,$$

et

$$\int_X 1_{B \cap X_n} (|f| - C) d\nu = \int_{B \cap X_n} |f| d\nu - C\nu(B \cap X_n) \leq 0 \text{ par hypothèse,}$$

donc $1_{B \cap X_n}(x)(|f(x)| - C) = 0$ pour ν -presque tout $x \in X$. Comme $(|f| - C) > 0$ sur $B \cap X_n$, on en déduit que $\nu(B \cap X_n) = 0$. Alors $\nu(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B \cap X_n) = 0$. $\square$

Exercice 3.6 : Cet exercice a pour but de démontrer la proposition suivante.

Proposition 28 Il existe des normes $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sous-multiplicatives et vérifiant $\|I_n\| = 1$, mais qui ne sont pas des normes subordonnées.

1. Dans cette question, on considère une norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ sur $\mathbb{R}^n$. Elle induit
 - une norme sur l'ev $(\mathbb{R}^n)^*$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} := \max\{|\varphi(x)|; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}.$$

- une norme sur l'ev $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} := \max\{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n}; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}.$$

Montrer que l'application

$$\left| \begin{array}{lll} L : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ (x, \varphi) & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ y & \mapsto & \varphi(y)x \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

est une isométrie $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}) \times ((\mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{(\mathbb{R}^n)^*}) \rightarrow (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)})$.

2. Le but de cette question est de démontrer le Lemme suivant.

Lemme 3 Soient deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que leurs normes subordonnées sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifient

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|'_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Alors $\|\cdot\| = \|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^n$.

On suppose les hypothèses du Lemme vérifiées.

(a) Montrer que

$$\alpha(x) \leq \beta(\varphi), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\},$$

où

$$\alpha(x) := \frac{\|x\|}{\|x\|'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \beta(\varphi) := \frac{\|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*}}{\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*}}, \quad \forall \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}.$$

(b) Montrer que $C := \sup\{\alpha(\tilde{x}); \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ est fini et atteint, cad qu'il existe $x_* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $C = \alpha(x_*)$.

(c) Montrer que, pour tout $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\beta(\varphi) \leq C$.

On pourra se ramener au cas où $\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1$.

(d) Dédire des questions (a) et (c) que $\beta \equiv C$ sur $(\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$.

(e) Montrer que $\|x\| = \max\{|\varphi(x)|; \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ et } \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1\}$.

(f) En déduire que $\|x\| = C\|x\|'$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(g) En déduire que $\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|'_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

3. Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$ qui induisent des normes **distinctes** sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'expression

$$\|f\|_* := \max\{\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}; \|f\|'_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}\}, \quad \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui est sousmultiplicative et vérifie $\|I_n\|_* = 1$.

4. En appliquant le Lemme, montrer que $\|\cdot\|_*$ n'est pas une norme subordonnée.

5. Proposer deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^n$ auxquelles la construction précédente s'applique.

SOLUTION :

1. On a

$$\begin{aligned} \|L(x, \varphi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} &= \max\{\|\varphi(y)x\|_{\mathbb{R}^n}; y \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|y\|_{\mathbb{R}^n} = 1\} \\ &= \|x\|_{\mathbb{R}^n} \max\{|\varphi(y)|; y \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|y\|_{\mathbb{R}^n} = 1\} \text{ axiome (N2)} \\ &= \|x\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*}. \end{aligned}$$

2. (a) On déduit de la question précédente que $\|x\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \leq \|x\|'_{\mathbb{R}^n} \|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*}$ pour tout $(x, \varphi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. Lorsque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$, on peut diviser cette inégalité par $\|x\|'_{\mathbb{R}^n} \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*}$ car c'est une quantité > 0 (axiome (N1) de norme).

(b) Par l'axiome (N2) de norme, on a

$$\sup\{\alpha(\tilde{x}); \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} = \sup\{\|\tilde{x}\|; \|\tilde{x}\|' = 1\}$$

La sphère unité $S' := \{x \in \mathbb{R}^n; \|\tilde{x}\|' = 1\}$ est compacte (fermée bornée en dimension finie) et $\|\cdot\|$ est une application continue sur S' donc elle est bornée sur S' et atteint ses bornes. En conséquence C est fini et atteint.

(c) Soit $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que $\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1$. On a, par définition

$$\begin{aligned}\|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*} &= \max \left\{ \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|'}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \alpha(x); x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \\ &\leq \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \max \{ \alpha(x); x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \}\end{aligned}$$

donc

$$\beta(\varphi) = \frac{\|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*}}{\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*}} \leq C := \max \{ \alpha(x); x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \}.$$

(d) On déduit de (a) et (c) que

$$\alpha(x) \leq \beta(\varphi) \leq C = \alpha(x_*), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*.$$

En testant avec $x = x_*$, on obtient $\beta(\varphi) = C = \alpha(x_*)$, $\forall \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$.

(e) Corollaire Hahn-Banach, en dimension finie.

(f) On a

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup \{ |\varphi(x)|; \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ et } \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1 \} \\ &= \sup \{ |\varphi(x)|; \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ et } \|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*} = C \} \\ &= C \sup \{ |\varphi(x)|; \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ et } \|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1 \} = C \|x\|' .\end{aligned}$$

(g) On a

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} &= \sup \{ \|f(x)\|; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\| = 1 \} \\ &= \sup \{ C \|f(x)\|'; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|' = \frac{1}{C} \} \\ &= \sup \{ \|f(x)\|'; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|' = 1 \} = \|f\|'_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} .\end{aligned}$$

3. On utilise $\max\{ab; a'b'\} \leq \max\{a, a'\} \max\{b, b'\}$, $\forall a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

4. ...

5. $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ génèrent deux normes subordonnées distinctes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: cela se voit sur leur formule explicite (max des sommes sur les lignes/colonnes).

Chapitre 4

Séries de Fourier

Le but de ce chapitre est de mettre en place les résultats classiques, de nature non hilbertienne, concernant les séries de Fourier et leur convergence. Les séries de Fourier seront une illustration importante de la théorie des espaces de Hilbert que nous développerons au prochain chapitre.

Par convention, nous noterons

$$\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt, \quad \forall f \in L^1(0, 2\pi),$$

$$\|g\|_2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt, \quad \forall g \in L^2(0, 2\pi),$$

de sorte que les fonctions $e_k : t \mapsto e^{ikt}$ vérifient $\|e_k\|_1 = \|e_k\|_2 = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

4.1 Coefficients de Fourier

4.1.1 Définition, règles de calcul

Définition 21 Pour $f \in L^1((0, 2\pi), \mathbb{C})$, on définit les **coefficients de Fourier** de f

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 29 1. Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction 2π -périodique et $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$\left| \begin{array}{ccc} (\tau_a f) : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ & t & \mapsto f(t - a) \end{array} \right.$$

alors $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. Pour $f \in L^1((0, 2\pi), \mathbb{C})$, $c_n(t \mapsto e^{ikt} f(t)) = c_{n-k}(f)$ pour tous $n, k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonctions 2π -périodiques, on définit

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) g(t - s) ds,$$

et alors $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. Si $f \in C^1([0, 2\pi])$ est 2π -périodique, alors $c_n(f') = i n c_n(f)$.

Exercice : Démontrer ces énoncés, en utilisant des manipulations élémentaires : CVAR, IPP, théorème de Fubini.

On constate en particulier que la transformée de Fourier transforme un produit de convolution (de fonctions) en un produit (de coefficients de Fourier). Elle transforme également un produit (de fonctions) en un produit de convolution (des suites), sous des hypothèses adhoc, par exemple $f \in C^0 \cap C_{pm}^1$ et $g \in L_{loc}^\infty$. Exercice : Le démontrer.

Exemples :

- $c_n(e_k) = \delta_{n,k}$ pour tout $n, k \in \mathbb{Z}$. Les polynômes trigonométriques sont les fonctions dont les coefficients de Fourier sont à support fini.
- Pour $\epsilon \in (0, \pi)$, la fonction signal $\sigma_\epsilon := 1_{[-\epsilon, \epsilon]}$ (faire un dessin) admet pour coefficients de Fourier

$$c_n(\sigma_\epsilon) = \begin{cases} \frac{\sin(n\epsilon)}{\pi n} & \text{si } n \neq 0, \\ \frac{\epsilon}{\pi} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

- la fonction triangle $\Delta_\epsilon := \left(1 - \frac{|x|}{\epsilon}\right)_+$ (faire un dessin) vérifie $\Delta_{2\epsilon} = \frac{\pi}{\epsilon} \sigma_\epsilon * \sigma_\epsilon$ donc ses coefficients de Fourier sont $c_n(\Delta_{2\epsilon}) = \frac{\pi}{\epsilon} c_n(\sigma_\epsilon)^2$,

$$c_n(\Delta_{2\epsilon}) = \begin{cases} \frac{\sin(n\epsilon)^2}{\pi n^2} & \text{si } n \neq 0, \\ \frac{\epsilon}{\pi} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

4.1.2 Décroissance et régularité

- Proposition 30** 1. Lemme de Riemann-Lebesgue : Si $f \in L^1(0, 2\pi)$ alors $c_n(f) = o_{n \rightarrow \infty}(1)$.
2. Si $f \in C^0 \cap C_{pm}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π -périodique, alors $c_n(f') = inc_n(f)$ donc $c_n(f) = o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Si $f \in C^k([0, 2\pi])$ est 2π -périodique, alors $c_n(f) = o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)$.
4. Si $f \in L^2(0, 2\pi)$ alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$.

Preuve :

1. Pour $f \in C^1([0, 2\pi])$, on fait une IPP ; puis on utilise la densité de $C^1([0, 2\pi])$ dans $(L^1(0, 2\pi), \|\cdot\|_1)$.
2. On fait une IPP : les termes de bord disparaissent par 2π -périodicité.
3. On fait k IPP : les termes de bord disparaissent par 2π -périodicité.
4. On utilise les notations de la section suivante. La décomposition $f = D_N * f + (f - D_N * f)$ est orthogonale dans $L^2(0, 2\pi)$ (calcul élémentaire), donc, par le théorème de Pythagore, $\|f\|_2^2 = \|D_N * f\|_2^2 + \|f - D_N * f\|_2^2$. En particulier,

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 = \|D_N * f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

d'où la conclusion (terme général positif, sommes partielles uniformément majorées).

Remarque 5 L'énoncé 1 se reformule de la façon suivante : l'application $f \in L^1(0, 2\pi) \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est à valeurs dans $c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Il s'agit d'une application linéaire continue de $(L^1(0, 2\pi), \|\cdot\|_1)$ dans $(c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$, de norme = 1 (atteinte sur les e_k notamment).

Il est légitime de se demander si cette application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{F} : & \left(L^1(0, 2\pi), \|\cdot\|_1 \right) & \rightarrow & \left(c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty \right) \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

est injective et/ou surjective.

Elle est effectivement injective *Exercice* : Le démontrer avec le thm de Fejer L^1 (ce sera fait en TD)

En revanche elle n'est pas surjective. Ceci sera démontré ultérieurement, de façon abstraite (et courte), en appliquant le thm d'isomorphisme de Banach.

Mais on peut aussi le montrer de manière plus élémentaire (et longue). Par exemple, on peut commencer par établir que, pour toute fonction $f \in L^1(0, 2\pi)$, la série $\sum \frac{b_n(f)}{n}$ converge (voir le livre 'Suites et séries' de Jean Combes, pages 180 et 181). En conséquence, il n'existe pas de fonction $f \in L^1(0, 2\pi)$ telle que $b_n(f) = \frac{1}{\ln(n)}$ pour tout $n \geq 2$, car $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} = +\infty$.

Remarque 6 L'énoncé 4 se reformule de la façon suivante : la restriction de $\mathcal{F}$ à $L^2(0, 2\pi)$ est une application linéaire continue de $(L^2(0, 2\pi), \|\cdot\|_2) \rightarrow (l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ de norme = 1 (atteinte sur les e_k). Nous verrons au chapitre suivant qu'il s'agit en fait d'une isométrie, cad

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(0, 2\pi).$$

Remarque 7 Les énoncés 2 et 4 impliquent en particulier que, si $f \in C^0 \cap C_{pm}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π -périodique, alors $\sum |c_n(f)|$ converge car $|c_n(f)| \leq |c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}$. Autrement dit, la série de Fourier de f , $\sum c_n(f)e^{int}$, converge normalement cad converge dans $(C^0([0, 2\pi]), \|\cdot\|_{\infty})$, sa somme définit donc une fonction continue sur $[0, 2\pi]$.

Remarque 8 La proposition précédente souligne que la décroissance des coefficients de Fourier est liée à la régularité de la fonction : plus la fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite. Cela se constate très bien sur les exemples de la section précédente : Δ_{ϵ} est plus régulière que σ_{ϵ} et ses coefficients de Fourier décroissent effectivement plus vite. Ces exemples illustrent pas ailleurs l'optimalité des conditions suffisantes ci-dessus.

On peut même montrer, en utilisant de l'analyse complexe, que pour $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique, f est analytique ssi il existe $\alpha > 0$ tel que $c_n(f) = O(e^{-\alpha|n|})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4.1.3 Noyau de Dirichlet et noyau de Fejer

Définition 22 On définit le *noyau de Dirichlet*

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin[(N+1/2)t]}{\sin(t/2)}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*,$$

et le *noyau de Fejer*

$$K_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{\sin[(N+1/2)t]^2}{N \sin(t/2)^2}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $f \in L^1((0, 2\pi), \mathbb{C})$, on définit la **série de Fourier de f** (convergente ou non)

$$\sum c_n(f)e^{int},$$

les *sommes partielles de la série de Fourier de f*

$$\sum_{n=-N}^N c_n(f)e^{int} = (D_N * f)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(t-s)f(s)ds, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

et leur *moyenne de Césaro*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (D_n * f)(t) = (K_N * f)(t), \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice : Démontrer ces formules, qui résultent de calculs simples sur les sommes géométriques et d'interversions entre une somme finie et une intégrale.

On remarquera, en particulier, que $K_N \geq 0$ et que

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_N(t)| dt = \|K_N\|_1, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

En revanche, D_N change de signe, si bien que

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(t) dt, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

mais $\|D_N\|_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$ (nous le démontrerons ultérieurement).

4.2 Théorème de Fejer

Théorème 5 (Théorème de Fejer) *Si $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction 2π -périodique, alors $\|f - K_N * f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.*

Remarque 9 $K_N * f$ est la moyenne de Césaro des $D_N * f$ donc elle a de meilleures propriétés de convergence que $D_N * f$. La raison en est la suivante : D_N n'est pas une approximation de l'unité car elle n'a pas de signe ; en revanche K_N est une approximation de l'unité, parce qu'elle est positive.

Preuve du Théorème de Féjer : Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π -périodique et $\epsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue : il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x - t)| < \epsilon/2$ pour tout $t, x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|t| < \delta$.

Soit $x \in [-\pi, \pi]$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - (K_N * f)(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - t)] K_N(t) dt \right| \quad \text{car } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt = 1 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x - t)| K_N(t) dt \quad \text{car } K_N \geq 0 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |f(x) - f(x - t)| K_N(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi N} \int_{\delta \leq |t| < \pi} |f(x) - f(x - t)| \frac{\sin[(N+1/2)t]^2}{\sin[t/2]^2} dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{N \sin[\delta/2]^2}. \end{aligned}$$

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2\|f\|_\infty}{N_0 \sin[\delta/2]^2} < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $N \geq N_0$, on obtient

$$|f(x) - (K_N * f)(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$$

cad $\|f - K_N * f\|_\infty \leq \epsilon$. Ceci montre que $\|f - K_N * f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. □

Corollaire 2 *Si $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ et si sa série de Fourier converge simplement alors sa somme coïncide avec f partout.*

Preuve : Notons $g(t)$ la somme de la série de Fourier $g(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} (D_N * f)(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Alors (thm de Césaro) $(K_N * f)(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Or (thm de Fejer) $(K_N * f)(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Donc (unicité de la limite simple) $g(t) = f(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. □

Remarque 10 Attention, pour $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, la série de Fourier de f peut ne pas converger simplement! L'hypothèse "et si sa série de Fourier converge simplement" est donc très importante dans l'énoncé ci-dessus. L'existence d'une fonction $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ dont la série de Fourier ne converge pas simplement peut se faire avec des arguments abstraits : il s'agit d'une application du thm de Banach Steinhauss, qu'on développera plus tard dans le cours.

Mais on peut aussi construire explicitement une telle fonction : voir le livre 'Les contre-exemples en mathématiques' de Bertrand Hauchecorne, pages 115, 116, 117, ou le livre 'Suites et séries' de Jean Combes, pages 194 et 195.

Remarque 11 Pour $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, si on veut que la série de Fourier de f converge uniformément vers f , cad converge vers f dans $(C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, il faut ajouter une hypothèse, par exemple $f \in C^0 \cap C_{pm}^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$: voir thm de Dirichlet, qui suit.

On peut également montrer que, pour tout $f \in L^p(0, 2\pi)$ alors $\|K_N * f - f\|_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ (thm de Fejer L^p). Ce sera démontré en TD pour $p = 1$. (pour la preuve avec p quelconque $\in [1, \infty)$, voir le livre 'Elements d'analyse pour l'agrégation' de Zuily-Queffelec, pages 82 et 82).

4.3 Théorème de Dirichlet

Théorème 6 (Théorème de Dirichlet) 1. Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$ et $x \in [0, 2\pi]$. Si f admet au point x des limites à droite $f(x+0)$ et à gauche $f(x-0)$ et si les fonctions $t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ et $t \mapsto \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}$ sont bornées au voisinage de $t = 0^+$ alors

$$(D_N * f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

2. Si $f \in C^0 \cap C_{pm}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π -périodique alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur : $\|D_N * f - f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Preuve :

1. La parité de D_N justifie

$$(D_N * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x-s) + f(x+s)] \frac{\sin[(N+1/2)s]}{\sin(s/2)} ds$$

Alors

$$(D_N * f)(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x-s)-f(x-0)}{\sin(s/2)} \sin[(N+1/2)s] ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+s)-f(x+0)}{\sin(s/2)} \sin[(N+1/2)s] ds.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que les fonctions $s \mapsto \frac{f(x\pm s)-f(x\pm 0)}{\sin(s/2)}$ sont $L^1(0, \pi)$ (Lemme de Riemann Lebesgue). Ces fonctions est intégrables sur $[\delta, \pi]$ pour tout $\delta > 0$, car le dénominateur y est minoré par $\sin(\delta/2) > 0$. En utilisant l'inégalité de convexité $\sin(y) \geq \frac{2}{\pi}y, \forall y \in (0, \pi/2)$, on obtient, pour s assez petit

$$\left| \frac{f(x \pm s) - f(x \pm 0)}{\sin(s/2)} \right| = \left| \frac{f(x \pm s) - f(x \pm 0)}{s/2} \frac{s/2}{\sin(s/2)} \right| \leq M \frac{\pi}{2}$$

où M majore $t \mapsto \frac{f(x\pm t)-f(x\pm 0)}{t}$ au voisinage de $t = 0^+$. Ainsi, les fonctions $s \mapsto \frac{f(x\pm s)-f(x\pm 0)}{\sin(s/2)}$ sont bien intégrables en $s = 0^+$.

2. Soit $f \in C^0 \cap C_{pm}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après le 1., $D_N * f$ converge simplement vers f :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int}, \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Or la série $\sum c_n(f) e^{int}$ converge normalement (voir Remarque 7). Donc $(D_N * f)$ converge uniformément vers f . $\square$

Remarque 12 (Comparaison Fejer/Dirichlet) *En affaiblissant la notion de convergence considérée (convergence uniforme au sens de Cesaro, au lieu de la convergence uniforme habituelle), on obtient une conclusion sous des hypothèses plus faibles ($f \in C^0$ au lieu de $f \in C^0 \cap C_{pm}^1$).*

Les hypothèses du théorème du théorème de Dirichlet sont optimales, au sens où, si f a une discontinuité de première espèce en x alors la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers f sur des intervalles de la forme $(x - \epsilon, x)$, à cause d'oscillations : c'est le **phénomène de Gibbs**, illustré dans l'exercice ci-dessous [voir Chambert Loir, tome 1, page 96].

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique définie par $f(x) = -1$ si $x \in [-\pi, 0)$ et $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi)$. Le théorème de Dirichlet s'applique :

- $(D_N * f)(0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$,
- $(D_N * f)(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t)$ pour tout $t \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$.

L'objectif est de montrer que $(D_{2N-1} * f)\left(\frac{\pi}{2N}\right)$ converge vers une limite $L > 1$, ce qui empêche $(D_n * f)$ de converger uniformément vers f sur des intervalles de la forme $(0, \epsilon)$ pour $\epsilon > 0$. On travaille ici avec les coefficients de Fourier

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que $a_n(f) = 0$, $b_n(f) = 0$ si n est pair, $b_n(f) = \frac{4}{n\pi}$ si n est impair et

$$D_{2N-1}(f)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}.$$

2. Etude des extrema de $(D_{2N-1} * f)$.

- (a) Montrer que $(D_{2N-1} * f)'(t) = \frac{\sin(2Nt)}{2 \sin(t)}$.
- (b) Montrer que $(D_{2N-1} * f)$ a des extrema locaux tous les $\frac{k\pi}{2N}$. Identifier les maxima et minima locaux.
- (c) Justifier que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right) - f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right) &= \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2N}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2N}} \frac{\sin(2Nt)}{2 \sin(t)} dt \\ &= \frac{1}{N\pi} \int_0^\pi \sin(y) \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{y+2k\pi}{2N}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{-y+2k\pi}{2N}\right)} \right) dy \end{aligned}$$

où

$$\sin\left(\frac{y+2k\pi}{2N}\right) - \sin\left(\frac{-y+2k\pi}{2N}\right) = 2 \sin\left(\frac{y}{2N}\right) \cos\left(\frac{2k\pi}{2N}\right) \geq 0$$

(d) En déduire que $f\left(\frac{\pi}{2N}\right) \geq f\left(\frac{3\pi}{2N}\right) \geq f\left(\frac{5\pi}{2N}\right) \geq \dots$

3. Montrer que

$$(D_{2N-1} * f)\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{1}{N\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{\sin(y/2N)} dy$$

4. En utilisant $n \sin(t/n) = \int_0^t \cos(u/n) du$, montrer que la suite $(n \sin(t/n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $t \in [0, \pi/2]$.

5. En déduire que $(D_{2N-1} * f)\left(\frac{\pi}{2N}\right)$ est décroissante et converge.

6. Montrer que $(D_{2N-1} * f)\left(\frac{\pi}{2N}\right)$ converge vers $L := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$ et conclure, en remarquant que $L = 1,178\dots > 1$.

Remarque 13 Si $g \in C_{pm}^0(\mathbb{R})$ alors elle n'a que des discontinuités de première espèce. On peut décrire g comme la somme d'une fonction continue et de fonctions de la forme $\lambda f(t - \tau)$, où la fonction f est celle de l'exercice précédent. Ainsi, on voit que le phénomène de Gibbs est universel : il se produit dès qu'il y a une discontinuité de première espèce.

Chapitre 5

Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert généralisent à la dimension infinie la notion d'espace Euclidien. On verra que la présence d'un produit scalaire (hypothèse géométrique) n'est pas suffisante et qu'il faut ajouter un hypothèse topologique de complétude. Dans tout le chapitre, le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Référence : Hirsch-Lacombe.

5.1 Espaces préhilbertiens

Definition 23 (Produit scalaire, espace préhilbertien) Sur un $\mathbb{R}$ - (resp. $\mathbb{C}$ -) ev E , un **produit scalaire** est une forme $(x, y) \in E \times E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$

- (PS1) : bilinéaire (resp. sesquilinéaire) : pour tous $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \text{linéarité à droite} \quad & \langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle. \\ \text{(anti)linéarité à gauche} \quad & \langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle. \end{aligned}$$

- (PS2) : symétrique (resp. hermitienne) : $\forall x, y \in H, \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
- (PS3) : définie : $\forall x \in H, (\langle x, x \rangle = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$
- (PS4) : positive : $\forall x \in H, \langle x, x \rangle \geq 0$.

Alors $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien** (eph) et $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E . Un **espace euclidien** est un eph sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

Les résultats des chapitres précédents sur les evn et les em s'appliquent donc, en particulier, aux eph.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$, considéré comme ev sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et muni du produit scalaire euclidien,
- $\mathbb{C}^n$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire hermitien $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j$,
- $\mathbb{C}^n$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle := \Re \left(\sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j \right)$.
- $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_j$.
- $L^2((0, 1), \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Proposition 31 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eph. Alors on a

1. l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \forall x, y \in H,$$

avec égalité ssi x et y sont colinéaires,

2. l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in E.$$

3. les formules de polarisation :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \forall x, y \in E \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{8} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2), \forall x, y \in E \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

L'inégalité de CYS équivaut à la continuité sur $(E, \|\cdot\|)$ de la forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'interprétation géométrique de l'identité du parallélogramme, sur le parallélogramme de sommets $(0, x, x + y, y)$ est la suivante (faire un dessin) : la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Exercice : Montrer qu'un evn $(E, \|\cdot\|)$ qui vérifie l'identité du parallélogramme est un eph.

Preuve :

1. L'inégalité est évidente si x et y sont colinéaires et c'est alors une égalité. Soient $x, y \in H$ non colinéaires.

Premier cas : $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$. Alors

$$0 < \langle x + ty, x + ty \rangle = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2, \forall t \in \mathbb{R},$$

donc ce polynôme de degré 2 en t n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$: son discriminant est < 0 , cad

$$\langle x, y \rangle^2 < \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Deuxième cas : $\langle x, y \rangle \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$|\langle x, y \rangle| = e^{i\theta} \langle x, y \rangle = \langle x, e^{i\theta} y \rangle < \|x\| \|e^{i\theta} y\| = \|x\| \|y\|.$$

2. On développe le carré.

3. On développe les 4 carrés du membre de droite et on constate les simplifications. □

Definition 24 (Famille orthogonale/orthonormée) Dans un eph $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, une famille $(x_j)_{j \in J}$ est **orthogonale** (og) si

$$\langle x_j, x_k \rangle = 0, \forall j, k \in J, j \neq k$$

orthonormée (on) si

$$\langle x_j, x_k \rangle = \delta_{j,k}, \forall j, k \in J, j \neq k.$$

Exemples :

- La base canonique $(e_n)_{1 \leq n \leq N}$ de $\mathbb{C}^N$ est une famille orthonormée de $\mathbb{C}^N$.
- $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.
- $(e^{i2\pi nt})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2((0, 1), \mathbb{C})$.
- $\{\sqrt{2} \cos(2\pi nt), \sqrt{2} \sin(2\pi kt); n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille orthonormée de $L^2((0, 1), \mathbb{R})$.
- $(\sqrt{2} \sin(n\pi t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de $L^2((0, 1), \mathbb{R})$.
- $(e^{i2\pi nt} 1_{[k, k+1]})_{(n, k) \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposition 32 (Pythagore) Si $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une famille **finie** orthogonale alors

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Preuve : On développe le carré, les termes croisés disparaissent par orthogonalité. $\square$

Définition 25 (Orthogonal) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un eph et A une partie de E . L'**orthogonal** de A est l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in E, \langle a, x \rangle = 0, \forall a \in A\}.$$

Proposition 33 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph et A, B des parties de E . Alors

1. $A^\perp$ est un sev fermé de $(E, \|\cdot\|)$,
2. $(A \subset B) \Rightarrow (B^\perp \subset A^\perp)$,
3. $A^\perp = (\overline{A})^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

Preuve :

1. Pour $a \in A$, on a $a^\perp = \ker[\langle a, \cdot \rangle]$. Or la forme linéaire $x \mapsto \langle a, x \rangle$ est continue $(E, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{K}$ (Cauchy-Schwarz), donc $a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|)$. Ainsi, $A^\perp = \bigcap_{a \in A} a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

2. Si $A \subset B$ alors

$$B^\perp = \bigcap_{a \in B} a^\perp \subset \bigcap_{a \in A} a^\perp = A^\perp.$$

3. L'inclusion $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$ vient du 1. et de $A \subset \overline{A}$. Montrons $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$. Si $x \in A^\perp$ et $a \in \overline{A}$, on peut écrire $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n$ avec $a_n \in A$. On a alors $\langle a, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n, x \rangle = 0$. Cela pour tout $a \in \overline{A}$ et pour tout $x \in A^\perp$.

L'inclusion $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$ vient du 2. et de $A \subset \text{Vect}(A)$. Montrons $A^\perp \subset (\text{Vect}(A))^\perp$. Soit $x \in A^\perp$ et soit $y = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i$ un élément de $\text{Vect}(A)$, on a $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle a_i, x \rangle = 0$. Comme cela est vrai pour tout $y \in \text{Vect}(A)$, on en déduit $x \in (\text{Vect}(A))^\perp$. $\square$

5.2 Espace de Hilbert et théorème de projection

5.2.1 Espace de Hilbert

Définition 26 (Espace de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ complet pour la norme $\|\cdot\|$ associée à son produit scalaire $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Exemples :

- $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) muni du produit scalaire euclidien (resp. hermitien) est un Hilbert.
- $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, muni de son produit scalaire canonique est un Hilbert.
- $L^2((0, 1), \mathbb{R})$, muni de son ps canonique, est un Hilbert
- Dans un Hilbert, tout sev fermé est un Hilbert (CNS).

Contre-exemple :

- $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire de $L^2((0, 1), \mathbb{R})$ n'est pas un Hilbert (pas fermé).
- Dans un Hilbert, un sev qui n'est pas fermé (muni du ps de H) n'est pas un Hilbert.

5.2.2 Théorème de projection sur un sev de dimension finie

Notre but est de généraliser à la dimension infinie le résultat élémentaire suivant.

Proposition 34 (Projection sur un sev de dimension finie) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph, F un sev de E **de dimension finie** et $(b_1, \dots, b_n)$ une base orthonormée de F .

1. Pour tout $x \in E$, $\text{dist}(x, F) := \inf\{\|x - y\|; y \in F\}$ est atteinte au point $P_F(x) := \sum_{j=1}^n \langle x, b_j \rangle b_j$ et

$$\text{dist}(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k \rangle|^2, \forall x \in E. \quad (5.1)$$

2. La projection orthogonale $P_F : E \rightarrow F$ est linéaire continue de norme $= 1$.
3. De plus $E = F \oplus F^\perp$.

Preuve :

1. On vérifie facilement que $x - P_F(x) \perp F$ donc (Pythagore)

$$\|x - y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \geq \|x - P_F(x)\|^2, \quad \forall y \in F.$$

Ainsi (développer le carré)

$$\text{dist}(x, F)^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k \rangle|^2.$$

2. P_F est clairement linéaire. De plus (développer le carré)

$$0 \leq \text{dist}(x, F)^2 = \left\| x - \sum_{j=1}^n \langle x, b_j \rangle b_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle x, b_j \rangle|^2$$

donc (Pythagore)

$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle x, b_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ceci montre que P_F est continue et $\|P_F\| \leq 1$. Or, $P_F(y) = y$ pour tout $y \in F$ donc $\|P_F\| = 1$.

3. Il est clair que $F \cap F^\perp = \{0\}$. De plus, tout $x \in E$ s'écrit $x = P_F(x) + [x - P_F(x)]$ où $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ donc $E = F \oplus F^\perp$. $\square$

Exemples/applications

- Existence et unicité du polynôme (de degré n) de meilleure approximation d'une fonction $f \in L^2(0, 1)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$: $\|f - P\|_2 = \min\{\|f - P\|_2; P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

Notez qu'en l'absence de cadre hilbertien, le polynôme (de degré n) de meilleure approximation reste défini mais n'est pas forcément unique.

Ex : $E = L^\infty(0, 1)$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, $f = 1_{[1/2, 1]}$ est à distance $1/2$ des fonctions affines (à cause de la discontinuité en $x = 1/2$) et cette distance est atteinte en beaucoup de fonctions affines (faire un dessin).

- Régression linéaire : pour $N \geq 2$, $x = (x_n)_{1 \leq n \leq N}$, $y = (y_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^N$ il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise $\sum_{n=1}^N |ax_n + b - y_n|^2$. On obtient (a, b) en projetant y orthogonalement sur $\text{Vect}\{x, z\}$ où $z := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$.

5.2.3 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 7 (Théorème de projection sur un convexe fermé) Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non vide.

1. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C(x) \in C$ tel que $\|x - P_C(x)\| = \text{dist}(x, C) := \inf\{\|x - y\|; y \in C\}$. Ce point est appelé 'projection de x sur C '.
2. Il est caractérisé par la propriété suivante (faire un dessin : angle obtus) :

$$P_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \Re \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0, \forall z \in C. \quad (5.2)$$

3. De plus $P_C : H \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne :

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

4. En particulier, si F est un sev fermé de H alors pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par

$$P_F(x) \in F \quad \text{et} \quad \Re \langle x - P_F(x), y \rangle = 0, \forall y \in F \quad \text{cad} \quad [x - P_F(x)] \perp F.$$

Il est important de connaître par coeur cet énoncé, cad ses hypothèses et ses 4 conclusions.

Application : Définition de l'espérance conditionnelle.

Exemple : $H = L^2((0, 1), \mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique est un Hilbert. $F := 1_{[0, 1/2]}^\perp$ est un sev fermé (de dimension infinie) de H . D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, pour tout $f \in L^2((0, 1), \mathbb{R})$, $P_F(f) = f - \langle f, \sqrt{2}1_{[0, 1/2]} \rangle \sqrt{2}1_{[0, 1/2]}$ est l'unique point de F vérifiant $\text{dist}_{\|\cdot\|_2}(f, F) = \|f - P_F(f)\|_2$.

Contre-exemples : Notez que, pour généraliser la Proposition 34 à la dimension infinie, on a utilisé

- une hypothèse de **complétude** sur l'eph E ,
- le caractère **fermé** sur sev F .

Les 2 contre-exemples ci-dessous montrent que ces 2 hypothèses sont nécessaires.

- $H_1 = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un eph, mais il n'est pas complet. Avec les notations de l'exemple précédent, $F_1 := F \cap C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un sev fermé de $(H_1, \|\cdot\|_2)$. En effet, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de F_1 qui converge vers un élément f de H_1 alors $f \in F_1$ (notez que la convergence **dans** $(H_1, \|\cdot\|_2)$ force la continuité de la limite : seule la condition d'orthogonalité reste à vérifier). Cependant, $\text{dist}_{\|\cdot\|_2}(f, F_1)$ n'est atteinte pour aucun $f \in H_1 \setminus F_1$. En effet, pour $f \in H_1 \setminus F_1$, en approximant $P_F(f)$ en norme $\|\cdot\|_2$ par des fonctions continues, on voit que $\text{dist}_{\|\cdot\|_2}(f, F_1) = \text{dist}_{\|\cdot\|_2}(f, F)$. Or, cette distance n'est atteinte qu'en $P_F(f) = f - \langle f, \sqrt{2}1_{[0, 1/2]} \rangle \sqrt{2}1_{[0, 1/2]}$ qui n'est pas continue. Ainsi $\|f - g\|_2 > \text{dist}_{\|\cdot\|_2}(f, F_1)$ pour tout $g \in F_1$.
- $H = L^2((0, 1), \mathbb{R})$ est un Hilbert, $F = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un sev de H , mais il n'est pas fermé. Pour $f \in H \setminus F$ alors $\text{dist}(f, F) = 0$ (densité). Cependant, il n'existe pas de $g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_2 = 0$. Idem avec $F = \mathbb{R}[X]$ (thm Weierstrass).

Preuve : L'outil-clef de cette preuve est l'égalité du parallélogramme. La preuve de caractérisation/lipschitzianité est courte mais subtile.

Soit $x \in H \setminus C$ et $d := \text{dist}(x, C) \in (0, \infty)$.

1. *Etape 1 : Existence* : Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C telle que $\|x - y_n\| \rightarrow d$ quand $[n \rightarrow \infty]$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\ &= 2 \left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right) - 4 \left\| x - \frac{y_m + y_n}{2} \right\|^2 \quad (\text{égalité du parallélogramme}) \\ &\leq 2 \left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right) - 4d^2 \quad \text{car } \frac{y_m + y_n}{2} \in C \quad (\text{convexité}). \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d^2 \leq \|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \epsilon^2/4, \forall n \geq n_0.$$

Alors, le calcul précédent montre que

$$\|y_m - y_n\| \leq \epsilon, \forall m, n \geq n_0.$$

Ceci montre que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(H, \|\cdot\|)$. Comme $(H, \|\cdot\|)$ est complet, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $x_C \in H$. Alors $x_C \in C$ (car C est fermé) et $\|x - x_C\| = d$. On a démontré l'existence d'au moins un point x_C de C réalisant $\text{dist}(x, C)$.

Etape 2 : Unicité : Si $x_C^1, x_C^2 \in C$ satisfont $\|x - x_C^1\| = \|x - x_C^2\| = d$ alors

$$\begin{aligned} \|x_C^1 - x_C^2\|^2 &= \|(x - x_C^1) - (x - x_C^2)\|^2 \\ &= 2 \left(\|x - x_C^1\|^2 + \|x - x_C^2\|^2 \right) - 4 \left\| x - \frac{x_C^1 + x_C^2}{2} \right\|^2 \quad (\text{égalité du parallélogramme}) \\ &\leq 4d^2 - 4d^2 \quad \text{car } \frac{x_C^1 + x_C^2}{2} \in C \quad (\text{convexité}) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x_C^1 = x_C^2$. Ceci montre que $\text{dist}(x, C)$ est atteinte en, au plus, un point de C .

Ces deux étapes légitiment la définition $P_F(x)$ comme l'**unique** point de C vérifiant $\|x - P_C(x)\| = \text{dist}(x, C)$.

2. $\Rightarrow$. Soit $z \in C$. Le vecteur $(1-t)P_C(x) + tz$ appartient à C pour tout $t \in [0, 1]$ (convexité) donc

$$0 \leq \left\| x - \left((1-t)P_C(x) + tz \right) \right\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2, \quad \forall t \in [0, 1].$$

En décomposant $x - \left((1-t)P_C(x) + tz \right) = [x - P_C(x)] - t[z - P_C(x)]$ et en développant le premier carré, on obtient

$$0 \leq -2t\Re\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle + t^2\|z - P_C(x)\|^2, \quad \forall t \in [0, 1].$$

On considère $t \in (0, 1]$, on divise cette relation par t (qui est > 0) et on obtient

$$0 \leq -2\Re\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle + t\|z - P_C(x)\|^2, \quad \forall t \in (0, 1].$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient $\Re\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$.

$\Leftarrow$. Réciproquement, supposons que $\tilde{x}_C \in C$ et

$$\Re\langle x - \tilde{x}_C, z - \tilde{x}_C \rangle \leq 0, \forall z \in C.$$

Alors, pour tout $z \in C$, on a

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|(x - \tilde{x}_C) - (z - \tilde{x}_C)\|^2 \\ &= \|x - \tilde{x}_C\|^2 + \|z - \tilde{x}_C\|^2 - 2\Re\langle x - \tilde{x}_C, z - \tilde{x}_C \rangle \\ &\geq \|x - \tilde{x}_C\|^2, \end{aligned}$$

donc $\|x - \tilde{x}_C\| = \text{dist}(x, C)$.

3. Soient $x, y \in H$. On a

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \left\| \left(P_C(x) - P_C(y) \right) + \left([x - P_C(x)] - [y - P_C(y)] \right) \right\|^2 \\ &= \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 + \|[x - P_C(x)] - [y - P_C(y)]\|^2 \\ &\quad - 2\Re\langle P_C(y) - P_C(x), x - P_C(x) \rangle - 2\Re\langle P_C(x) - P_C(y), y - P_C(y) \rangle \\ &\geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \text{ d'après la caractérisation précédente.}\end{aligned}$$

Ainsi $P_C : H \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne.

4. La structure s'év de F implique $\{z - P_C(x); z \in F\} = F$. Ainsi, $P_F(x)$ est l'unique point de C vérifiant $\Re\langle x - P_F(x), z \rangle \leq 0$ pour tout $z \in F$. En remplaçant z par $-z$ on en déduit que $\Re\langle x - P_F(x), z \rangle = 0$ pour tout $z \in F$. $\square$

Remarque 14 *Seule la complétude de $(C, \|\cdot\|)$ est utile dans la preuve, celle de H n'est donc pas vraiment nécessaire. L'énoncé reste donc vrai lorsque H est un **préhilbertien** et C une partie convexe et **complète** de H .*

Question pratique : Si F est un sev fermé de H , comment déterminer $P_F(x)$ et $\text{dist}(x, F)$?

– Si F est de dimension finie, on cherche une base orthonormée $(b_1, \dots, b_n)$ de F et on sait alors que

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^N \langle x, b_j \rangle b_j$$

et

$$\text{dist}(x, F)^2 = \|x - P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^N \langle x, b_j \rangle^2.$$

– Si F est de dimension infinie, on peut procéder de même avec une base hilbertienne de F , concept que nous développerons plus tard dans ce cours.

5.3 Conséquences du théorème de projection

5.3.1 Théorème du supplémentaire orthogonal

Théorème 8 (Théorème du supplémentaire orthogonal (TSO)) *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un Hilbert et F un sev fermé de H . Alors $H = F \oplus F^\perp$ et donc $(F^\perp)^\perp = F$.*

Preuve : Il est clair que $F \cap F^\perp = \{0\}$. De plus, tout $x \in E$ se décompose en $x = P_F(x) + [x - P_F(x)]$ où $P_F(x) \in F$ et $[x - P_F(x)] \in F^\perp$ (cf thm de projection). Donc $H = F \oplus F^\perp$.

Il est clair que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Réciproquement, Si $x \in (F^\perp)^\perp$ alors, en particulier, $x \perp [x - P_F(x)]$ donc

$$\|x - P_F(x)\|^2 = \langle x, x - P_F(x) \rangle - \langle P_F(x), x - P_F(x) \rangle = 0,$$

cad $x = P_F(x) \in F$. $\square$

Corollaire 3 (Critère de densité) *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace **de Hilbert** et F un sev de H . Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Preuve : On a

$$\begin{aligned}\left(F \text{ dense dans } E \right) &\Leftrightarrow \left(\overline{F} = E \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\overline{F}^\perp = \{0\} \right) \text{ d'après le TSO} \\ &\Leftrightarrow \left(F^\perp = \{0\} \right) \text{ car } \overline{F}^\perp = F^\perp. \square\end{aligned}$$

5.3.2 Dualité : théorème de Riesz

Théorème 9 (Thm de Riesz) Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert. Pour tout $\phi \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$, il existe une unique $f \in H$ tel que $\phi(h) = \langle f, h \rangle$ pour tout $h \in H$. De plus, $\|\phi\|_{\mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})} = \|f\|$.

Preuve : La preuve du théorème de Riesz repose sur le T.S.O. Comme ϕ est continue alors $\text{Ker}(\phi)$ est un sev fermé de H de codimension 1 donc $H = \text{Ker}(\phi) \oplus \text{Ker}(\phi)^\perp$ et $\text{Ker}(\phi)^\perp = \mathbb{R}e$ pour un certain $e \in H$ tel que $\|e\| = 1$. Soit $f := \phi(e)e$. Soit $h \in H$ et $h = h_1 + \lambda e$ une écriture adaptée à la décomposition en somme directe $H = \text{Ker}(\phi) \oplus \mathbb{K}e$. Alors $\phi(h) = \lambda\phi(e) = \langle f, h \rangle$. $\square$

5.4 Bases hilbertiennes

5.4.1 Définition, existence

Définition 27 (Base hilbertienne) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Une **base hilbertienne** de E est une famille orthonormée totale (l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans H).

Remarque 15 Il faut bien distinguer les concepts de **base algébrique** et de **base hilbertienne** : Une famille $(b_j)_{j \in J}$ est une **base algébrique** d'un ev E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire finie des b_j .

Théorème 10 Un Hilbert est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable.

Preuve : Rapellons qu'un evn est séparable ssi il admet une famille libre totale et dénombrable. Ceci démontre l'implication $\Leftarrow$. Réciproquement, si H est un Hilbert séparable et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre totale de E , on obtient une base hilbertienne de E en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Lorsque H est un Hilbert non séparable, il admet encore une base hilbertienne, mais elle n'est pas dénombrable ; la preuve repose sur l'axiome de Zorn. De plus, cette base est délicate à manipuler : en particulier, l'ensemble d'indices étant non dénombrable, on doit manipuler des familles sommables au lieu de séries convergentes.

5.4.2 Caractérisation par l'égalité de Bessel

Théorème 11 [Bessel Parseval] Soit E est un préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E . EQU :

1. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E ,
2. pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$, (égalité de Bessel)
3. pour tout $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$.

Preuve : Rappelons que, si $F_N := \text{Vect}(e_n; 0 \leq n \leq N)$ alors $P_{F_N}(x) = \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n$ et

$$\text{dist}(x, F_N) = \|x - P_{F_N}(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{n=0}^N |\langle x, e_n \rangle|^2}.$$

1 $\Rightarrow$ 2 : Supposons que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une base hilbertienne de E . Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{dist}(x, F_{N_0})^2 < \epsilon$. Alors, comme $F_{N_0} \subset F_N$, on a

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{n=0}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, F_N)^2 \leq \text{dist}(x, F_{N_0})^2 < \epsilon, \forall N \geq N_0.$$

Ceci montre que la série $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2$ converge et que sa somme vaut $\|x\|^2$.

2 $\Rightarrow$ 1 : Supposons que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$. Soit $x \in E$. On a

$$\|x - P_{F_N}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci montre que $\text{Vect}(e_n; n \in \mathbb{N})$ est dense dans $(E, \|\cdot\|)$.

2 $\Rightarrow$ 3 résulte des formules de polarisation.

3 $\Rightarrow$ 2 résulte de la définition de la norme $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. $\square$

Théorème 12 Soit E un préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E . Alors

1. l'application $J : x \in E \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une isométrie,
2. cette isométrie est surjective si et seulement si E est complet,
3. Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. De plus, cette série est commutativement convergente : pour tout $x \in E$ et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_{\sigma(n)} \rangle e_{\sigma(n)}$.

Remarque 16 Il faut bien comprendre ce que signifie $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

- La convergence de la série est au sens de la norme préhilbertienne de H :

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(x, \epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\| x - \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\| < \epsilon, \forall N \geq n_0.$$

En particulier, la convergence de la série n'a pas forcément lieu si on considère une autre norme que la norme hilbertienne de H !

- Notez que la série $\sum \langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans H , mais qu'elle n'est pas forcément absolument convergente : il se peut que la série $\sum |\langle x, e_n \rangle|$ diverge.
- Si H est un Hilbert non séparable, par exemple $H = l^2([0, 1])$, alors cet énoncé peut être généralisé, mais on ne peut pas se ramener à des séries, il faut manipuler des sommes de familles sommables, indexées par un ensemble non dénombrable.

Preuve :

1. L'aspect isométrie résulte de **1 $\Rightarrow$ 2** dans le thm précédent.
2. Si cette isométrie est surjective, alors $(E, \|\cdot\|)$ est isométrique à $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$, qui est complet, donc $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Réciproquement, supposons que E soit complet. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Notons $u_n := \sum_{j=0}^n x_j e_j$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E , car, pour $n < p$, on a (Pythagore)

$$\|u_n - u_p\|^2 = \sum_{j=n+1}^p |x_j|^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Comme E est complet, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E . Notons $x \in E$ sa limite. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a (CYS)

$$\langle x, e_j \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, e_j \rangle = x_j,$$

car la suite $(\langle u_n, e_j \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire en x_j , pour $n \geq j$. Ainsi, $J(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3. Soit $x \in E$. On a

$$\left\| x - \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\| = \text{dist}(x, F_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci montre que la série $\sum \langle x, e_n \rangle e_n$ converge dans $(H, \|\cdot\|)$ et que sa somme vaut x .

Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective. Il est clair que, si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E alors $(e_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une base hilbertienne de E . Ainsi, $x = \sum \langle x, e_{\sigma(n)} \rangle e_{\sigma(n)}$. $\square$

5.4.3 Application aux séries de Fourier

On muni le $\mathbb{C}$ -ev $L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

et de la norme associée

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

qui en font un espace de Hilbert. On définit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left| \begin{array}{lll} e_n : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ & t & \mapsto e^{int} \end{array} \right.$$

Théorème 13 $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$.

Preuve : Il s'agit clairement d'une famille orthonormée. Il suffit donc de montrer que l'ev des polynômes trigonométriques, $\text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e^{int}; n \in \mathbb{Z}\}$, est dense dans $(L^2((0, 2\pi), \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$.

Stratégie 1 : On applique le théorème de Stone Weierstrass. (cf compléments d'Arnaud Debussche)

Stratégie 2 : On utilise le Théorème Fejer. Soit $f \in L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Par densité de $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ dans $(L^2((0, 2\pi), \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$, il existe $g \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ telle que $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$. Grâce au théorème de Fejer, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|g - P\|_2 < \epsilon/2$. Alors $\|f - P\|_2 < \epsilon$. $\square$

Corollaire 4 1. Si $f \in L^2(0, 2\pi)$ alors la série $\sum c_n(f) e_n$ converge dans $L^2(0, 2\pi)$ et sa somme vaut $f : f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ dans $L^2(0, 2\pi)$.

2. Si $f, g \in L^2(0, 2\pi)$ alors

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

En particulier

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2,$$

autrement dit, l'application

$$\left| \begin{array}{lll} \mathcal{F} : & L^2(0, 2\pi) & \rightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ & f & \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

est une isométrie.

3. Si $f \in L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ et si sa série de Fourier $(D_N * f)_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $(0, 2\pi)$ alors sa somme coïncide avec f presque partout.

Remarque 17 Il faut être très prudent avec l'écriture $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$: elle signifie précisément

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - (D_N * f)(t)|^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Par exemple, en l'absence d'hypothèse supplémentaire, on n'est pas autorisé à évaluer cette égalité en un point donné $t \in [0, 2\pi]$, car la suite $(D_N * f(t))_{N \in \mathbb{N}}$ peut très bien ne pas converger dans $\mathbb{C}$. L'hypothèse de convergence simple dans l'énoncé 3 est donc importante.

Preuve : Les premiers énoncés résultent des thm 13 et 12. Montrons le dernier. On sait que $D_N * f \rightarrow f$ dans $L^2(0, 2\pi)$ donc (réciproque de Lebesgue) il existe une extraction ϕ telle que $D_{\phi(N)} * f(t) \rightarrow f(t)$ pour presque tout $t \in (0, 2\pi)$. Alors, par unicité de la limite p.p. de $D_{\phi(N)} * f$, on a $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{int}$ pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$. $\square$

5.4.4 Autres exemples de bases hilbertiennes

Des exemples de bases hilbertiennes :

1. les exponentielles complexes dans $L^2(\mathbb{T})$.
2. les polynômes orthogonaux :
 - polynômes de Legendre [Hirsch-lacombe, Ex 4, page 114]
 - polynômes d'Hermite [Hirsch-lacombe, Ex 5, page 114]
 - polynômes de Tchebycheff [Hirsch-lacombe, Ex 6, page 115]
 - polynômes de Laguerre [Hirsch-lacombe, Ex 7, page 114]
3. la base de Haar [Hirsch-lacombe, Ex 13, page 114]
4. $(e^{i2\pi nt} 1_{[k, k+1]})_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Des exemples d'Hilberts non séparables

1. $l^2(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$
2. voir [Hirsch-Lacombe, Ex 10, page 116]

5.5 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation

- toutes les définitions,
- énoncé et preuve des inégalités de CYS, identité du parallélogramme et de Pythagore, formules de polarisation,
- énoncé du thm de projection sur un convexe fermé, exercices d'application directe (voir TD),
- énoncé du TSO, exercices d'application directe (voir TD),
- énoncé du critère de densité, exercices d'application directe (voir TD),
- énoncé du thm de Riesz, exercices d'application directe (voir TD),
- énoncé de la caractérisation des BH par l'égalité de Bessel,
- énoncé des résultats classiques sur les séries de Fourier : comportement asymptotique des coefficients, thm de Dirichlet, thm de Fejer dans C^0 , thm de convergence L^2 .

5.6 Quelques exercices corrigés

Exercice 1 : Soit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers ≥ 0 et

$$F := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \quad ; \quad x_{n_k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que F est un sev fermé de $l^2(\mathbb{N})$ (muni de sa norme canonique).
2. Déterminer $P_F(x)$ pour $x \in l^2(\mathbb{N})$.
3. Déterminer $\text{dist}(x, F)$ en fonction des x_n .

SOLUTION :

1. *Stratégie 1 : Via une ALC.* L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} L : l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \rightarrow l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est continue car $\|L(x)\|_2 \leq \|x\|_2$ pour tout $x \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Donc $F = \text{Ker}(L)$ est un sev fermé de $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

Stratégie 2 : Caractérisation séquentielle. Soit $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers x dans $(l^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$:

- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x^j = (x_n^j)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et $x_{n_k}^j = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,
- $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et $\|x - x^j\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - x_n^j|^2 \right)^{1/2}$ tend vers zéro quand $[j \rightarrow \infty]$.

Montrons que $x \in F$, c'est-à-dire que $x_{n_k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n_k}| = |x_{n_k} - x_{n_k}^j| \leq \|x - x^j\|_2$$

donc, en passant à la limite $[j \rightarrow \infty]$ on obtient $x_{n_k} = 0$.

2. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et $A := \{n_k; k \in \mathbb{N}\}$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$y_n := \begin{cases} x_n & \text{si } n \notin A, \\ 0 & \text{si } n \in A. \end{cases}$$

Alors $y := (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à F . Montrons que $P_F(x) = y$.

Stratégie 1 : Via la définition de $P_F(x)$. Pour tout $z \in F$, on a

$$\|x - z\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_{n_k}|^2 + \sum_{n \notin A} |x_n - z_n|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} |x_{n_k}|^2 = \|x - y\|_2^2.$$

Ainsi, $\|x - y\|_2 = \text{dist}(x, F)$ donc (unicité) $y = P_F(x)$.

Stratégie 2 : Via la caractérisation. Pour tout $z \in F$, on a

$$\langle x - y, z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n) z_n = 0$$

car $(x_n - y_n) = 0$ lorsque $n \notin A$ et $z_n = 0$ lorsque $n \in A$. D'après la caractérisation du projeté orthogonal de x sur F , on en déduit que $P_F(x) = y$.

3. On a $\text{dist}(x, F) = \|x - P_F(x)\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n_k}|^2 \right)^{1/2}$.

Exercice 2 : Calculer $\min \left\{ \int_{-1}^1 |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

SOLUTION : On applique le théorème de projection avec

- $H = L^2(-1, 1)$, muni de son produit scalaire canonique, qui est un Hilbert,
- $F = \mathbb{R}_2[X]$ qui est un sev fermé de H , car de dimension finie,

– le vecteur $g : x \mapsto x^3$ de H

Ainsi, il existe un unique vecteur $P \in F$ tel que $\|g - P\|_2 = \min\{\|g - Q\|_2; Q \in F\}$. Pour le calculer, on cherche une base orthonormée de F , en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$. On obtient $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ et $b_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}(X^2 - \frac{1}{3})$ (tirer profit des propriétés de parité/imparité des fonctions en jeu pour voir que certains produits scalaires sont nuls). Ainsi, $P = \langle g, b_0 \rangle b_0 + \langle g, b_1 \rangle b_1 + \langle g, b_2 \rangle b_2$. Comme g est impaire et b_0, b_2 sont paires alors $P = \langle g, b_1 \rangle b_1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{dist}(g, F)^2 &= \|g\|_2^2 - \langle g, b_1 \rangle^2 \\ &= \int_{-1}^1 x^6 dx - \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x^4 \right)^2 \\ &= \frac{2}{7} - \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^2 = \dots \end{aligned}$$

Exercice 3 : Nous avons vu que l'égalité du parallélogramme est cruciale dans la preuve du théorème de projection. Le but de cet exercice est de proposer un contre-exemple, dans un Banach dont la norme ne vérifie pas l'égalité du parallélogramme.

1. Montrer que $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach et que $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'égalité du parallélogramme.
2. Montrer que $F := \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}); f(0) = 0 \text{ et } 0 \leq f \leq 1\}$ est un convexe fermé de $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
3. Montrer que $\text{dist}(1, F) = 1$ est atteinte en tout point de F .

SOLUTION :

1. Prenons $a = 1$ et $b = x$. Alors (faire un dessin)

$$\|a + b\|_\infty^2 + \|a - b\|_\infty^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \quad \text{et} \quad 2(\|a\|_\infty^2 + \|b\|_\infty^2) = 2(1 + 1) = 4$$

donc $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'égalité du parallélogramme.

2. La convergence uniforme sur $[0, 1]$ conserve les 2 contraintes.
3. Pour toute fonction $f \in F$ on a $\|1 - f\|_\infty \leq 1$ car $0 \leq f \leq 1$ et $\|1 - f\|_\infty \geq 1 - f(0) = 1$ donc $\|1 - f\|_\infty = 1$. Ainsi $\text{dist}(1, F) = 1$ et elle est atteinte en tout point $f \in F$.

Exercice 4 : Le but de cet exercice est d'insister sur les hypothèses du TSO (complétude de H et caractère fermé de F) en produisant 2 contre-exemples en leur absence.

1. Montrer que $E := C^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique de $L^2(0, 1)$ est un espace préhilbertien, qui n'est pas un Hilbert.
2. Montrer que $F := \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}); f = 0 \text{ sur } [0, 1/2]\}$ est un sev fermé de $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.
3. Montrer que $F^\perp = \{g \in C^0([0, 1], \mathbb{R}); g = 0 \text{ sur } [1/2, 1]\}$
4. Montrer que $E \neq F + F^\perp$.
5. Montrer que $c_c(\mathbb{N})$ est un sev non fermé de $l^2(\mathbb{N})$. Justifier que $l^2 \neq c_c + c_c^\perp$.

SOLUTION :

1. Il n'est pas fermé dans $(L^2(0, 1), \|\cdot\|_2)$ donc pas complet.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers f dans $(C^0, \|\cdot\|_2)$:
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction continue sur $[0, 1]$, qui s'annule sur $[0, 1/2]$,
 - f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et $\|f - f_n\|_2 = \left(\int_0^1 |(f - f_n)(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ tend vers zéro quand $[n \rightarrow \infty]$.

Montrons que $f \in F$, c'est-à-dire que $f = 0$ sur $[0, 1/2]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{1/2} |f(t)|^2 dt = \int_0^{1/2} |(f - f_n)(t)|^2 dt \leq \int_0^1 |(f - f_n)(t)|^2 dt.$$

En passant à la limite $[n \rightarrow \infty]$, on obtient $f = 0$ sur $[0, 1/2]$ (une fonction continue ≥ 0 d'intégrale nulle est identiquement nulle).

3. L'inclusion du membre de droite dans le membre de gauche est évidente. Montrons l'inclusion réciproque $\subset$.

Soit $g \in F^\perp : g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$ pour tout $f \in F$, ou, de façon équivalente, $\int_{1/2}^1 f(t)g(t)dt = 0$ pour tout $f \in F$ (car $f = 0$ sur $[0, 1/2]$). Remarquons que $\{f|_{[1/2, 1]}; f \in F\} = \{f \in C^0([1/2, 1]); f(1/2) = 0\}$ (raisonner par double inclusion). Ainsi,

$$\int_{1/2}^1 f(t)g(t)dt = 0, \quad \forall f \in C^0([1/2, 1], \mathbb{R}) \text{ telle que } f(1/2) = 0.$$

Pour $\epsilon \in (0, 1/2)$, on note ξ_ϵ la fonction continue qui vaut 0 sur $[0, 1/2]$, qui vaut 1 sur $[1/2 + \epsilon, 1]$ et qui est affine sur $[1/2, 1/2 + \epsilon]$. En appliquant la relation précédente à $f = \xi_\epsilon g$, on obtient

$$\int_{1/2}^1 \xi_\epsilon(t)g(t)^2 dt = 0, \quad \forall \epsilon \in (0, 1/2).$$

On a

- $\xi_\epsilon(t)g(t)^2 \rightarrow g(t)^2$ quand $[\epsilon \rightarrow 0]$, pour tout $t \in (1/2, 1)$,
- $|\xi_\epsilon(t)g(t)^2| \leq g(t)^2$ pour tout $t \in (1/2, 1)$: domination intégrable sur $(1/2, 1)$ et indépendante de ϵ ,

donc le théorème de convergence dominée justifie que

$$\int_{1/2}^1 \xi_\epsilon(t)g(t)^2 dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1/2}^1 g(t)^2 dt.$$

Ainsi, $\int_{1/2}^1 g(t)^2 dt = 0$ donc $g = 0$ sur $[1/2, 1]$. (une fonction continue ≥ 0 d'intégrale nulle est identiquement nulle)

4. Par l'absurde, supposons que $E = F + F^\perp$. Alors il existe $f \in F$ et $g \in F^\perp$ telles que $1 = f + g$. En particulier, $1 = f(1/2) + g(1/2) = 0$: contradiction.
5. $c_c^\perp = \{0\}$ (tester la relation d'orthogonalité contre e_n pour tout n) et $c_c \neq l^2$ donc $l^2 \neq c_c + c_c^\perp$.

Exercice 5 : Notons $L_{per}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ev des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques. Formuler une CNS sur $\varphi \in L_{per}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour que $\text{Vect}\{\tau_a \varphi; a \in \mathbb{R}\}$ soit dense dans $L_{per}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Le démontrer.

SOLUTION : On va montrer que $\text{Vect}\{\tau_a \varphi; a \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $L_{per}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ssi $c_n(\varphi) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Supposons que $c_n(\varphi) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et montrons que $\text{Vect}\{\tau_a \varphi; a \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $L_{per}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour cela, on va utiliser le critère de densité. Soit $f \in L_{per}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\tau_a \varphi(t)dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)c_n(\varphi)e^{ina}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(identité de Bessel). La somme de la série du membre de droite définit une fonction continue de $a \in \mathbb{R}$ (car $c_n(f)c_n(\varphi) \in l^1$, c'est CYS). L'égalité de Bessel justifie alors que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)c_n(\varphi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)c_n(\varphi)e^{ina} \right|^2 da = 0$$

donc $c_n(f)c_n(\varphi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or, $c_n(\varphi) \neq 0$ donc $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $f = 0$.

Montrons maintenant l'implication réciproque. Nous procédons par contraposée. S'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $c_{n_0}(\varphi) = 0$ alors la fonction $f(t) := e^{in_0 t}$ satisfait (identité de Bessel)

$$\int_0^{2\pi} f(t)\tau_a\varphi(t)dt = c_{n_0}(\varphi)e^{ina} = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

donc f est orthogonale à $\text{Vect}\{\tau_a\varphi; a \in \mathbb{R}\}$, qui ne peut donc être dense.

Exercice 6 : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ est équirépartie si, pour tout $[a, b] \subset [0, 1]$

$$\frac{1}{n+1} \text{Card}\{k \in [0, n]; u_k \in [a, b]\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (b-a)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie ssi

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t)dt, \forall f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}).$$

2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie ssi

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^n e^{2i\pi\lambda u_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \lambda \in \mathbb{N}^*.$$

SOLUTION :

1. $\Rightarrow$ approcher $f \in C^0$ en norme $\|\cdot\|_\infty$ par une fonction en escalier (Heine). $\Leftarrow$ Encadrer $1_{[a,b]}$ par 2 fonctions continues à distance $< \epsilon$ en norme $\|\cdot\|_1$ (dessin).
2. $\Leftarrow$ Utiliser la densité des polynômes trigo dans $(C^0[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ (Fejer).

Exercice 7 : Polynôme de Legendre. On note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de gram-Schmidt de la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(-1, 1)$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

1. Calculer e_0, e_1, e_2 .
2. Montrer que $e_n(t) = \frac{\sqrt{n+1/2}}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION :

1. On obtient $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ et $e_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}(X^2 - \frac{1}{3})$.
2. Il est clair que le membre de droite est un polynôme de degré n . Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\|e_n\|_2 = 1$ et $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$. Des IPP successives justifient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] dt = (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} [(t^2 - 1)^n] dt = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt,$$

et

$$\int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = \int_{-1}^1 (t-1)^n (t+1)^n dt = (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{(t-1)^{2n}}{(n+1)\dots(2n)} n! dt = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)\dots(2n)(2n+1)}.$$

qui permettent d'obtenir $\|e_n\|_2 = 1$. Par ailleurs, si $m < n$ alors (IPP)

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] \frac{d^m}{dt^m} [(t^2 - 1)^m] dt = (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} [(t^2 - 1)^m] dt = 0.$$

Exercice 8 : Polynôme de Tchebychev.

1. Montrer que $H := L^2 \left((-1, 1), \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ est un Hilbert.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $T_n : x \mapsto \cos[n \operatorname{Arcos}(x)]$ est un polynôme de degré n .
3. Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H . *Indication : utiliser le CVAR $x = \cos(\theta)$.*

Les polynôme de Tchebyshev sont utilisés en analyse numérique, dans l'approximation polynômiale des fonctions : leurs zéros sont de bons points d'interpolation, ils permettent de limiter l'effet de Runge.

5.7 Annexe 1 : Application du théorème de Riesz : résolution d'EDP elliptiques

Le théorème de Riesz permet de résoudre des équations du type

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Proposition 35 *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique fonction $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u + u = f$ dans $L^2(\Omega)$.*

Lorsque $\Omega = (0, 1)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, cette équation se résout explicitement par méthode de variation de la constante :

$$u(x) = C \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin[\pi(x-s)] f(s) ds.$$

On vérifie alors sur cette formule que $u \in H^1$ lorsque $f \in L^2$. Mais en dimension $n > 1$, sur un ouvert arbitraire, il n'y a plus de formule explicite : l'approche théorique est alors nécessaire. Dans cette section, nous exposons le principe de la preuve multi-D ($n > 2$). Mais, pour simplifier la présentation, nous le faisons en dimension $n = 1$.

On définit

$$H^1(0, 1) := \{v \in L^2(0, 1); v' \in L^2(0, 1)\},$$

où v' est la dérivée distributionnelle de v dans $\mathcal{D}'(0, 1)$, cad

$$\langle v', \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \int_0^1 v(x) \varphi'(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, 1)$$

[voir Hirsh-Lacombe, Partie 3, pour le B-A-BA des distributions]. On munit $H^1(0,1)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 (u'v' + uv)(x)dx$$

et de la norme associée

$$\|v\|_{H^1} := \sqrt{\int_0^1 [|v'(x)|^2 + |v(x)|^2]dx}.$$

Proposition 36 1. Tout élément $u \in H^1(0,1)$ admet un représentant $\tilde{u} \in C^0([0,1])$: $u = \tilde{u}$ p.p. sur $(0,1)$ et

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \forall x, y \in [0,1].$$

Dorénavant, on identifiera la classe d'équivalence $u \in H^1(0,1)$ avec son unique représentant continu $\tilde{u}$.

2. $H^1(0,1)$ est un Hilbert.

Preuve :

1. Soit $u \in H^1(0,1)$. La fonction $\bar{u}(x) := \int_0^x u'(t)dt$ est continue sur $[0,1]$ (CVD). Il suffit de montrer que $(u - \bar{u})' = 0$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$ en vertu du Lemme 4 ci-dessous. Soit $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$. On a

$$\langle \bar{u}', \varphi \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} = - \int_0^1 \left(\int_0^x u'(t)dt \right) \varphi'(x)dx = - \int_0^1 u'(t) \int_t^1 \varphi'(x)dxdt = \int_0^1 u'(t)\varphi(t)dt,$$

ce qui fournit la conclusion. L'interversion d'intégrales dans la 2e égalité est justifiée par le théorème de Fubini car

$$\int_0^1 \left(\int_0^x |u'(t)|dt \right) |\varphi'(x)|dx < \infty. \quad \square$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $H^1(0,1)$ de Cauchy pour $\|\cdot\|_{H^1}$. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2(0,1)$ donc (complétude de L^2) il existe $u, g \in L^2(0,1)$ tels que

$$\|u_n - u\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } \|u'_n - g\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a

$$- \int_0^1 u_n \varphi' = \int_0^1 u'_n \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1)$$

donc, à la limite,

$$- \int_0^1 u \varphi' = \int_0^1 g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1).$$

Ceci montre que $u' = g$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$ donc $u \in H^1(0,1)$ et $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. $\square$

Lemme 4 Soit $f \in L^1_{loc}(0,1)$ telle que $f' = 0$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. Alors $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $f = C$ p.p.

Preuve du Lemme : Soit $\psi \in C_c^\infty(0,1)$ telle que $\int_0^1 \psi = 1$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$. La fonction $x \mapsto \varphi(x) - \left(\int_0^1 \varphi \right) \psi(x)$ est $C_c^\infty(0,1)$ d'intégrale nulle, donc

$$\zeta(x) := \int_0^x \left[\varphi(s) - \left(\int_0^1 \varphi \right) \psi(s) \right] ds$$

est $C_c^\infty(0, 1)$ et satisfait $\zeta' = \varphi - \left(\int_0^1 \varphi\right) \psi$. On a

$$0 = \langle f', \zeta \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} = - \int_0^1 f(x) \zeta'(x) dx = - \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx + \left(\int_0^1 \varphi\right) \int_0^1 f(x) \psi(x) dx.$$

Ceci est vrai pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ce qui fournit la ccl avec $C = \int_0^1 f(x) \psi(x) dx$. $\square$

On définit

$$H_0^1(0, 1) := \text{Adh}_{H^1(0,1)} \left(C_c^\infty(0, 1) \right).$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(0, 1)$ donc, muni du même produit scalaire que H^1 , $H_0^1(0, 1)$ est un Hilbert.

Proposition 37 *On a $H_0^1(0, 1) = H^1(0, 1) \cap C_0^0([0, 1])$.*

Cette proposition donne un sens aux conditions aux limites du problème aux limites qu'on souhaite résoudre.

Preuve : *Etape 1 : Montrons que $H_0^1(0, 1) \subset H^1(0, 1) \cap C_0^0([0, 1])$. Soit $f \in H_0^1(0, 1)$: il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(0, 1)$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans $H^1(0, 1)$. Comme $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(0, 1)$ alors (réciproque de Lebesgue), quitte à extraire, $f_n \rightarrow f$ p.p. Soit $\alpha \in (0, 1)$ tel que $f_n(\alpha) \rightarrow f(\alpha)$. D'après la proposition précédente, on a*

$$(f_n - f)(x) = (f_n - f)(\alpha) + \int_\alpha^x (f_n - f)'(t) dt, \forall x \in (0, 1).$$

Donc (CYS)

$$|(f_n - f)(x)| \leq |(f_n - f)(\alpha)| + \|(f_n - f)'\|_{L^2(0,1)} \forall x \in (0, 1).$$

cad f_n converge vers f uniformément sur $(0, 1)$. Alors, en particulier, $f(0) = f(1) = 0$.

Etape 2 : Montrons que $H^1(0, 1) \cap C_0^0([0, 1]) \subset H_0^1(0, 1)$. Soit $f \in H^1(0, 1)$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Par densité de $C_c^\infty(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$, il existe $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(0, 1)$ telle que $\psi_n \rightarrow f'$ dans $L^2(0, 1)$. Alors $\lambda_n := \int_0^1 \psi_n \rightarrow \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = 0$ d'après CYS et la proposition précédente.

Soit $\zeta \in C_c^\infty(0, 1)$ telle que $\int_0^1 \zeta = 1$ et $f_n(x) := \int_0^x [\psi_n(t) - \lambda_n \zeta(t)] dt$. Alors $f_n \in C_c^\infty(0, 1)$ et $f_n \rightarrow f$ dans $H^1(0, 1)$ car

- $f_n' = \psi_n - \lambda_n \zeta \rightarrow f'$ dans $L^2(0, 1)$,
- f_n converge vers f uniformément sur $(0, 1)$ et donc dans $L^2(0, 1)$; en effet,

$$(f_n - f)(x) = \int_0^x (\psi_n - f')(t) dt - \lambda_n \int_0^x \zeta, \forall x \in (0, 1),$$

$$|(f_n - f)(x)| \leq \|\psi_n - f'\|_{L^2(0,1)} + |\lambda_n| \|\zeta\|_{L^1(0,1)}, \forall x \in (0, 1). \square$$

Preuve de la Proposition 35 : Soit $f \in L^2(\Omega)$. La forme linéaire

$$\varphi \in H_0^1(0, 1) \mapsto \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx$$

est continue car (CYS)

$$\left| \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_{L^2(0,1)} \|f\|_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|\varphi\|_{H^1(0,1)}.$$

D'après le théorème de Riesz, il existe $u \in H_0^1(0, 1)$ telle que

$$\int_0^1 \left(u'(x) \varphi'(x) + u(x) \varphi(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in L^2(0, 1).$$

En considérant des fonctions test $\varphi \in C_c^\infty(0, 1)$, on en déduit que $-u'' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0, 1)$. Comme u et f appartiennent à $L^2(0, 1)$ alors $u'' = u - f$ appartient aussi à $L^2(0, 1)$, cad $u \in H^2(0, 1)$, et l'égalité $-u'' + u = f$ a lieu dans $L^2(0, 1)$. $\square$

Chapitre 6

Théorie de Baire et applications

6.1 Théorème de Baire

Théorème 14 (Théorème de Baire) Soit (E, d) un e.m. **complet**

1. Si $(O_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts de (E, d) denses dans (E, d) , alors $\Omega := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$ est dense dans (E, d) .
2. Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés de (E, d) d'intérieur vide dans (E, d) , alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide dans (E, d) .

Preuve du 1. : Soit ω un ouvert non vide de E . Montrons que $\omega \cap \Omega \neq \emptyset$.

Etape 1 : Construisons, par récurrence, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E et une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tels que,

$$B(x_0, r_0) \subset \omega,$$

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \quad \text{et} \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$n = 0$: Soit $x_0 \in \omega$. Comme ω est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset \omega$.

$n \mapsto (n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons construits $(x_0, \dots, x_n)$ et $(r_0, \dots, r_n)$. O_{n+1} est un ouvert dense de (E, d) donc il rencontre l'ouvert $B(x_n, r_n)$. Soit $x_{n+1} \in O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Comme $O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est ouvert, il existe $r_{n+1} > 0$ tel que $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Quitte à réduire r_{n+1} , on peut supposer que $r_{n+1} < r_n/2$. Alors

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset \left[O_{n+1} \cap B(x_n, r_n) \right].$$

Etape 2 : Montrons que $\omega \cap \Omega \neq \emptyset$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d) car

$$d(x_n, x_p) \leq r_n \leq \frac{r_0}{2^n}, \quad \forall 0 \leq n < p.$$

Comme (E, d) est complet, alors elle converge vers un point $x_\infty \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_p)_{p \geq n}$ est à valeurs dans $B(x_n, r_n)$ donc $x_\infty \in \overline{B}(x_n, r_n)$. En particulier,

- on obtient, avec $n = 1$, $x_\infty \in \overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \subset \omega$,
- $x_\infty \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $x_\infty \in \Omega$. □

Contre-exemple : (sans hypothèses de complétude) $E := c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace métrique qui n'est pas complet. Pour $n \in \mathbb{N}$, $O_n := \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}}; x_n \neq 0\}$ est un ouvert dense de $(c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (en effet, si $x \in E \setminus O_n$ alors $x + \epsilon e_n \in O_n$ pour tout $\epsilon \neq 0$ et $\|x - (x + \epsilon e_n)\|_\infty = \epsilon$). Mais $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \emptyset$ n'est pas dense dans $(c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un Hilbert et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de H . Montrer que l'ensemble $\{g \in H; \langle g, f_n \rangle \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $(H, \|\cdot\|)$.

Le théorème de Baire a de nombreuses applications directes, qui pourront être vues en TD (référence : Gourdon, Analyse)

- Un evn admettant une base (algébrique) dénombrable (non finie) n'est pas complet.
- Les fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
- Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense.

6.2 Théorème de Banach-Steinhaus

6.2.1 Enoncé

Théorème 15 (Théorème de Banach-Steinhaus) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un **Banach**, $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn et $(T_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'applications **linéaires et continues** de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. On suppose que

$$\sup\{\|T_i x\|_F; i \in I\} < +\infty, \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}; i \in I\} < +\infty.$$

Ce thm, très fort, permet de déduire d'estimations ponctuelles une estimation uniforme.

Preuve : Pour $(n, i) \in \mathbb{N} \times I$, $X_{n,i} := \{x \in E; \|T_i(x)\|_F \leq n\}$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|_E)$, comme image réciproque du fermé $[0, n]$ par l'application continue $x \in E \mapsto \|T_i(x)\|_F$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n := \{x \in E; \|T_i x\| \leq n, \forall i \in I\} = \bigcap_{i \in I} X_{n,i}$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|_E)$ comme intersection (qlq) de fermés. Par hypothèse, $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n = E$ est d'intérieur non vide. Donc, d'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que Y_{n_0} soit d'intérieur non vide : il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset Y_{n_0}$, cad

$$\|T_i(x_0 + rz)\|_F \leq n_0, \quad \forall i \in I, z \in B_E(0, 1).$$

On en déduit (linéarité et inégalité triangulaire) que

$$\|T_i(z)\|_F = \left\| \frac{1}{r} (T_i(x_0 + rz) - T_i(x_0)) \right\|_F \leq \frac{\|T_i(x_0 + rz)\|_F + \|T_i(x_0)\|_F}{r} \leq \frac{2n_0}{r}, \quad \forall i \in I, z \in B_E(0, 1).$$

Ainsi

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq \frac{2n_0}{r}, \quad \forall i \in I. \square$$

Le théorème de Banach Steinhaus est souvent utilisé sous la forme suivante.

Corollaire 5 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un **Banach**, $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications **linéaires et continues** de E dans F . Si la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers T sur E alors

$$\sup\{\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}; n \in \mathbb{N}\} < \infty, \quad T \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \|T\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}.$$

Remarque 18 L'hypothèse ' $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers T sur E ' signifie que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$ vers un vecteur $T(x) \in F$.

Contre-exemple : $E = c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un evn qui n'est pas complet. Pour $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on définit $T_n(x) := nx_n$. Alors T_n est un opérateur linéaire et continue $(c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ de norme subordonnée $\|T_n\| = n$. Pour tout $x \in c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire en zéro donc $\sup\{|T_n(x)|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Cependant $\sup\{\|T_n\| = n; n \in \mathbb{N}\} = \infty$.

6.2.2 Application aux séries de Fourier

Le théorème de Banach Steinhauss a de nombreuses applications. Il permet notamment de démontrer le résultat suivant.

Proposition 38 *Il existe $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π -périodique dont la série de Fourier ne converge pas en $t = 0$.*

Preuve : On muni l'espace $C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues et 2π -périodiques $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|; t \in [0, 2\pi]\}.$$

Ainsi $(C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit

$$\left| \begin{array}{ll} \Lambda_N : C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{C} \\ f & \mapsto (D_N * f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_N(-s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_N(s) ds. \end{array} \right.$$

Etape 1 : Montrons que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, Λ_N est une forme linéaire continue sur $(C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ de norme $\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1$ (avec une norme $\|\cdot\|_1$ renormalisée). Fixons $N \in \mathbb{N}^$. Pour $f \in C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a*

$$\begin{aligned} |\lambda(f)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_N(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s)| |D_N(s)| ds \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N(s)| ds = \|f\|_\infty \|D_N\|_1. \end{aligned}$$

Ceci montre que Λ_N est continue sur $(C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ et que $\|\Lambda_N\| \leq \|D_N\|_1$.

Dans la série d'inégalités ci-dessus, le cas d'égalité est réalisé pour la fonction $f = \text{signe}(D_N)$, qui n'est pas continue sur $[0, 2\pi]$. Donc, pour montrer que $\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1$, nous devons approcher $\text{signe}(D_N)$ dans un sens convenable et travailler à ϵ -près. Rappelons que

$$D_N(s) = \sum_{k=-N}^N e^{iks} = \frac{\sin[(N + 1/2)s]}{\sin(s/2)}$$

donc $D_N(0) = D_N(2\pi) = (2N + 1)$ et, sur l'intervalle ouvert $(0, 2\pi)$, D_N change de signe exactement aux points $t = \frac{k\pi}{N+1/2}$ pour $k = 1, \dots, 2N$.

Soit $0 < \epsilon < \frac{\pi}{N+1/2}$ et $f_\epsilon \in C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui coïncide avec $\text{signe}(D_N)$ sur $[0, 2\pi]$ sauf sur les intervalles $\left(\frac{k\pi}{N+1/2} - \epsilon, \frac{k\pi}{N+1/2} + \epsilon\right)$ pour $k = 1, \dots, 2N$, sur lesquels elle est affine. Alors $\|f_\epsilon\|_\infty = 1$ et (faire un dessin)

$$\|\text{signe}(D_N) - f_\epsilon\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\text{signe}(D_N)(t) - f_\epsilon(t)| dt \leq 2N\epsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\Lambda_N\| \geq \Lambda(f_\epsilon) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_\epsilon - g)(s) D_N(s) ds \\ &\geq \|D_N\|_1 - \|f_\epsilon - g\|_1 \|D_N\|_\infty \\ &\geq \|D_N\|_1 - 2N\epsilon(2N + 1). \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1$.

Etape 2 : Montrons que $\|D_N\|_1 \rightarrow +\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$. On a

$$\begin{aligned} \|D_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{|\sin(s/2)|} ds \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{|\sin(s/2)|} ds \text{ par parité} \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{s} ds \text{ car } 0 \leq \sin(s/2) \leq s/2 \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin(\tau)|}{\tau} d\tau \text{ par CVAR } \tau = (N+1/2)s \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(\tau)| d\tau = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Etape 3 : Conclusion. Par l'absurde, supposons que $(\Lambda_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $f \in C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors, par le thm de Banach Steinhauss $\sup\{\|\Lambda_N\|; N \in \mathbb{N}\} < \infty$: contradiction. On conclut qu'il existe au moins une fonction $f \in C_{per}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont la série de Fourier en $t = 0$ ne converge pas. $\square$

Le thm de Banach Steinhauss a de nombreuses autres applications, qui pourront être vues en TD :

- Non convergence de l'interpolation de Lagrange (ref : Crouzeix Mignot),
- Convergence des methodes de Gauss (ref : Crouzeix Mignot).

Nous en verrons une particulièrement importante au chapitre suivant, sur les suites faiblement convergentes dans un Hilbert.

6.3 Théorèmes de l'application ouverte et d'isomorphisme de Banach

6.3.1 Enoncé

Théorème 16 (Théorème de l'application ouverte) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de **Banach**, T une application **linéaire continue surjective** de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$. Alors il existe $c > 0$ tel que, $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Preuve :

Etape 1 : Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $F_n := n\overline{T(B_E(0, 1))}$. Les F_n sont des fermés de $(F, \|\cdot\|_F)$ et $F = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ (surjectivité) donc (Baire) il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide. En conséquence $\overline{T(B_E(0, 1))}$ est d'intérieur non vide : il existe $y_0 \in F$ et $c > 0$ tels que $B_F(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$. En particulier, $y_0 \in \overline{T(B_E(0, 1))}$ donc (linéarité de T et symétrie de la boule) $-y_0 \in \overline{T(B_E(0, 1))}$. Alors

$$B_F(0, 4c) = -y_0 + B_F(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))} + \overline{T(B_E(0, 1))} \subset 2\overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Ainsi, $B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ par linéarité de T .

Etape 2 : Montrons que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$. Soit $y \in F$ tel que $\|y\| < c$. On cherche $x \in B_E(0, 1)$ tel que $y = T(x)$. Construisons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E telle que

$$\|z_n\|_E < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \|y - T(z_1 + \dots + z_n)\|_F < \frac{c}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$n = 1$: On a $2y \in B(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ donc il existe $\tilde{z}_1 \in B_E(0, 1)$ tel que $\|2y - \tilde{z}_1\|_F < c$. Alors $z_1 := \tilde{z}_1/2$ satisfait $\|z_1\|_E < \frac{1}{2}$ et $\|y - T(z_1)\|_F < \frac{c}{2}$.

$n \rightarrow (n+1)$: On a $2^{n+1}[y - T(z_1 + \dots + z_n)] \in B(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ donc il existe $\tilde{z}_{n+1} \in B_E(0, 1)$ tel que $\|2^{n+1}[y - T(z_1 + \dots + z_n)] - T(\tilde{z}_{n+1})\| < c$. Alors $z_{n+1} := \frac{\tilde{z}_{n+1}}{2^{n+1}}$ satisfait $\|z_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\|y - T(z_1 + \dots + z_{n+1})\| < \frac{c}{2^{n+1}}$.

La série $\sum z_n$ converge absolument dans $(E, \|\cdot\|_E)$, qui est complet, donc elle converge vers $x := \sum_{n=1}^{\infty} z_n \in E$. En passant à la limite $[n \rightarrow \infty]$ dans la relation $\|y - T(z_1 + \dots + z_n)\|_F < \frac{c}{2^n}$, on obtient (continuité de T) : $y = T(x)$. De plus (inégalité triangulaire)

$$\|x\|_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_E < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \square$$

En pratique, on utilise plutôt le résultat précédent sous la forme suivante.

Théorème 17 (Théorème d'isomorphisme de Banach) *Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de Banach et T une application linéaire continu bijective de E sur F . Alors T^{-1} est continu de $(F, \|\cdot\|_F)$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$.*

Ainsi, pour montrer qu'un endomorphisme entre espaces de Banach est un isomorphisme bi-continu, il suffit de vérifier qu'il est bijectif et continu : la continuité de l'inverse est automatiquement vraie.

Preuve : D'après le théorème de l'application ouverte, il existe $c > 0$ tel que, $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Soit $y \in F \setminus \{0\}$, alors $\frac{cy}{2\|y\|_F} \in B_F(0, c)$ donc il existe $x \in B_E(0, 1)$ tel que $\frac{cy}{2\|y\|_F} = T(x)$. Il en résulte que $y = T\left(\frac{2\|y\|_F x}{c}\right)$ donc (bijection) $T^{-1}(y) = \frac{2\|y\|_F x}{c}$. Ainsi, $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{2\|y\|_F}{c}$ pour tout $y \in F$ donc T^{-1} est continu. $\square$

6.3.2 Application aux séries de Fourier

Proposition 39 *L'application linéaire continue injective*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{F} : & \left(L^1((0, 2\pi), \mathbb{C}), \|\cdot\|_1 \right) & \rightarrow \left(c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty} \right) \\ & f & \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array} \right|$$

n'est pas surjective. (ref : Rudin, chap5)

Preuve : Par l'absurde, supposons que $\mathcal{F}$ soit surjective. Alors, par le théorème d'isomorphisme de Banach, $\mathcal{F}^{-1}$ est continue : il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1((0, 2\pi), \mathbb{C})$, $\|f\|_1 \leq C\|(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\infty}$. Appliquons cette relation à $f = D_N$ alors $\|D_N\|_1 \leq C, \forall N \in \mathbb{N}$. Or, nous avons montré dans la section précédente que $\|D_N\|_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$: contradiction. $\square$

Remarque 19 *Pour montrer que $\mathcal{F}$ est injective, on peut utiliser le thm de Fejer dans $L^1(0, 2\pi)$: voir l'exercice corrigé plus loin.*

Le théorème d'isomorphisme de Banach a de nombreuses autres applications. En le combinant avec une méthode hilbertienne et le théorème de Riesz, on peut par exemple démontrer l'étonnant résultat suivant. (ref : Rudin Functional analysis p.111)

Proposition 40 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et S un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ contenu dans $L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$. Alors S est de dimension finie.*

6.4 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation

- l'énoncé précis du thm de Baire,
- l'énoncé précis du thm de Banch-Steinhaus,
- l'énoncé précis du thm de l'application ouvert,
- l'énoncé précis du thm d'isomorphisme de Banach,
- des exercices d'application directe de ces 4 théorèmes.

6.5 Exercices corrigés

Exercice 1 :

1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$\left| \begin{array}{lll} \tau_a f : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ & x & \mapsto f(x-a) \end{array} \right.$$

Montrer que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\|\tau_a f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow 0$.

2. Montrer que, pour tout $f \in L^1(0, 2\pi)$, $\|K_N * f - f\|_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.
3. Montrer que la transformée de Fourier $f \in L^1(0, 2\pi) \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ est une application linéaire continue et injective.

SOLUTION :

1. Pour $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ on utilise le thm de Heine et la mesure finie du support. Dans le cas général, on exploite la densité de $C_c^0(\mathbb{R})$ dans $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.
2. Le thm de Fejer L^1 se démontre en decoupant l'intégrale $\int_{t=-\pi}^{\pi} \int_{s=-\pi}^{\pi} \dots$ en deux morceaux : $\int_{t=-\pi}^{\pi} \int_{|s| < \delta} \dots + \int_{t=-\pi}^{\pi} \int_{\delta < |s| < \pi} \dots$. Dans le premier morceau, on utilise que $\|f - \tau_s f\|_1 \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$. Dans le deuxième morceau, on utilise que $|K_n(s)| \leq \frac{1}{2 \sin(\delta/2)}$.
3. Si $\mathcal{F}(f) = 0$ alors $K_N * f \equiv 0$ donc $f = 0$ dans L^1 .

Exercice 2 : Soit F un sev **fermé** de $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ne contenant que des fonctions dérivables sur $[0, 1]$. Le but de cet exercice est de montrer que F est de dimension finie.

1. Soit $x_0 \in [0, 1]$. Pour $y \in (0, 1) \setminus \{x_0\}$, on définit

$$\left| \begin{array}{lll} T_y : & C^0([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ & f & \mapsto \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \end{array} \right.$$

- (a) Montrer que, pour tout $y \in (0, 1) \setminus \{x_0\}$, T_y est une forme linéaire continue sur $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
- (b) Montrer qu'il existe $M_{x_0} > 0$ telle que $\|T_y\|_{F'} \leq M_{x_0}$ pour tout $y \in (0, 1) \setminus \{x_0\}$.
- (c) Montrer $B_F(0, 1)$ est équicontinue en x_0 , c'est-à-dire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(x_0, \epsilon) > 0$ tel que, pour tout $y \in [0, 1]$ vérifiant $|x_0 - y| < \eta$ alors $|f(y) - f(x_0)| < \epsilon$.
2. Montrer que $B_F(0, 1)$ est équicontinue sur $[0, 1]$, c'est-à-dire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0, 1]$ vérifiant $|x - y| < \eta$ alors $|f(y) - f(x)| < \epsilon$.
3. Montrer que $(\overline{B_F(0, 1)}, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.
4. Montrer que F est de dimension finie.

SOLUTION :

1. Soit $x_0 \in [0, 1]$.

(a) Soit $y \in (0, 1) \setminus \{x_0\}$. T_y est clairement linéaire. De plus, pour tout $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on a

$$|T_y(f)| = \left| \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \right| \leq \frac{|f(y)| + |f(x_0)|}{|y - x_0|} \leq \frac{2}{|y - x_0|} \|f\|_\infty.$$

Donc T_y est continue.

(b) On applique le théorème de Banach-Steinhaus :

- $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est un **Banach**, comme sev fermé du Banach $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$,
- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un evn,
- $(T_y)_{y \in (0, 1) \setminus \{x_0\}}$ est une famille d'applications **linéaires et continues** de $(F, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$,
- Pour tout $f \in F$, $\sup\{T_y(f); y \in (0, 1) \setminus \{x_0\}\}$ est fini. En effet, il existe $\delta > 0$ tel que $\left| \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} - f'(x_0) \right| < 1$ pour tout $y \in [0, 1]$ vérifiant $|y - x_0| < \delta$ et alors

$$|T_y(f)| \leq \begin{cases} |f'(x_0)| + 1 & \text{si } |y - x_0| \leq \delta, \\ \frac{2}{\delta} \|f\|_\infty & \text{si } |y - x_0| > \delta. \end{cases}$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, $M_{x_0} := \sup\{\|T_y\|_{F'}; y \in (0, 1) \setminus \{x_0\}\}$ est fini.

– Soit $\epsilon > 0$ et $\eta(x_0, \epsilon) := \frac{\epsilon}{M_{x_0}}$. Pour tout $y \in [0, 1]$ vérifiant $|y - x_0| < \eta(x_0, \epsilon)$, on a

$$|f(y) - f(x_0)| = |(y - x_0)T_y(f)| \leq \frac{\epsilon}{M_{x_0}} M_{x_0} = \epsilon.$$

(c) Soit $\epsilon > 0$. Comme $[0, 1]$ est compact, on peut extraire du recouvrement

$$[0, 1] \subset \cup_{x_0 \in [0, 1]} B\left(x_0, \frac{\eta(x_0, \epsilon/2)}{2}\right)$$

un sous-recouvrement fini (Borel Lebesgue)

$$[0, 1] \subset \cup_{1 \leq j \leq n} B\left(x_j, \frac{\eta(x_j, \epsilon/2)}{2}\right)$$

Soit $\eta(\epsilon) := \min\{\frac{\eta(x_j, \epsilon/2)}{2}; j = 1, \dots, n\}$. Soient $x, y \in [0, 1]$ vérifiant $|x - y| < \eta$. Il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x \in B\left(x_j, \frac{\eta(x_j, \epsilon/2)}{2}\right)$. Alors $x, y \in B(x_j, \eta(x_j, \epsilon/2))$ donc

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(d) On applique la théorème d'Ascoli :

- $([0, 1], |\cdot|)$ est un em compact,
 - $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un em complet,
 - pour tout $x_0 \in [0, 1]$, l'ensemble $\{f(x_0); f \in B_F(0, 1)\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$, car borné par 1 ;
 - $B_F(0, 1)$ est équicontinue, d'après la question précédente
- donc $B_F(0, 1)$ est relativement compacte dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Or, l'adhérence de la boule ouverte $B_F(0, 1)$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est la boule fermée $\overline{B}_F(0, 1)$. Donc $\overline{B}_F(0, 1)$ est compacte dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

(e) D'après le théorème de Riesz, F est de dimension finie.

Chapitre 7

Topologie faible dans les Hilbert

7.1 Suites faiblement convergentes dans un Hilbert

Definition 28 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H **converge faiblement** vers f si $\langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$ pour tout $g \in H$ (la limite est nécessairement unique). On note alors $f_n \rightharpoonup f$.

Preuve de l'unicité de la limite faible : Supposons que $f, \tilde{f} \in H$ sont des limites faibles de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors, pour tout $g \in H$, on a

$$\langle f - \tilde{f}, g \rangle = \langle f - f_n, g \rangle + \langle f_n - \tilde{f}, g \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

cad $\langle f - \tilde{f}, g \rangle = 0$. En appliquant cette égalité à $g := f - \tilde{f}$, on obtient $\|f - \tilde{f}\|^2 = 0$ donc $f = \tilde{f}$. $\square$

Exemples :

- $e^{int} \rightharpoonup 0$ dans $L^2(0, 1)$ (Lemme de Riemann Lebesgue : La preuve se fait par IPP lorsque la fonction test est C^1 puis par densité de C^1 dans L^2 lorsque la fonction test est seulement L^2).
- Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ alors $f_n \rightharpoonup 0$. En effet, pour tout $z \in H$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle z, f_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2$ donc $\langle z, f_n \rangle \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$. Cela s'applique, par exemple dans $l^2(\mathbb{N})$ à la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans $L^2(0, 2\pi)$ à la suite $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$...

Proposition 41 1. $(f_n \rightarrow f) \Rightarrow (f_n \rightharpoonup f)$

$$2. (f_n \rightharpoonup f) \Rightarrow (\|f\| \leq \liminf \|f_n\|)$$

$$3. (f_n \rightharpoonup f) \Rightarrow ((f_n) \text{ bornée})$$

$$4. (f_n \rightarrow f) \Leftrightarrow (f_n \rightharpoonup f \text{ et } \|f_n\| \rightarrow \|f\|)$$

$$5. (f_n \rightharpoonup f \text{ et } g_n \rightarrow g) \Rightarrow (\langle f_n, g_n \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle). \text{ La convergence faible des } (g_n) \text{ ne suffit pas.}$$

$$6. \text{ Si } f_n \rightharpoonup f \text{ alors } f \text{ appartient à l'enveloppe convexe fermée (pour la topologie de la norme) de } \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$$

Preuve :

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz prouve $\langle f_n - f, g \rangle \leq \|f_n - f\| \|g\| \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$.
2. $\|f\|^2 = \lim \langle f, f_n \rangle \leq \|f\| \liminf \|f_n\|$ par CYS.
3. On applique le thm Banach Steinhaus avec $T_n : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_n(h) = \langle f_n, h \rangle$. Montrons que $\|T_n\| = \|f_n\|$. L'inégalité de CYS justifie que $\|T_n\| \leq \|f_n\|$. De plus, $\|f_n\|^2 = T_n(f_n) \leq \|T_n\| \|f_n\|$ donc $\|T_n\| \geq \|f_n\|$.

4. On a $\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\Re\langle f, f_n \rangle \rightarrow 0$.

5. Soit $\epsilon > 0$. Comme (f_n) converge faiblement alors elle est bornée : $\|f_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Pour n assez grand, on a $|\langle f_n - f, g \rangle| < \frac{\epsilon}{2}$ et $\|g_n - g\| < \frac{\epsilon}{2M}$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| &\leq |\langle f_n, g_n - g \rangle| + |\langle f_n - f, g \rangle| \\ &\leq \|f_n\| \|g_n - g\| + \frac{\epsilon}{2} < M \frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Pour la réciproque, il suffit de considérer $f_n = g_n$ avec $\|f_n\| = 1$ et $f_n \rightarrow 0$, par exemple e^{inx} dans $L^2(0, 1)$.

6. Soit C l'enveloppe convexe fermée (fort) de $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $P_C : H \rightarrow C$ la projection sur C . Alors

$$\Re\langle f - P_C(f), f_n - P_C(f) \rangle \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite $[n \rightarrow \infty]$ dans cette inégalité et en utilisant $f_n \rightarrow f$, on obtient

$$\|f - P_C(f)\|^2 = \Re\langle f - P_C(f), f - P_C(f) \rangle \leq 0.$$

Ainsi $f = P_C(f) \in C$. $\square$

Obstructions à la convergence forte :

(suites faiblement convergentes qui ne convergent pas fortement)

- **Perte à l'infini** : Perte dans les hautes fréquences : cf famille orthonormée. Perte à l'infini en espace : dans $L^2(\mathbb{R})$ on considère la suite $(\tau_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ où $f \in L^2(\mathbb{R})$ est à support minoré $\subset [a, \infty)$. Alors $\tau_n f \rightarrow 0$ car

$$|\langle \tau_n f, g \rangle| = \left| \int_{a+n}^{\infty} f(x-n)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\int_{a+n}^{\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{par CVD.}$$

Mais $\tau_n f$ ne converge pas fortement vers zéro car $\|\tau_n f\|_{L^2(\mathbb{R})} \equiv \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

- **Concentration** : Dans $L^2(0, 1)$, $f_n := \sqrt{n}1_{[0, 1/n]}$ converge faiblement vers zéro

$$\left| \sqrt{n} \int_0^{1/n} g(x)dx \right| \leq \left(\int_0^{1/n} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{par CVD}$$

mais ne converge pas fortement car $\|f_n\| = 1$.

- **Oscillations** : Dans $L^2(0, 1)$, e^{inx} converge faiblement vers zéro (Lemme de Riemann Lebesgue) mais pas fortement car $\|e^{inx}\| = 1$.

7.2 Compacité faible

Théorème 18 Dans un Hilbert séparable, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

Preuve : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert séparable, $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de H dense dans H et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de H : $\|f_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Etape 1 : Montrons qu'il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(\langle f_{\psi(n)}, h_k \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\langle f_n, h_k \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$. On obtient ψ par un un procédé d'extraction diagonale.

Etape 2 : Montrons que $(\langle f_{\psi(n)}, g \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $g \in H$. Soit $g \in H$ et $\epsilon > 0$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - h_K\| < \epsilon/(3M)$. La suite $(\langle f_{\psi(n)}, h_K \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc elle est de Cauchy : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geq N \Rightarrow |\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, h_K \rangle| < \epsilon/3$. Pour $m, n \geq N$, on a

$$|\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, g \rangle| \leq |\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, h_K \rangle| + |\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, g - h_K \rangle| < \frac{\epsilon}{3} + 2M \frac{\epsilon}{3M} = \epsilon.$$

Ainsi, $(\langle f_{\psi(n)}, g \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Notons $L(g)$ sa limite.

Etape 3 : On applique le thm de Riesz. L est une forme linéaire et continue sur H car $L(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_{\psi(n)}, g \rangle \leq M\|g\|$. D'après le thm de Riesz, il existe $f \in H$ tel que $L(g) = \langle f, g \rangle$ pour tout $g \in H$. Ainsi, $f_{\psi(n)} \rightharpoonup f$. $\square$

Remarque 20 *L'hypothèse de séparabilité sur H simplifie la preuve mais n'est pas nécessaire. On peut la contourner en travaillant dans $\tilde{H} := \overline{\text{Vect}\{f_n; n \in \mathbb{N}\}}$, qui est un Hilbert séparable, et en utilisant $H = \tilde{H} \oplus \tilde{H}^\perp$ (TSO). Cela dit, en pratique, les Hilbert que nous manipulons sont généralement séparables et alors le Thm 18 est suffisant.*

7.3 Application à l'optimisation

Proposition 42 *Soit H un Hilbert séparable, $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 convexe coercive*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} J(x) = +\infty$$

et C un convexe fermé non vide de H . Alors il existe $x_ \in C$ tel que $J(x_*) = \inf\{J(x); x \in C\}$.*

Preuve : Notons $m := \inf\{J(x); x \in C\}$. Par propriété de la borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que $J(x_n) \rightarrow m$ quand $[n \rightarrow \infty]$. Alors $J(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$: $J(x_n) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme J est coercive, il existe $R > 0$ tel que $J(x) > M$ lorsque $\|x\| > R$. Alors $\|x_n\| \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le Théorème 18, il existe une extraction ϕ et $x_* \in H$ tels que $x_{\phi(n)} \rightharpoonup x_*$. De plus (voir Proposition 41 6.) $x_* \in \overline{\text{Conv}\{x_{\phi(n)}; n \in \mathbb{N}\}}$, en particulier, $x_* \in C$. Par convexité de J , on a

$$J(x_{\phi(n)}) \geq J(x_*) + \langle \nabla J(x_*), x_{\phi(n)} - x_* \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite $[n \rightarrow \infty]$ dans cette inégalité et en utilisant $x_{\phi(n)} \rightharpoonup x_*$, on obtient

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} J(x_{\phi(n)}) \geq J(x_*). \square$$

7.4 Qq relations entre différents types de convergences

Proposition 43 *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. Alors $(f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}) \Leftrightarrow (f_n \rightharpoonup f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2(\Omega))$*

Preuve :

$$\Rightarrow C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

$\Leftarrow$ Supposons que $f_n \rightharpoonup f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \forall n$. Montrons que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $g \in L^2(\Omega)$ et $\epsilon > 0$. Il existe $\tilde{g} \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que $\|g - \tilde{g}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\epsilon}{\|f\|_{L^2} + M}$. Il existe n_* tel que $\langle f_n - f, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq n_*$. Alors, pour $n \geq n_*$, on a

$$\begin{aligned} |\langle f_n - f, g \rangle_{L^2, L^2}| &\leq |\langle f_n - f, \tilde{g} \rangle_{L^2, L^2}| + |\langle f_n - f, g - \tilde{g} \rangle_{L^2, L^2}| \\ &\leq |\langle f_n - f, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| + \|f_n - f\|_{L^2} \|g - \tilde{g}\|_{L^2} \text{ par CYS} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + (M + \|f\|_{L^2}) \frac{\epsilon}{\|f\|_{L^2} + M} < \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Contre-exemple : Pour l'implication $\Leftarrow$, l'hypothèse de borne est nécessaire. En effet, $f_n := n1_{[1/n, 2/n]}$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(0, 1)$: un compact de $(0, 1)$ est à distance > 0 de $\{0\}$ donc ne contient qu'un nb fini de $1/n$. Mais elle ne converge pas faiblement dans $L^2(0, 1)$ car elle n'y est pas bornée : $\|f_n\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{n}$.

[Hirsh-Lacombe, Chap 7, Section 2.6, Ex 15, Page 242]

7.5 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation

- la preuve des propriétés élémentaires sur les suites faiblement convergentes (Proposition 41) : ce sont des manipulations élémentaires des résultats du chapitre sur les Hilbert.

Chapitre 8

Le théorème spectral sur un Hilbert

Le théorème spectral en dimension finie s'énonce ainsi.

Théorème 19 (Théorème spectral en dimension finie) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors

1. il existe une base de E formée de vecteurs propres pour T ,
2. les espaces propres de T sont orthogonaux et ses valeurs propres sont réelles,
3. la norme de T (subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur E) est son rayon spectral

$$\|T\| = \rho(T) := \max\{|\lambda|; \lambda \in VP(T)\},$$

4. on a l'inégalité de Rayleigh :

$$\min\{VP(T)\} \leq \frac{\langle x, T(x) \rangle}{\|x\|^2} \leq \max\{VP(T)\}, \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Ce thm est une csq de la réduction des endomorphismes normaux : voir Annexe 1. En dimension infinie, il se généralise de la façon suivante.

Théorème 20 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un **Hilbert séparable** sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{L}_c(H)$ **autoadjoint compact**. Alors

1. H admet une base **hilbertienne** formée de vecteurs propres pour T ,
2. les espaces propres de T sont orthogonaux et ses valeurs propres sont réelles,
3. la norme de T (subordonnée à la norme Hilbertienne $\|\cdot\|$ sur H) est son rayon spectral

$$\|T\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \rho(T) := \max\{|\lambda|; \lambda \in VP(T)\},$$

4. on a l'inégalité de Rayleigh :

$$\min\{VP(T)\} \leq \frac{\langle x, T(x) \rangle}{\|x\|^2} \leq \max\{VP(T)\}, \forall x \in H \setminus \{0\}.$$

Preuve de (1+2) $\Rightarrow$ (3+4) avec $\min \leftarrow \inf$ et $\max \leftarrow \sup$: Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H telle que $T(e_n) = \lambda_n e_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 1 : Montrons que, pour tout $x \in E$, la série $\sum \lambda_n \langle e_n, x \rangle e_n$ converge dans $(H, \|\cdot\|)$ et que sa somme vaut $T(x)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} \left\| T(x) - \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle e_n, x \rangle e_n \right\| &= \left\| T \left(x - \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right) \right\| \text{ par linéarité} \\ &\leq \|T\| \left\| x - \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right\| \text{ par continuité de } T \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ d'après Thm 12.} \end{aligned}$$

Etape 2 : Montrons 3. avec $\max \leftarrow \sup$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, x \rangle e_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n \langle e_n, x \rangle|^2 \text{ car } (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est orthonormale} \\ &\leq \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 \\ &\leq \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\} \|x\|^2 \text{ par l'égalité de Bessel.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\|T\| \leq \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\lambda_{n_0}| \geq \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\} - \epsilon.$$

Alors

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in H \text{ et } \|x\| = 1\} \geq \|T(e_{n_0})\| = |\lambda_{n_0}| \geq \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\} - \epsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $\|T\| = \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\}$.

Etape 3 : Montrons 4. avec $\min \leftarrow \inf$ et $\max \leftarrow \sup$. Pour tout $x \in E$, on a (voir caractérisation par Bessel)

$$\begin{aligned} \langle T(x), x \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle T(x), e_n \rangle \langle e_n, x \rangle \quad \text{par la caractérisation des BH} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle \quad \text{car } T^*(e_n) = T(e_n) = \lambda_n e_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\langle e_n, x \rangle|^2 \\ &\geq \inf\{VP(T)\} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 = \inf\{VP(T)\} \|x\|^2 \text{ par l'égalité de Bessel} \\ &\leq \sup\{VP(T)\} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 = \sup\{VP(T)\} \|x\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Les résultats des sections ultérieures permettront de démontrer le point 2, de montrer que les inf/sup sont des min/max, de définir les opérateurs compacts et de percevoir leur intérêt.

8.1 Endomorphisme adjoint

Definition 29 (Endomorphisme adjoint/autoadjoint/normal) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. g est l'**endomorphisme adjoint** de f (ce qui se note $g = f^*$) si

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

L'endomorphisme f est **autoadjoint** si $f^* = f$, il est **normal** si $f^* f = f f^*$.

Preuve de l'unicité de l'adjoint : Soient $f, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g_1(y) \rangle = \langle x, g_2(y) \rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

Alors $\langle x, (g_1 - g_2)(y) \rangle = 0$ pour tous $x, y \in E$, donc en particulier $\|(g_1 - g_2)(y)\|^2 = 0$ pour tout $y \in E$, i.e. $g_1 = g_2$. $\square$

Proposition 44 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph.

1. Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ admettent des adjoints f^*, g^* alors

$$f^{**} = f, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*, \quad (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*.$$

2. Si $f \in \mathcal{L}_c(E)$ est autoadjoint alors ses valeurs propres sont réelles et ses espaces propres sont orthogonaux.

3. Si F est un sev de E stable par $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $F^\perp$ est stable par f^* (c'est utile pour la réduction en dim finie).

Preuve : 1. et 3. sont des manipulations élémentaires de la définition : Exercice.

2. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ autoadjoint, λ, μ des valeurs propres distinctes de f et x, y des vecteurs propres associés. On peut supposer $\lambda \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}\|x\|^2 &= \langle \lambda x, x \rangle = \langle f(x), x \rangle = \langle x, f^*(x) \rangle = \langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda\|x\|^2 \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{\lambda} \langle f(x), y \rangle = \frac{\mu}{\lambda} \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\langle x, y \rangle = 0$. □

Théorème 21 Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **Hilbert**, alors tout opérateur continu $T \in \mathcal{L}_c(H)$ admet un adjoint $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$. De plus $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}_c(H)}$.

Preuve : Soit $x \in H$. L'application

$$\begin{cases} H & \rightarrow \mathbb{K} \\ y & \mapsto \langle x, T(y) \rangle \end{cases}$$

est une forme linéaire continue sur H car (CYS) $|\langle x, T(y) \rangle| \leq \|x\| \|T\| \|y\|$. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $u_x \in H$ tel que $\langle u_x, y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ pour tout $y \in H$.

L'unicité de u_x permet de définir

$$\begin{cases} T^* : H & \rightarrow H \\ x & \mapsto u_x \end{cases}$$

et de montrer que T^* est linéaire. De plus,

$$\begin{aligned}\|T^*(x)\| &= \max\{\langle T^*(x), y \rangle; \|y\| \leq 1\} \\ &= \max\{\langle x, T(y) \rangle; \|y\| \leq 1\} \\ &\leq \|x\| \|T\| \quad \text{grâce à CYS.}\end{aligned}$$

Ceci montre que $T^* : H \rightarrow H$ est continue et que $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_c(H)}$. En appliquant cette inégalité avec $T \leftarrow T^*$, on obtient $\|T\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T^{**}\|_{\mathcal{L}_c(H)} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)}$ et donc $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}_c(H)}$. □

Exemple : Sur $H = l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$, le shift à droite $T : H \rightarrow H$ défini par $T(u) := (0, u_1, u_2, \dots)$ admet pour adjoint le shift à gauche $T^* : H \rightarrow H$ défini par $T^*(v) = (v_2, v_3, \dots)$.

Contre-exemple : $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un eph et $L : E \mapsto E$ définie par $L(P) = P'$ est un endomorphisme de E qui n'admet pas d'adjoint.

Par l'absurde, supposons que L admette un adjoint $L^* : E \rightarrow E$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a (IPP)

$$\begin{aligned}\int_0^1 P'(t)Q(t)dt &= P(1)Q(1) - P(0)Q(0) - \int_0^1 P(t)Q(t)dt, \\ \langle L(P), Q \rangle &= \int_0^1 P'(t)Q(t)dt = \langle P, L^*(Q) \rangle = \int_0^1 P(t)L^*(Q)(t)dt.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$P(1)Q(1) - P(0)Q(0) = \int_0^1 R(t)P(t)dt, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X],$$

où R est le polynôme défini par $R := L^*(Q) + Q'$. En appliquant cette identité à $P = X^n$, on obtient

$$Q(1) = \int_0^1 t^n R(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

par convergence dominée car

- $t^n R(t) \rightarrow 0$ quand $[t \rightarrow \infty]$ pour tout $t \in (0, 1)$,
- $|t^n R(t)| \leq |R(t)|$ est une domination intégrable sur $(0, 1)$ et indépendante de n .

On a montré que $Q(1) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$: contradiction.

8.2 Opérateurs compacts sur un Banach

Definition 30 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux Banach sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$. T est **compact** si $T[\overline{B}_E(0, 1)]$ est relativement compact dans $(F, \|\cdot\|_F)$. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ev des opérateurs compacts $E \rightarrow F$.

Exemples :

- Un opérateur de rang fini est compact.
- Les opérateurs à noyaux (preuve via Ascoli).
- La primitive, qui associe à f la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est compacte sur $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposition 45 Soient E, F, G des Banach.

1. Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$, $S \in \mathcal{L}_c(F, G)$ alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$.
2. Si $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $S \in \mathcal{K}(F, G)$ alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$.

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\overline{B}_E(0, 1)$.

1. Comme T est compact, il existe $y \in F$ et une extraction ϕ tels que $T(x_{\phi(n)}) \rightarrow y$ dans F quand $[n \rightarrow \infty]$. Par continuité de S , on a donc $S \circ T(x_{\phi(n)}) \rightarrow S(y)$ dans G quand $[n \rightarrow \infty]$.
2. La suite $\left(\frac{T(x_n)}{\|T\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\overline{B}_F(0, 1)$. Comme S est compact, il existe $z \in G$ et une extraction ϕ tels que $S \left(\frac{T(x_{\phi(n)})}{\|T\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}} \right) \rightarrow z$ dans G quand $[n \rightarrow \infty]$. Ainsi $S \circ T(x_{\phi(n)}) \rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} z$ dans G quand $[n \rightarrow \infty]$. $\square$

D'autres propriétés sur les opérateurs compacts sont démontrées en Annexe 2.

8.3 Spectre et valeurs propres

Ref : Brézis, Analyse fonctionnelle

Le fait qu'en dimension infinie, un endomorphisme injectif $E \rightarrow E$ n'est pas forcément surjectif oblige à distinguer les notions de spectre et de valeur propre.

Definition 31 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}_c(E)$.

L'ensemble **résolvant** de T est

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I) \text{ est bijectif } E \rightarrow E\}.$$

Le **spectre** de T est $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$:

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I) \text{ n'est pas bijectif } E \rightarrow E\}.$$

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de T si $\text{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$ et alors $\text{Ker}(T - \lambda I)$ est l'espace **propre** associé à λ . On note $VP(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T .

Remarque 21 Si $\lambda \in \rho(T)$ alors $(T - \lambda I)^{-1} : E \rightarrow E$ est continu (thm d'isomorphisme de Banach).

Remarque 22 Il est clair que $VP(T) \subset \sigma(T)$. Si E est de dimension finie alors $\sigma(T) = VP(T)$. Mais si E est de dimension infinie, l'inclusion peut être stricte : il peut exister λ tel que $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$ et $R(T - \lambda I) \neq H$: voir exemples ci-dessous.

Exemples/contre-exemples :

1. Considérons $E = l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ et le shift à droite $T : E \rightarrow E$, défini par $T(u) = (0, u_1, u_2, \dots)$.
 – $0 \in \sigma(T)$ car $R(T) = \{u \in l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C}); u_1 = 0\}$ est un sev strict de $l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$, donc $T : E \rightarrow E$ n'est pas bijectif (il n'est pas surjectif).
 – $0 \notin VP(T)$ car $T(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
 Ainsi $VP(T) \neq \sigma(T)$. En fait, $VP(T) = \emptyset$. Exercice : Le démontrer.
2. Considérons $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $T : E \rightarrow E$ défini par $T(f)(x) := xf(x)$. Alors $VP(T) = \emptyset$ car, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\left(f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad xf(x) = \lambda f(x), \forall x \in [0, 1] \right) \Leftrightarrow (f = 0).$$

De plus $\rho(T) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ et $\sigma(T) = [0, 1]$. En effet,

$$\begin{aligned} (\lambda \in \rho(T)) &\Leftrightarrow \left(\forall g \in C^0([0, 1], \mathbb{C}), \exists ! f \in C^0([0, 1], \mathbb{C}) \text{ tq } (x - \lambda)f = g \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall g \in C^0([0, 1], \mathbb{C}), \frac{g}{x - \lambda} \in C^0([0, 1], \mathbb{C}) \right) \end{aligned}$$

3. Considérons $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$ et la primitive

$$\left| \begin{array}{ccc} T : & C^0([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R}) \\ & f & \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt) \end{array} \right.$$

- $0 \in \sigma(T)$ car $R(T) = \{g \in C^1([0, 1], \mathbb{R}); g(0) = 0\}$ est un sev strict de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, donc T n'est pas une bijection de E (il n'est pas surjectif).
 - $0 \notin VP(T)$ car $T(f) = 0$ implique $f = 0$ par dérivation.
- Donc $VP(T) \neq \sigma(T)$. De plus, 0 est l'unique élément de $\sigma(T)$: $VP(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$ et $\rho(T) = \mathbb{R}^*$. Exercice : Le démontrer en utilisant la formule de variation de la constante.

Proposition 46 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert de dimension ∞ sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{K}(H)$.

1. $0 \in \sigma(T)$.
2. Si $VP(T) \setminus \{0\}$ est infini alors 0 est son unique point d'accumulation.
3. $VP(T)$ est fini ou dénombrable.
4. En particulier,

$$\begin{aligned} \inf\{VP(T)\} &= \min\{VP(T)\}, \\ \sup\{VP(T)\} &= \max\{VP(T)\}, \\ \sup\{|\lambda|; \lambda \in VP(T)\} &= \max\{|\lambda|; \lambda \in VP(T)\}. \end{aligned}$$

Preuve :

1. Par l'absurde, supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors T est un isomorphisme bi-continu de H (thm d'isomorphisme de Banach) donc $I = T^{-1} \circ T$ est compact (composition d'un opérateur continu et d'un opérateur compact), cad $\overline{B_H}$ est compact. Alors (thm de Riesz) H est de dimension finie : contradiction.

2. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de valeurs propres non nulles 2 à 2 distinctes de T et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs propres associés. Alors $x_{n+1} \notin \text{Vect}\{x_0, \dots, x_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car les λ_n sont 2 à 2 distincts. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de Gram Schmidt de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $\text{Vect}\{y_0, \dots, y_n\} = \text{Vect}\{x_0, \dots, x_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 1 : Montrons que $T(y_n) \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$. Comme $y_n \in \overline{B}_H(0, 1)$ et T est compact alors $(T(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $(H, \|\cdot\|)$. Soit z une telle valeur d'adhérence et ϕ une extraction telle que $T(y_{\phi(n)}) \rightarrow z$ dans $(H, \|\cdot\|)$. On a

$$\|z\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z, T(y_{\phi(n)}) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^*(z), y_{\phi(n)} \rangle = 0$$

car $y_n \rightarrow 0$ (elle est orthonormale). Ainsi, la suite $(T(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans un compact et admet 0 pour unique valeur d'adhérence donc toute la suite converge vers 0.

Etape 2 : Montrons que $\lambda_n \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$. On a

$$\begin{aligned} T(y_n) - \lambda_n y_n &= T\left(\alpha_n x_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^n x_j\right) - \lambda_n \left(\alpha_n x_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^n x_j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^n (\lambda_j - \lambda_n) x_j \\ &\in \text{Vect}\{x_0, \dots, x_{n-1}\} = \text{Vect}\{y_0, \dots, y_{n-1}\} \\ &\perp y_n, \end{aligned}$$

donc (Pythagore)

$$\|T(y_n)\|^2 = \|\lambda_n y_n + [T(y_n) - \lambda_n y_n]\|^2 = |\lambda_n|^2 + \|T(y_n) - \lambda_n y_n\|^2 \geq |\lambda_n|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On déduit de l'Etape 1 que $\lambda_n \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$.

3. $VP(T) \setminus \{0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où $A_n := \{\lambda \in VP(T); |\lambda| > 1/n\}$. D'après le 2), A_n est en ensemble fini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que $VP(T) \setminus \{0\}$ est fini ou dénombrable (reunion dénombrable d'ensembles finis). $\square$

8.4 Annexe 1 : Réduction des endomorphismes normaux en dimension finie

Théorème 22 (Reduction des endomorphismes normaux) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une bon de E formée de vecteurs propres pour f .

Lemme 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et normale. Alors A est diagonale.

Preuve du Lemme : La preuve se fait par récurrence sur n . La propriété est évidente pour $n = 1$. Pour passer de n à $n + 1$, on fait du calcul bloc :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & C \\ \hline 0 & a \end{array} \right)$$

où A_1 est une matrice $n \times n$ triangulaire supérieure, C est un vecteur colonne $n \times 1$ et a un scalaire. Alors

$$0 = AA^* - A^*A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 A_1^* - A_1^* A_1 + C C^* & \bar{a} C - A_1^* C \\ \hline a C^* - C^* A_1 & -C^* C \end{array} \right).$$

En considérant la composante bloc $(2, 2)$, on voit que $\|C\|^2 = C^* C = 0$, donc $C = 0$ dans $\mathbb{K}^n$. En considérant la composante bloc $(1, 1)$, on en déduit que A_1 est normal. Par hypothèse de récurrence A_1 est diagonale. En conclusion, A est diagonale. $\square$

Preuve de la réduction des endomorphismes normaux : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure (corollaire du Lemme des noyaux). Soit $\mathcal{B}'$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\mathcal{B}$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire (par construction de l'orthonormalisée de Gram-Schmidt) et normale (car la matrice de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}'$ est unitaire, car ces 2 bases sont orthonormales). D'après le lemme précédent, elle est donc diagonale. $\square$

Lorsqu'on souhaite généraliser le thm spectral en dimension infinie, il faut se poser 3 questions :

- Quel est la notion de spectre et de valeur propre en dimension infinie ? Il s'agit maintenant de 2 notions distinctes.
- Quel concept généralise, en dimension infinie, la notion de base de la dimension finie ? Il s'agit de la notion de 'base hilbertienne'.
- Sous quelles hypothèse les endomorphismes autoadjoints sont-ils diagonalisables en dimension infinie ? Une hypothèse de **compacité** de l'opérateur est nécessaire.

8.5 Annexe 2 : Propriétés des opérateurs compacts sur un Hilbert

Proposition 47 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un Hilbert sur $\mathbb{R}$.

1. $\mathcal{K}(H)$ est un sev fermé de $\mathcal{L}_c(H)$.
2. $T \in \mathcal{L}_c(H)$ est compact ssi T est limite, dans $\mathcal{L}_c(H)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini.
3. Si $T \in \mathcal{K}(H)$ alors $T^* \in \mathcal{K}(H)$.

Le 2e énoncé est très spécifique au cas Hilbertien (il repose sur le thm de projection).

Preuve :

1. La structure d'év est claire. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(H)$ et $T \in \mathcal{L}_c(H)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}_c(H)} \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$. Montrons que $T \in \mathcal{K}(H)$. Comme F est complet, il suffit de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $T[B_H(0, 1)]$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B_H(f_i, \epsilon)$. Soit $\epsilon > 0$ et $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_N - T\|_{\mathcal{L}_c(H)} < \epsilon/2$. Comme $T_N[B_H(0, 1)]$ est relativement compact, $T_N[B_H(0, 1)] \subset \cup_{1 \leq i \leq p} B(f_i, \epsilon/2)$. Alors $T[B_H(0, 1)] \subset T_N[B_H(0, 1)] + B_H(0, \epsilon/2) \subset \cup_{1 \leq i \leq p} B(f_i, \epsilon)$.
2. Un opérateur de rang fini est compact et $\mathcal{K}(H)$ est fermé donc tout opérateur limite d'opérateurs de rang fini est compact. Réciproquement, considérons $T \in \mathcal{K}(H)$ et $\epsilon > 0$. On cherche $S \in \mathcal{L}_c(H)$ de rang fini tel que $\|T - S\|_{\mathcal{L}_c(H)} < \epsilon$. $K := \overline{T[B_H(0, 1)]}$ est compact donc $K \subset \cup_{1 \leq i \leq p} B(f_i, \epsilon)$. Soit $G := \text{Vect}\{f_1, \dots, f_p\}$ et P_G la projection orthogonale $H \rightarrow G$. Soit $S := P_G \circ T$. Alors S un opérateur de rang fini et $\|S - T\|_{\mathcal{L}_c(H)} < \epsilon$. En effet, si $x \in \overline{B_H(0, 1)}$, alors il existe $i_0 \in [1, p]$ tel que $\|T(x) - f_{i_0}\| < \epsilon$ et donc $\|T(x) - P_G[T(x)]\| \leq \|T(x) - f_{i_0}\| < \epsilon$.
3. Si T est compact alors il est limite d'opérateurs T_n de rang fini. Comme $\|T^* - T_n^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T - T_n\|_{\mathcal{L}_c(H)}$ alors T^* est limite d'opérateurs de rang fini, donc compact. $\square$

8.6 Annexe 3 : Preuve partielle du théorème spectral

Afin de démontrer le thm spectral, nous allons admettre le résultat suivant, qui repose sur l'alternative de Fredholm (voir Brezis, Analyse fonctionnelle, Thm VI.8)

Proposition 48 Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$.

Proposition 49 Soit H un Hilbert, $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjoint et

$$m := \inf\{\langle T(u), u \rangle; u \in H\}, \quad M := \sup\{\langle T(u), u \rangle; u \in H\}.$$

Alors

1. $\sigma(T) \subset [m, M]$,
2. $m, M \in \sigma(T)$.
3. en particulier, si $\sigma(T) = \{0\}$ alors $T = 0$.

Preuve :

1. Soit $\lambda > M$. Montrons que $(T - \lambda I) : H \rightarrow H$ est bijectif.

Etape 1 : Montrons que

$$\langle u, v \rangle_a := \langle (\lambda - T)u, v \rangle, \quad \forall u, v \in H$$

définit un produit scalaire sur H .

- (PS1) $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_a$ est une forme bilinéaire/sesquilinéaire,
- (PS2) symétrique/hermitienne car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'est et $(\lambda - T)$ est linéaire,
- (PS3)+(PS4) définie et positive car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'est et $\langle u, v \rangle_a \geq (\lambda - M)\|u\|^2$.

Etape 2 : Montrons que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ est un Hilbert. Cela résulte de la complétude de $(H, \|\cdot\|)$ et de l'équivalence des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_a$:

$$(\lambda - M)\|u\|^2 \leq \|u\|_a \leq (|\lambda| + \|T\|)\|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

Etape 3 : Montrons que $(T - \lambda I) : H \rightarrow H$ est bijectif. Soit $f \in H$. L'application

$$\begin{cases} H & \rightarrow \mathbb{K} \\ v & \mapsto \langle f, v \rangle \end{cases}$$

est linéaire et continue sur $(H, \|\cdot\|)$ (CYS) donc aussi continue sur $(H, \|\cdot\|_a)$ par équivalence des normes. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\langle u, v \rangle_a = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H,$$

c'est-à-dire

$$\langle (\lambda - T)u - f, v \rangle = 0, \quad \forall v \in H.$$

Il en résulte que $-u$ est l'unique solution de l'équation (d'inconnue x) $(T - \lambda I)x = f$. Ainsi $(T - \lambda I) : H \rightarrow H$ est bijectif.

Etape 4 : Montrons que $\sigma(T) \subset [m, M]$. Il résulte de ce qui précède que $\sigma(T) \subset (-\infty, M]$. En appliquant ce résultat avec $T \leftarrow -T$, on obtient $\sigma(T) \subset [m, M]$.

2. Par le même argument, il suffit de montrer que $M \in \sigma(T)$.

Etape 1 : Montrons que

$$\|(M - T)u\| \leq C\sqrt{\langle (M - T)u, u \rangle}, \quad \forall u \in H,$$

pour une certaine constante $C > 0$. La forme bilinéaire/sesquilinéaire

$$a(u, v) := \langle (M - T)u, v \rangle \quad \forall u, v \in H,$$

est symétrique et positive (mais pas forcément définie). Elle vérifie donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle (M - T)u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle (M - T)u, u \rangle} \sqrt{\langle (M - T)v, v \rangle}, \quad \forall u, v \in H.$$

En effet, la preuve de l'inégalité large de CYS ne requiert pas que la forme soit définie (un polynôme de degré 2 partout ≥ 0 sur $\mathbb{R}$ a un discriminant ≤ 0) seule la caractérisation du cas d'égalité l'utilise. On en déduit que

$$\begin{aligned} \|(M - T)u\| &= \max\{|\langle (M - T)u, v \rangle|; v \in H \text{ et } \|v\| = 1\} \\ &\leq \max\{\sqrt{\langle (M - T)u, u \rangle} \sqrt{\langle (M - T)v, v \rangle}; v \in H \text{ et } \|v\| = 1\} \\ &\leq C \sqrt{\langle (M - T)u, u \rangle} \end{aligned}$$

où $C := \sqrt{|M| + \|T\|}$.

Etape 2 : Montrons que $M \in \rho(T)$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de H telle que $\|u_n\| \equiv 1$ et $\langle Tu_n, u_n \rangle \rightarrow M$. Alors

$$\|(M - T)u_n\| \leq C \sqrt{\langle (M - T)u_n, u_n \rangle} = C \sqrt{M - \langle Tu_n, u_n \rangle} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par absurde, supposons que $M \in \rho(T)$. Alors $(M - T) : H \rightarrow H$ est un bijective et bicontinue donc $u_n = (M - T)^{-1}[(M - T)u_n] \rightarrow 0$ (continuité de $(M - T)^{-1}$). Or $\|u_n\| \equiv 1$: contradiction.

3. Si $\sigma(T) = \{0\}$ alors $\langle T(u), u \rangle = 0$ pour tout $u \in H$ donc $\langle T(u), v \rangle = 0$ pour tout $u, v \in H$ (formules de polarisation + T autodjoint). Donc $T = 0$.

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant.

Proposition 50 *Soit H un Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjoint compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T .*

Preuve : Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ la suite des vap de T et $\lambda_0 := 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $E_n := \text{Ker}(T - \lambda_n I)$. Alors les E_n sont 2 à 2 orthogonaux, $0 \leq \dim(E_0) \leq \infty$ et $0 < \dim(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F l'espace vectoriel engendré par tous les E_n . Comme $T(E_n) \subset E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors F est stable par T . En conséquence $F^\perp$ est stable par $T^* = T$. Alors $L := T|_{F^\perp}$ est autoadjoint et compact et $\sigma(L) = \{0\}$. En effet, si $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ alors $\lambda \in VP(L) \setminus \{0\}$ (voir la proposition admise sur les opérateurs compacts) et donc il existe $v \in F^\perp$ tel que $L(v) = \lambda v$, ce qui contredit la définition de F . Comme $\sigma(L) = \{0\}$ alors $L = 0$, cad $F^\perp \subset E_0 \subset F$ et donc $F^\perp = \{0\}$. $\square$

8.7 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation

- les définitions,
- les énoncés et preuves de la Section 7.1 (endomorphisme adjoint),
- des manipulations similaires à celles des preuves des Section 7.2 et 7.3, dans des exercices guidés.

Chapitre 9

Théorèmes de Hahn Banach complément de dualité

9.1 Théorème de Hahn Banach analytique

Théorème 23 (Hahn-Banach analytique) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -evn, F un sev de E et $g \in F'$. Alors il existe $\tilde{g} \in E'$ tel que $\tilde{g}|_F = g$ et $\|\tilde{g}\|_{E'} = \|g\|_{F'}$.

Il y a 2 situations où la preuve de cet énoncé est élémentaire :

- si E est de dimension finie,
- si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert.

Dans le cas général, la preuve repose sur l'axiome de Zorn. Ces preuves font l'objet des sections suivantes.

Le théorème de Hahn-Banach analytique a un corollaire particulièrement important : la caractérisation de la norme par dualité.

Corollaire 6 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -evn. Pour tout $x_0 \in E$ on a

$$\|x_0\|_E = \max \{ \langle g, x_0 \rangle_{E', E}; g \in E', \|g\|_{E'} \leq 1 \} . \quad (9.1)$$

Remarque 23 Il faut bien distinguer la formule

$$\|g\|_{E'} := \sup \{ \langle g, f \rangle_{E', E}; f \in E, \|f\|_E \leq 1 \}$$

qui est une **définition**, avec un sup qui n'est pas forcément un max, de la formule (9.1), qui est un résultat.

Preuve : Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Il est clair que

$$\|x_0\|_E \geq \sup \{ \langle g, x_0 \rangle_{E', E}; g \in E', \|g\|_{E'} \leq 1 \} .$$

Montrons qu'il existe $\tilde{g} \in E'$ tel que $\|\tilde{g}\|_{E'} \leq 1$ et $\langle \tilde{g}, x_0 \rangle_{E', E} = \|x_0\|_E$, ce qui fournira la conclusion. On applique le thm H-B analytique avec $F := \mathbb{R}x_0$ et $g \in F'$ définie par $\langle g, tx_0 \rangle_{F', F} := t\|x_0\|_E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il est clair que $\|g\|_{F'} = 1$. Alors il existe $\tilde{g} \in E'$ de norme ≤ 1 qui prolonge g , en particulier $\langle \tilde{g}, x_0 \rangle_{E', E} = \langle g, x_0 \rangle_{F', F} = \|x_0\|_E$. $\square$

9.1.1 Preuve de H-B analytique sur un Hilbert

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un Hilbert, F un sev de H et $g \in F'$. Le thm de prolongement des applications uniformément continues permet de prolonger g en une forme linéaire continue sur $\overline{F}$ de même norme, noté encore $g : g \in \overline{F}'$. Comme $\overline{F}$ est un sev fermé de $(H, \|\cdot\|)$, le TSO s'applique : $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$. Cela permet de définir $\tilde{g} \in H'$ de la façon suivante :

$$\tilde{g}(x + y) := g(x), \quad \forall x \in \overline{F}, y \in \overline{F}^\perp.$$

Alors $\tilde{g}|_F = g$ donc $\|\tilde{g}\|_{H'} \geq \|g\|_{F'}$. De plus, pour tout $x \in \overline{F}, y \in \overline{F}^\perp$,

$$\|\tilde{g}(x + y)\| = \|g(x)\| \leq \|g\|_{\overline{F}'} \|x\| \leq \|g\|_{F'} \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} = \|g\|_{F'} \|x + y\|,$$

donc $\|\tilde{g}\|_{H'} \leq \|g\|_{F'}$. En conclusion, $\|\tilde{g}\|_{H'} = \|g\|_{F'}$.

Notez bien que l'orthogonalité de la décomposition $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$ est fondamentale pour montrer que $\|\tilde{g}\|_{H'} = \|g\|_{F'}$. Si on remplaçait $\overline{F}^\perp$ par un supplémentaire non orthogonal, cette égalité pourrait ne pas être valide.

9.1.2 Prolongement avec une dimension de plus

Le but de cette section est de démontrer le Lemme suivant.

Lemme 6 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -evn, F un sev strict de E , $g \in F'$ et $x_0 \in E \setminus F$. Il existe une forme linéaire continue h sur $G := F + \mathbb{R}x_0$, qui prolonge g et vérifie $\|h\|_{G'} = \|g\|_{F'}$.*

Preuve : On peut supposer que $\|g\|_{F'} = 1$.

Etape 1 : Construction de h . On définit $h \in G'$ par

$$h(x + tx_0) := g(x) + t\alpha, \quad \forall x \in F, t \in \mathbb{R}.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ va être choisi de sorte que $\|h\|_{G'} \leq 1$. On a

$$\begin{aligned} & \|g(\tilde{x}) + t\alpha\| \leq \|\tilde{x} + tx_0\|, \forall \tilde{x} \in F, t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \|g(x) + \alpha\| \leq \|x + x_0\|, \forall x \in F, t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & -\|x + x_0\| \leq g(x) + \alpha \leq \|x + x_0\|, \forall x \in F, t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & g(-x) - \|x + x_0\| \leq \alpha \leq \|x + x_0\| - g(x), \forall x \in F, t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \sup\{g(y) - \|y - x_0\|; y \in F\} \leq \alpha \leq \inf\{\|x + x_0\| - g(x); x \in F\} \end{aligned}$$

Pour justifier qu'un tel α existe, il suffit de démontrer l'étape suivante.

Etape 2 : Montrons que $g(y) - \|y - x_0\| \leq \|x + x_0\| - g(x)$ pour tous $x, y \in F$. En utilisant la propriété $\|g\|_{F'} = 1$ et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$g(x + y) \leq \|x + y\| \leq \|x + x_0\| + \|y - x_0\|, \quad \forall x, y \in F.$$

Par linéarité de g , on en déduit que

$$g(y) - \|y - x_0\| \leq \|x + x_0\| - g(x), \quad \forall x, y \in F. \square$$

9.1.3 Preuve de H-B analytique en dimension finie

Récurrence descendante sur la dimension de F + Lemme précédent à chaque itération.

9.1.4 Preuve de H-B analytique dans le cas général via l'axiome de Zörn

Definition 32 Soit Z un ensemble. Un **ordre inductif** sur Z est une relation binaire et transitive $\leq$ sur Z , pour laquelle toute famille totalement ordonnée admet un élément maximal.

Théorème 24 (Axiome de Zorn) Tout ensemble non vide muni d'un ordre inductif admet un élément maximal.

Preuve de Hahn-Banach analytique : On peut supposer que $\|g\|_{F'} = 1$. Notons

$$Z := \{(D(h), h); D(h) \text{ sev de } E \text{ contenant } F, h \in D(h)', h|_F = g, \|h\|_{D(h)'} \leq 1\}.$$

Alors Z est un ensemble non vide car il contient (F, g) . On muni Z de la relation d'ordre $\leq$ définie par

$$(D(h_1), h_1) \leq (D(h_2), h_2) \quad \text{si} \quad D(h_1) \subset D(h_2) \quad \text{et} \quad h_2|_{D(h_1)} = h_1.$$

Etape 1 : Montrons que cet ordre est inductif. Soit $(D(h_j), h_j)_{j \in J}$ une famille totalement ordonnée de Z : pour tout $j \neq k \in J$, ou bien $(D(h_j), h_j) \leq (D(h_k), h_k)$ ou bien $(D(h_k), h_k) \leq (D(h_j), h_j)$.

Montrons que, pour tout $j \neq k \in J$ tels que $D(h_j) \cap D(h_k) \neq \emptyset$ alors $h_j = h_k$ sur $D(h_j) \cap D(h_k)$. En effet, quitte à échanger j et k , on peut supposer que $(D(h_j), h_j) \leq (D(h_k), h_k)$ (famille totalement ordonnée). Alors $D(h_j) \cap D(h_k) = D(h_j)$ et $h_k|_{D(h_j)} = h_j$.

Ceci permet de définir

$$D(h^*) := \cup_{j \in J} D(h_j) \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ll} h^* : D(h^*) & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto h_j(x) \text{ si } x \in D(h_j). \end{array} \right.$$

Vérifions que $(D(h^*), h^*)$ est bien un élément de Z .

– *Montrons que $D(h^*)$ est un sev de E contenant F .*

Soient $x, y \in D(h^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe $j, k \in J$ tels que $x \in D(h_j)$ et $y \in D(h_k)$. Comme la famille est totalement ordonnée, on peut supposer que $(D(h_j), h_j) \leq (D(h_k), h_k)$. Alors $x, y \in D(h_k)$ et $D(h_k)$ est un sev de E donc $\lambda x + y \in D(h_k) \subset D(h^*)$. Ceci montre que $D(h^*)$ est un sev de E . De plus, $F \subset D(h_j) \subset D(h^*)$ donc $D(h^*)$ contient F .

– *Montrons que h^* est une forme linéaire sur $D(h^*)$.*

Soient $x, y \in D(h^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et $j, k \in J$ comme précédemment. Alors $h^*(\lambda x + y) = h_k(\lambda x + y) = \lambda h_k(x) + h_k(y) = \lambda h^*(x) + h^*(y)$. Donc h^* est bien linéaire.

– *Montrons que $h^*|_F = g$.*

Soit $z \in F$ et $j \in J$. Comme $F \subset D(h_j)$ alors $h^*(z) = h_j(z) = g(z)$.

– *Montrons que $\|h^*\|_{D(h^*)'} \leq 1$.*

Soit $x \in D(h^*)$ et $j \in J$ tel que $x \in D(h_j)$. Alors

$$\|h^*(x)\| = \|h_j(x)\| \leq \|x\|.$$

Ainsi $(D(h^*), h^*)$ est un élément de Z qui majore la suite $(D(h_j), h_j)_{j \in J}$.

Etape 2 : Concluons grâce à l'axiome de Zörn. D'après l'axiome de Zorn, Z admet un élément maximal

$$(D(\tilde{g}), \tilde{g}) \in Z \quad \text{et} \quad (D(h), h) \leq (D(\tilde{g}), \tilde{g}), \forall (D(h), h) \in Z.$$

Si $D(\tilde{g}) \neq E$, alors le Lemme 6 permet de prolonger $\tilde{g}$ en une forme linéaire de norme ≤ 1 sur un sev de E contenant strictement $D(\tilde{g})$, ce qui contredit la maximalité de $(D(\tilde{g}), \tilde{g})$. En conséquence, $D(\tilde{g}) = E$. Par construction $\|\tilde{g}\|_{E'} \leq 1$, mais comme $\tilde{g}$ prolonge g alors $\|\tilde{g}\|_{E'} \geq \|g\|_{F'} = 1$, donc $\|\tilde{g}\|_{E'} = 1$. $\square$

9.2 Complément de dualité

L'énoncé suivant résulte du Corollaire 6.

Proposition 51 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -evn. On munit

- E' de la norme subordonnée à $\|\cdot\|$:

$$\|g\|_{E'} = \sup\{\langle g, x \rangle_{E', E}; x \in E, \|x\| = 1\},$$

- E'' de la norme subordonnée à $\|\cdot\|_{E'}$:

$$\|\xi\|_{E''} = \sup\{\langle \xi, g \rangle_{E'', E}; g \in E', \|g\|_{E'} = 1\}.$$

Alors l'injection canonique

$$\left| \begin{array}{ccc} J^E : & E & \rightarrow E'' \\ & x & \mapsto (g \in E' \mapsto \langle g, x \rangle_{E', E} \in \mathbb{K}) \end{array} \right.$$

est une isométrie de $(E, \|\cdot\|)$ sur $(E'', \|\cdot\|_{E''})$.

Définition 33 Soit E un Banach. E est **réflexif** si l'injection canonique $J : E \rightarrow E''$ est surjective.

Remarque 24 Rappelons que, si X est un EVN et Y est un Banach alors $\mathcal{L}_c(X, Y)$ est complet (Exercice classique!). C'est la complétude de l'espace d'arrivée Y qui est utilisée dans la preuve.

Ainsi, la notion de réflexivité n'a de sens que pour un espace E **complet**. En effet, si E est un evn et si J est surjective de E sur E'' alors E est isométrique à $E'' = (E')'$ qui est complet (grâce à la complétude de $\mathbb{R}$), donc E est complet.

La notion de réflexivité permet de démontrer les mêmes résultats, pour un Banach réflexif, que pour un espace de Hilbert, en remplaçant le produit scalaire par des crochets de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$. Elle compense l'absence de thm de Riesz. Par exemple, on peut démontrer (mais cela dépasse le cadre de ce cours de L3) que, dans un Banach réflexif séparable, toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement.

Espaces réflexifs :

1. Les ev de dimension finie.
2. Les Hilberts (Thm de Riesz) : $l^2(\mathbb{N})$, $L^2(\Omega)$, $H^1(0, 1)$, $H_0^1(0, 1)$, ...
3. $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ pour $1 < p < \infty$ car $(l^p)' = l^{p'}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, pour tout $p \in [1, \infty)$ (voir les compléments d'Arnaud Debussche).
4. $L^p(\Omega, \nu)$ pour $1 < p < \infty$ avec ν mesure σ -finie car $(L^p)' = L^{p'}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, pour tout $p \in [1, \infty)$ [voir les compléments d'Arnaud Debussche, via Radon-Nikodym].

Espaces non réflexifs :

1. On note c^0 l'espace des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ qui tendent vers zéro, muni de la norme $\|\cdot\|_{l^\infty}$. Alors $(c^0)' = l^1$ et $(l^1)' = l^\infty$ [voir les compléments d'Arnaud Debussche] donc c^0 n'est pas réflexif. On en déduit que l^1 et l^∞ ne sont pas réflexifs. [voir Brezis Corollaire III.18 : un Banach E est réflexif ssi son dual E' est réflexif]

Preuve de $(c^0)' = l^1$:

Etape 1 : $l^1 \subset (c^0)'$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. La forme linéaire $x \in c^0 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n$ est continue car

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| |u_n| \leq \|x\|_{l^\infty} \|u\|_{l^1}.$$

Etape 2 : $(c^0)' \subset l^1$. Soit $\xi \in (c^0)'$ et $u_n := \xi(e_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tel que $|u_n| = \xi(\epsilon_n e_n)$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N |u_n| = \xi \left(\sum_{n=0}^N \epsilon_n e_n \right) \leq \|\xi\|_{(c^0)'} \sum_{n=0}^N \epsilon_n e_n \leq \|\xi\|_{(c^0)'},$$

les sommes partielles sont uniformément majorées donc $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Montrons que $\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n$ pour tout $x \in c^0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Soit $x \in c^0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leq \epsilon / \|\xi\|_{(c^0)'}$, $\forall n > N$. Alors

$$\left| \xi(x) - \sum_{n=0}^N x_n u_n \right| = \left| \xi(x - x 1_{[-N, N]}) \right| \leq \|\xi\|_{(c^0)'} \frac{\epsilon}{\|\xi\|_{(c^0)'}} = \epsilon. \square$$

9.3 Théorème de Hahn Banach géométrique

9.3.1 Hyperplans (rappels)

Definition 34 (espace quotient, surjection canonique) Soit E un espace vectoriel et F un sev de E . La relation binaire sur E définie par

$$x \sim y \quad \text{ssi} \quad x - y \in F$$

est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive). L'ensemble E/F des classes d'équivalences est muni d'une structure d'espace vectoriel

$$s(x) + s(y) := s(x + y) \quad \text{et} \quad s(\lambda x) = \lambda s(x), \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Alors $s : E \rightarrow E/F$ est linéaire, surjective de noyau F .

Proposition 52 Soit E, F des ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\text{Im}(f)$ est isomorphe à $E/\text{Ker}(f)$.

Preuve : L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \theta : E/\text{Ker}(f) & \rightarrow & \text{Im}(f) \\ s(x) & \mapsto & f(x) \end{array} \right|$$

est

- bien définie : si $x_1, x_2 \in E$ satisfont $s(x_1) = s(x_2)$ dans E/F alors $x_1 - x_2 \in \text{Ker}(f)$ donc $f(x_1) = f(x_2)$,
- linéaire : $\theta[\lambda s(x) + s(y)] = \theta[s(\lambda x + y)] = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda \theta(x) + \theta(y)$,
- injective : si $f(x) = 0$ alors $x \in \text{Ker}(f)$ donc $s(x) = 0$ dans $E/\text{Ker}(f)$,
- surjective : si $y \in \text{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $y = \theta[s(x)]$. $\square$

Proposition 53 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et H un sev de E . EQU :

1. H est un sev strict de E maximal pour l'inclusion : si $\tilde{H}$ est un sev de E qui contient H alors $\tilde{H} = H$ ou E ,
2. pour tout $e \in E \setminus H$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}e$,

3. il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (non nécessairement continue) telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$
4. $\dim(E/H) = 1$,
5. il existe $e \in E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}e$.

On dit alors que H est un **hyperplan** de E . De plus, si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $H = \text{Ker}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2)$ alors φ_1 et φ_2 sont colinéaires.

Preuve : $1 \Rightarrow 2$: Si $e \in E \setminus H$ alors $\mathbb{K}e \cap H = \{0\}$ et $H \oplus \mathbb{K}e$ est un sev de E contenant strictement H donc il coïncide avec E .

$2 \Rightarrow 3$: Si $x = h + \lambda e$ est une décomposition de $x \in E$ adaptée à la décomposition $E = H \oplus \mathbb{K}e$ on définit $\varphi(x) := \lambda$. Alors $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $H = \text{Ker}(\varphi)$.

$3 \Rightarrow 4$: D'après la section précédente $\mathbb{K} = \text{Im}(\varphi)$ est isomorphe à E/H donc $\dim(E/H) = 1$.

$4 \Rightarrow 5$: Soit $e \in E$ tel que $s(e) \neq 0$ dans E/H . Alors $e \notin H$ donc $\mathbb{K}e \cap H = \{0\}$. Pour $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $s(x) = \lambda s(e)$ alors $x - \lambda e \in H$. Ainsi, $E = H \oplus \mathbb{K}e$. $\square$

Tout cela ne tient pas compte de la topologie.

Proposition 54 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, H un hyperplan de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. *ÉQU :*

1. H est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$
2. $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, cad $\varphi \in E'$.

Preuve : $2 \Rightarrow 1$: Si φ est continue alors $H = \text{Ker}(\varphi)$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{K}$ par l'application continue φ .

$1 \Rightarrow 2$: Réciproquement supposons que $H = \text{Ker}(\varphi)$ soit fermé et montrons que φ est continue. Comme H est un sev strict de E alors $\varphi \neq 0$ et donc $V := \{x \in E; \varphi(x) = 1\}$ est non vide (utiliser la linéarité pour ajuster la valeur de φ à 1). Soit $a \in V$. Alors $V = a + H$ est fermé, donc $E \setminus V$ est ouvert. Comme $0 \in E \setminus V$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset E \setminus V$, cad $\varphi(x) \neq 1$ pour tout $x \in B(0, r)$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in B(0, r)$ tel que $|\varphi(x)| > 1$. Alors

$$\left\| \frac{x}{\varphi(x)} \right\| = \frac{\|x\|}{|\varphi(x)|} < \|x\| < r,$$

cad $\frac{x}{\varphi(x)} \in B(0, r)$. En conséquence $1 \neq \varphi\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)$: contradiction. En conclusion, $|\varphi(x)| \leq 1$ pour tout $x \in B(0, r)$ donc $|\varphi(x)| \leq \frac{2\|x\|}{r}$ pour tout $x \in E$ par linéarité, ainsi φ est continue. $\square$

L'énoncé suivant résulte alors des 2 propositions précédentes.

Proposition 55 (*Distance d'un point à un hyperplan*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et H un hyperplan fermé de E . Alors, pour toute $\varphi \in E'$ vérifiant $H = \text{Ker}(\varphi)$ on a

$$d(x, H) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|_{E'}}, \quad \forall x \in E.$$

Exercice :

1/ Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et H le noyau d'une forme linéaire continue non nulle u . Montrer que, pour tout $a \in E$, $d(a, H) = \frac{|u(a)|}{\|u\|}$.

2/ Soit $E = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites de nombres réels qui convergent vers 0. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

3/ Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$. Montrer que $f \in E'$ et donner l'expression de $d(x, H)$. Est ce que $\|\cdot\|_{E'}$ est atteinte ?

SOLUTION :

1/ Soit $x \in E$. Pour tout $h_0 \in H$, on a $|u(x)| = |u(x - h_0)| \leq \|u\| \|x - h_0\|$ donc $|u(x)| \leq \|u\|_{E'} \text{dist}(x, H)$ cad

$$\text{dist}(x, H) \geq \frac{|u(x)|}{\|u\|_{E'}}.$$

H est un hyperplan de E : il existe $e \in E$ (qu'on peut supposer de norme = 1) tel que $E = H \oplus \mathbb{R}e$. Soit $x = h + \lambda e \in E$ la décomposition adaptée. Alors $|u(x)| = |u(\lambda e)| = |\lambda| |u(e)| = |\lambda| \|u\|_{E'}$ donc

$$\text{dist}(x, H) \leq \|x - h\| = |\lambda| = \frac{|u(x)|}{\|u\|_{E'}}.$$

2/ Reproduire la preuve classique de complétude.

3/ $|f(x)| \leq \|x\|_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ donc f est continue et $\|f\|_{E'} \leq 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(1_{[0,n]}) = (2 - \frac{1}{2^n}) \|1_{[0,n]}\|_{\infty}$ donc $\|f\|_{E'} \geq 2 - \frac{1}{2^n}$. Ainsi, $\|f\|_{E'} = 2$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$ et $|f(x)| = 2$. Alors

$$0 = 2 - |f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x_n) \frac{1}{2^n}$$

donc (série à terme positifs de somme nulle) $x_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit sa convergence vers 0.

9.3.2 Théorème de Hahn Banach géométrique

Théorème 25 Soit E un $\mathbb{R}$ -evn, A, B deux convexes non vides disjoints de E avec A fermé et B compact. Alors il existe $g \in E'$, $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\langle g, x \rangle_{E', E} \leq a - \epsilon, \forall x \in A \quad \text{et} \quad \langle g, x \rangle_{E', E} \geq a + \epsilon, \forall x \in B.$$

Le thm de Hahn-Banach géométrique découle du thm de Hahn-Banach analytique, dans lequel la norme est remplacée par la jauge d'un convexe [cf Brézis, Chap 1].

Corollaire 7 Soit F un sev de E . Alors $(F \text{ dense dans } E) \Leftrightarrow (\{g \in E'; g|_F = 0\} = \{0\})$.

Preuve : L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Montrons $\Leftarrow$. On suppose que $\{g \in E'; g|_F = 0\} = \{0\}$. Par l'absurde, supposons que F n'est pas dense dans E : $\exists x_0 \in E \setminus \overline{F}$. Alors $\overline{F}$ et $\{x_0\}$ sont des convexes non vides disjoints, l'un fermé, l'autre compact donc il existe $g \in E'$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle g, x \rangle_{E', E} < a < \langle g, x_0 \rangle_{E', E}, \forall x \in \overline{F}. \quad (9.2)$$

Grâce à la structure d'ev de F , on en déduit que $g|_F = 0$. Alors, par hypothèse $g = 0$. Or, $0 < a < \langle g, x_0 \rangle_{E', E}$: contradiction $\square$

Le thm de Hahn-Banach géométrique joue, dans un espace de Banach, le rôle du thm de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert : notez la similarité entre (5.2) et (9.2). Attention, les 2 thm de Hahn-Banach s'énoncent sur un EVN (et pas sur un Banach)

9.4 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation

- l'énoncé du théorème de Hahn-Banach analytique, exercices d'application directe
- la caractérisation de la norme par dualité, exercices d'application directe.

Chapitre 10

Fonctions d'une variable réelle

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats importants sur les fonctions d'une variable réelle. Il y a essentiellement 2 raisons à cela :

1. De nombreux résultats sur les fonctions de plusieurs variables (cad définies sur une partie de $\mathbb{R}^N$ ou d'un evn de dimension infinie), que nous manipulerons aux chapitres suivants, s'obtiennent en se ramenant au cas d'une fonction à variable réelle, via la fonction auxiliaire u :

$$f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F), \quad a, h \in E, t \in \mathbb{R}, \quad u(t) := f(a + th).$$

Il est donc essentiel d'avoir les idées claires sur les fonctions de la variable réelle.

2. Certains énoncés requièrent plus d'hypothèses que d'autres sur l'espace d'arrivée des fonctions. En particulier, lorsque l'énoncé ou sa preuve utilise une intégrale, alors l'espace d'arrivée doit être complet, pour que l'intégrale de Riemann soit bien définie (Voir Annexe 1). Nous nous attacherons donc à éviter au maximum au recours aux intégrales dans les preuves, pour disposer d'énoncés sur les fonctions à valeurs dans un evn (cad sans hypothèse de complétude à l'arrivée).

10.1 Dérivabilité

10.1.1 Définition

Définition 35 (Dérivabilité) Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$.

- f est **dérivable en a** si
 - les taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admettent une limite L dans $(E, \|\cdot\|)$ quand $[h \rightarrow 0]$,
 - ou, de façon équivalente, s'il existe $L \in E$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o_{h \rightarrow 0}(|h|).$$

Alors L est la dérivée de f en a et notée $f'(a)$.

- f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout point $x \in I$.
- f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si $f' \in C^0(I, \mathbb{R})$. On note alors $f \in C^1(I, E)$.
- Par récurrence, on définit la dérivée n -ième de f , $f^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (lorsqu'elle existe)
- f est de classe C^n sur I si $f^{(n)} : I \rightarrow E$ est bien définie et continue sur I .

Remarque 25 La notion de dérivabilité requiert que l'intervalle de définition de f soit ouvert, car il faut pouvoir évaluer f sur $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ pour calculer la limite des taux d'accroissement.

Définition 36 (Dérivabilité à droite/gauche) Avec les mêmes notations que précédemment, on dit que f admet une **dérivée à droite** (resp. **à gauche**) en a si les taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admettent une limite finie L dans $(E, \|\cdot\|)$ quand $[h \rightarrow 0^+]$ (resp. quand $[h \rightarrow 0^-]$). On la note alors $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Exercice 1 : (de manipulation de la définition) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $x = 0$ telle que $f(0) = 0$, $L \in \mathbb{N}^*$ et $S_n := \sum_{k=0}^{nL} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

On a parfois besoin de manipuler des fonctions sur des intervalles fermés. La bonne notion est alors la suivante.

Définition 37 Soient $-\alpha < a < b < +\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ est de classe C^n sur l'intervalle fermé $[a, b]$ s'il s'agit de la restriction à l'intervalle $[a, b]$ d'une fonction $\tilde{f}$ de classe C^n sur un voisinage ouvert de $[a, b]$:

$$\exists \epsilon > 0, \exists \tilde{f} \in C^n((a - \epsilon, b + \epsilon), E) \text{ tels que } f = \tilde{f}|_{[a, b]}.$$

Proposition 56 Soient $-\infty < a < b < \infty$, $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $f : [a, b] \rightarrow E$. EQU :

1. $f \in C^n([a, b], E)$
2. $f \in C^0([a, b], E) \cap C^n((a, b), E)$, f admet des dérivées à droite en a (resp. à gauche en b) jusqu'à l'ordre n et $f^{(k)}$ est continue sur $[a, b]$ pour $k = 1, \dots, n$.

Nous donnerons plus loin une autre caractérisation, plus pratique, de ces fonctions.

Preuve : $1 \Rightarrow 2$ est évident. Montrons $2 \Rightarrow 1$ en construisant explicitement un prolongement C^n de f sur un voisinage ouvert de $[a, b]$. La fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow E$ définie par

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} & \text{si } x < a \\ f(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ \sum_{k=0}^n f^{(k)}(b) \frac{(x-b)^k}{k!} & \text{si } x > b \end{cases}$$

est clairement de classe C^n sur $(-\infty, a)$, (a, b) , et (b, ∞) . En raisonnant par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et en travaillant séparément pour $h > 0$ et $h < 0$, on obtient

$$\frac{\tilde{f}^{(k)}(a+h) - \tilde{f}^{(k)}(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f^{(k+1)}(a). \square$$

10.1.2 Propriétés élémentaires

Proposition 57 Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Une fonction dérivable en a est continue en a . La réciproque est fausse.
2. Une fonction $C^1(I, E)$ est dérivable sur I . La réciproque est fausse.
3. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur (a, b) et croissante alors $f' \geq 0$ sur I .
4. Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $c \in (a, b)$ et admet un extremum local en c alors $f'(c) = 0$.
5. **[Dérivation d'un produit]** Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$, $a \in I$ $(E, \|\cdot\|)$ une $\mathbb{R}$ -algèbre normée et $f, g : I \rightarrow E$ dérivables en a . Alors fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

6. **[Dérivation d'un quotient]** Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

7. **[Formule de Leibniz]** Si $E = \mathbb{C}$ et si $f^{(n)}(a), g^{(n)}(a)$ existent alors fg est n -fois dérivable en a et

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

8. **[Dérivation d'une fonction composée]** Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : I \rightarrow J$ dérivable en a et $f : J \rightarrow E$ dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a) f'(g(a)).$$

Dans l'énoncé 4 il est important que c soit à l'intérieur de l'intervalle de définition. En effet, $f : x \in [0, 1] \mapsto x$ admet un maximum local en $x = 1$ sur $[0, 1]$, mais $f'(1) \neq 0$.

Preuve :

1. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en $x = 0$, car

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

On peut construire des contre-exemple plus pathologiques encore : voir l'exercice ci-dessous.

2. La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. De plus

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin(1/h) \longrightarrow 0 \text{ quand } [h \rightarrow 0]$$

donc g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = 0$. Cependant

$$g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), \quad \forall x \neq 0$$

ne tend pas vers $g'(0) = 0$ quand $[x \rightarrow 0]$. Donc $g \notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Si f est croissante alors ses taux d'accroissement sont ≥ 0 donc, par passage à la limite, $f' \geq 0$.
4. Supposons que f admet un maximum local en $c \in (a, b)$:

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in (c - \epsilon, c + \epsilon).$$

Alors

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leq 0, & \forall h \in (0, \epsilon), \\ \geq 0, & \forall h \in (-\epsilon, 0). \end{cases}$$

Par passage à la limite $[h \rightarrow 0]$, on obtient $f'(c) \leq 0$ et $f'(c) \geq 0$. En conclusion, $f'(c) = 0$.

5. On a

$$\begin{aligned}(fg)(a+h) &= \left(f(a) + hf'(a) + o_{h \rightarrow 0}(|h|)\right) \left(g(a) + hg'(a) + o_{h \rightarrow 0}(|h|)\right) \\ &= (fg)(a) + h[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)] + o_{h \rightarrow 0}(|h|)\end{aligned}$$

donc (fg) est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

6. On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) &= \frac{f(a)+hf'(a)+o(h)}{g(a)+hg'(a)+o(h)} \\ &= \frac{1}{g(a)} \left(\frac{1}{1+hg'(a)/g(a)+o(h)} \right) (f(a) + hf'(a) + o(h)) \\ &= \frac{1}{g(a)} \left(1 - h\frac{g'(a)}{g(a)} + o(h) \right) (f(a) + hf'(a) + o(h)) \\ &= \left(\frac{f}{g}\right)(a) + h\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2} + o(h)\end{aligned}$$

donc $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

7. La formule de Leibniz se démontre par récurrence, en utilisant la dérivation d'un produit et la formule $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.

8. On a

$$\begin{aligned}(f \circ g)(a+h) &= f(g(a) + hg'(a) + o(h)) \quad \text{par dérivabilité de } g \text{ en } a \\ &= f[g(a)] + f'[g(a)](hg'(a) + o(h)) + o(h) \quad \text{par dérivabilité de } f \text{ en } g(a) \\ &= (f \circ g)(a) + hf'[g(a)]g'(a) + o(h)\end{aligned}$$

donc $f \circ g$ est dérivable en a et $(f \circ g)'(a) = g'(a)f'(g(a))$. □

Exercice 2 [Concentration des singularités] : Le but de cet exercice est de construire une fonction continue sur $[0, 1]$ mais non dérivable sur un ensemble dense de $[0, 1]$. Soit $R := \{r_n; n \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable de $[0, 1]$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{|x-r_n|}{3^n}$ converge pour tout $x \in [0, 1]$.
2. Montrer que sa somme $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n}$ est continue sur $[0, 1]$.
3. Montrer que f n'est dérivable en aucun point de R .
4. Conclure.

On peut également construire, sous forme de série, une fonction continue sur $[0, 1]$ et nulle part dérivable sur $(0, 1)$, appelée fonction de Weierstrass [voir Combes, Suites et séries, par exemple]

10.2 Fonctions à valeurs réelles : Rolle, EAF, Taylor Lagrange

10.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 26 (de Rolle) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle **fermé** $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle **ouvert** (a, b) et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in (a, b)$ (**ouvert**) tel que $f'(c) = 0$.

Preuve : Si f est constante sur $[a, b]$ alors tout point $c \in (a, b)$ convient. Supposons donc que f n'est pas constante. Alors $\inf\{f(x); x \in [a, b]\} < \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$ donc l'une au moins de ces 2 quantités est différente de $f(a) = f(b)$. Quitte à remplacer f par $(-f)$, on peut supposer qu'il s'agit de $\sup\{f(x); x \in [a, b]\}$. La fonction f est continue sur le compact $[a, b]$ donc il existe $c \in [a, b]$ tel que

$f(c) = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$. Comme $f(c) > f(a) = f(b)$ alors $c \in (a, b)$ et donc $f'(c) = 0$ (extrémum intérieur). $\square$

Contre-exemple : f doit être à valeurs réelles. En effet $f(t) := e^{it}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, de classe C^1 sur $(0, 2\pi)$ et $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) = ie^{it} \neq 0$ pour tout $t \in (0, 2\pi)$.

Exercice 3 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

10.2.2 Égalité des accroissements finis

Théorème 27 (Égalité des accroissements finis) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ dérivable sur (a, b) . Il existe $c \in (a, b)$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Preuve : On introduit la fonction auxiliaire

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi : [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - f(a) - K(x - a) \end{array} \right.$$

où $K \in \mathbb{R}$ est telle que $\varphi(b) = 0$, cad $K := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Alors φ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b) et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in (a, b)$ tel que $\varphi'(c) = 0$, cad $f'(c) = K$. $\square$

La technique de la fonction auxiliaire est importante. On pourra s'exercer sur l'exercice suivant.

Exercice 4 : Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ deux fois dérivable sur (a, b) telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}(x - a)(b - x)f''(c)$.
2. En déduire que $\int_a^b |f(x)|dx \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$.

L'égalité des accroissements finis permet par exemple de caractériser les fonctions monotones.

Proposition 58 Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors

1. f est croissante ssi $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in (a, b)$.
2. Si $f' > 0$ sur (a, b) alors f est strictement croissante.

Preuve : Supposons que f soit dérivable et $f' \geq 0$ (resp. $f' > 0$) sur (a, b) . Pour tous $x < y \in (a, b)$, il existe $c \in (x, y)$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ donc $f(y) \geq f(x)$ (resp. $f(y) > f(x)$) : f est croissante (resp. strictement croissante). $\square$

Contre-exemples :

- Dans l'énoncé 1, il est important que l'ensemble de départ soit connexe pour que $\Leftarrow$ soit vraie. En effet, $x \in \mathbb{R}^* \rightarrow 1/x^2$ a une dérivée > 0 sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas monotone.
- Dans l'énoncé 2., la réciproque est fautive. En effet, $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée s'annule en $x = 0$.

10.2.3 Formule de Taylor Lagrange

Théorème 28 Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ une fonction $(n + 1)$ fois dérivable sur (a, b) . Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarque 26 Rappelons que l'hypothèse $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ signifie que f peut être prolongée sur un voisinage ouvert de $[a, b]$, de la forme $(a - \epsilon, b + \epsilon)$, en une fonction de classe C^n sur $(a - \epsilon, b + \epsilon)$.

Preuve : On introduit la fonction auxiliaire

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi : [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} K \end{array} \right.$$

où $K \in \mathbb{R}$ est telle que $\varphi(b) = 0$, cad

$$K := \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right).$$

Montrons par récurrence sur $j \in \{1, \dots, n+1\}$ que, pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$, il existe $c_j \in (a, b)$ tel que $\varphi^{(j)}(c_j) = 0$.

$j = 1$: La fonction φ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b) et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in (a, b)$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

$j \mapsto j+1$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$: La fonction $\varphi^{(j)}$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, c_j]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (a, c_j) et vérifie $\varphi^{(j)}(a) = \varphi^{(j)}(c_j) = 0$ car

$$\varphi^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) - \sum_{k=j}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} - \frac{(x-a)^{n+1-j}}{(n+1-j)!} K.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_{j+1} \in (a, c_j)$ tel que $\varphi^{(j+1)}(c_{j+1}) = 0$.

Notons $c := c_{n+1}$. Alors $0 = \varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - K$ d'où la conclusion. $\square$

Exercice 5 : Inégalités de Kolmogorov.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que $M_0 := \|f\|_\infty < \infty$ et $M_2 := \|f''\|_\infty < \infty$. Le but de cet exercice est de montrer que $M_1 := \|f'\|_\infty < \infty$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, il existe $c_\pm \in (-h, h)$ tels que

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4} (f''(x+c_-) - f''(x+c_+)).$$

2. En déduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $\|f'\|_\infty \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$.

3. En déduire que $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.

Plus généralement, on peut montrer que si $M_0, M_n < \infty$ alors $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Ref : Gourdon, Analyse p. 81.

Exercice 6 : Formules de la moyenne.

1. Soient $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et $g \in L^1((a, b), \mathbb{R})$ avec $g \geq 0$ presque partout. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

2. Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ croissante et $g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Justifier que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b) \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f'(t)G(t)dt \quad \text{où} \quad G(x) := \int_a^x g(t)dt, \forall x \in [a, b].$$

En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g + f(b) \int_c^b g.$$

10.3 Fonctions à valeurs vectorielles : IAF, Taylor Young et reste intégrale

10.3.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème 29 [*IAF, fonction à variable réelle*] Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $(F, \|\cdot\|)$ un *evn*, $f \in C^0([a, b], F)$ et $\phi \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ deux fonctions admettant des dérivées à droite en tout point $t \in [a, b)$, telles que

$$\|f'_d(t)\|_F \leq \phi'_d(t), \quad \forall t \in [a, b).$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \phi(b) - \phi(a).$$

Remarque 27 Il est tentant de démontrer l'IAF de la façon suivante :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt \quad (10.1)$$

donc

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \int_a^b \|f'(t)\|_F dt \leq \int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a).$$

Mais cet argument n'est pas satisfaisant parce que

- la formulation intégrale (10.1) n'a de sens que si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet, pour utiliser l'intégrale de Riemann des fonctions $[a, b] \rightarrow F$, or cette hypothèse de complétude sur F ne figure pas dans le thm ci-dessus,
- la preuve de la formulation intégrale (10.1) **requiert** l'IAF (voir Section 10.7).

Il est donc indispensable d'avoir une preuve de l'IAF qui ne repose pas sur la formulation intégrale, sinon, la construction se mord la queue !

Notez que, même avec $F = \mathbb{R}^q$ et une intégrale de Lebesgue, la preuve de la formulation intégrale (10.1) **requiert** l'IAF (voir le cours d'intégration de Thibaut Deheuvels).

Ces remarques motivent pleinement la preuve ci-dessous.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ et

$$A := \{x \in [a, b]; \|f(x) - f(a)\|_F \leq \phi(x) - \phi(a) + \epsilon(x - a), \forall x \in [a, x]\}.$$

Alors A est non vide car $a \in A$.

Etape 1 : Montrons que, si $x \in A$ et $x < b$ alors il existe $\delta = \delta(x) > 0$ tel que $x + \delta \in A$. Soit $x \in A$ tel que $x < b$. Comme f et ϕ sont différentiables en x alors il existe $\delta = \delta(x) > 0$ tel que

$$\|f(x+t) - f(x) - tf'_d(x)\|_F \leq \frac{\epsilon t}{2}, \quad \forall t \in [0, \delta], \quad (10.2)$$

$$\phi(x+t) \geq \phi(x) + t\phi'_d(x) - \frac{\epsilon t}{2}, \quad \forall t \in [0, \delta]. \quad (10.3)$$

Alors, pour tout $t \in [0, \delta]$, on a

$$\begin{aligned} \|f(x+t) - f(a)\|_F &\leq \|f(x+t) - f(x)\|_F + \|f(x) - f(a)\|_F \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq t\|f'_d(x)\|_F + \frac{\epsilon t}{2} + \phi(x) - \phi(a) + \epsilon(x-a) \quad \text{par (10.2)} \\ &\leq t\phi'_d(x) + \phi(x) - \phi(a) + \epsilon(x-a + \frac{t}{2}) \\ &\leq \phi(x+t) - \phi(x) + \frac{\epsilon t}{2} + \phi(x) - \phi(a) + \epsilon(x-a + \frac{t}{2}) \quad \text{par (10.3)} \\ &\leq \phi(x+t) - \phi(a) + \epsilon(x-a+t). \end{aligned}$$

Etape 2 : Montrons que $b \in A$. Il résulte de l'Etape 1 que $b = \sup(A)$. Ainsi,

$$\|f(t) - f(a)\|_F \leq \phi(t) - \phi(a) + \epsilon(t-a), \quad \forall t \in [a, b).$$

Par continuité de f et de ϕ au point b , cette inégalité reste vraie en $t = b$.

Etape 3 : Conclusion. On a montré que, pour tout $\epsilon > 0$, $\|f(b) - f(a)\|_F \leq \phi(b) - \phi(a) + \epsilon(b-a)$. En passant à la limite $[\epsilon \rightarrow 0]$, on obtient $\|f(b) - f(a)\|_F \leq \phi(b) - \phi(a)$. $\square$

10.3.2 Formule de Taylor Young

Théorème 30 (Formule de Taylor Young) Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $(E, \|\cdot\|)$ un *evn*, $f \in C^n(I, E)$ une application $(n+1)$ -fois **dérivable en** a . Alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} + o_{h \rightarrow 0}(|h|^{n+1}).$$

Autrement dit

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} \right\| \leq \epsilon |h|^{n+1}, \forall h \in [-\delta, \delta].$$

Preuve : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$[\mathcal{H}(n)]$ Si $f \in C^n(I, E)$ est $(n+1)$ -fois dérivable en a , alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} + o_{h \rightarrow 0}(|h|^{n+1}).$$

Pour $n = 0$, la formule correspond à la définition de la dérivabilité en a .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $[\mathcal{H}(n-1)]$ établie et montrons $[\mathcal{H}(n)]$. Soit $f \in C^n(I, E)$ une application $(n+1)$ -fois dérivable en a . Soit $\epsilon > 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à f' , on obtient $\delta > 0$ tel que

$$\left| f'(a+h) - \sum_{k=0}^n (f')^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} \right| \leq \epsilon |h|^n, \forall h \in [-\delta, \delta]. \quad (10.4)$$

Soit $h_0 \in [-\delta, \delta]$. Pour simplifier, supposons $h_0 > 0$. On va appliquer l'IAF à l'application

$$H : h \mapsto f(a+h) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!}$$

avec $\phi(h) := \epsilon h^{n+1}/(n+1)$, $a = 0$, $b = h_0$. Les applications H et ϕ sont

- continues sur l'intervalle fermé $[0, h_0]$,
- dérivables sur l'intervalle $[0, h_0)$,
- vérifient

$$\|H'(h)\| = \left\| f'(a+h) - \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} \right\| \leq \epsilon |h|^n = \phi'(h), \forall h \in [0, h_0].$$

Donc, d'après l'IAF,

$$\left\| f(a+h_0) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h_0^k}{k!} \right\| = \|H(h_0) - H(0)\| \leq \epsilon \frac{h_0^{n+1}}{n+1}.$$

Lorsque $h_0 < 0$, il faut adapter H et ϕ : Exercice. □

La preuve de l'inégalité de Taylor Young résulte donc uniquement de la définition de la dérivabilité. Notez bien qu'il suffit que $f^{(n+1)}$ existe **en** a . Elle est valable pour des fonctions à valeurs dans un *evn*

(pas d'hypothèse de complétude). La formule de Taylor Young justifie que toute fonction C^n admet un développement limité à l'ordre n . La réciproque est fautive.

Contre-exemple : La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \sin(e^{\frac{1}{x}}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

vérifie $f(x) = o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sans être de classe C^n : elle n'est même pas C^1 . En effet, f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$ car

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h}} \sin(e^{\frac{1}{h}}) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } [h \rightarrow 0],$$

mais

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(e^{-\frac{1}{x}} \sin(e^{\frac{1}{x}}) - \cos(e^{\frac{1}{x}}) \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

ne converge pas vers $f'(0) = 0$ quand $[x \rightarrow 0]$.

La formule de Taylor Young permet de faire des calculs rigoureusement.

Exercice 7 : Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n := \left(\cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) \right)^n$$

converge et calculer sa limite.

10.3.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 31 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(E, \|\cdot\|)$ un *Banach* et $f \in C^{n+1}([a, b], E)$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Remarque 28 Notez que la complétude de $(E, \|\cdot\|)$ est nécessaire pour manipuler l'intégrale de Riemann.

Preuve : Récurrence + IPP dans le reste intégral. □

Application 1 : Une ruse très utile. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ telle que $f(0) = 0$. Alors la fonction h définie par

$$h(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet, on a (formule de Taylor reste intégral + CVAR)

$$h(x) = \int_0^1 f'(tx) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et le théorème de dérivation sous l'intégrale justifie que le membre de droite définit une fonction de classe C^∞ par rapport à $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 : Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction C^∞ paire sur $\mathbb{R}$ est de la forme $g(x^2)$, où g est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paire et $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(\sqrt{t})$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une fonction $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paire telle que $g'(t) = f_1(\sqrt{t})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Conclure.

Application 2 : Développement en série entière (DSE).

- C'est grâce à la formule de Taylor avec reste intégral qu'on démontre le DSE de fonctions usuelles, par exemple

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha) x^n, \quad \forall x \in (-1, 1), \quad \text{où } a_n(\alpha) := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- La fonction de Bessel J_0 , définie par

$$J_0(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos[x \cos(\theta)] d\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (théorème de dérivation sous l'intégrale) et $|J_0^{(k)}(x)| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\left| J_0(x+h) - \sum_{k=0}^n J_0^{(k)}(x) \frac{h^k}{k!} \right| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}.$$

Ceci montre que J_0 est développable en série entière en tout point $x \in \mathbb{R}$ et que

$$J_0(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} J_0^{(k)}(x) \frac{h^k}{k!}, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}.$$

Contre-exemple : Attention, la série de Taylor ne converge pas toujours vers la fonction.

- Il arrive que la série de Taylor converge mais que sa somme ne coïncide pas avec la fonction. Par exemple $1_{(0,\infty)}(x)e^{-1/x}$ admet une série de Taylor identiquement nulle en zéro.
- Il arrive aussi que la série de Taylor ne converge pas, comme le justifie l'exercice suivant.

Exercice 9 : Le but de cet exercice est de démontrer le

Lemme de Borel : Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{Supp}(\xi) \subset [-2, 2]$ et $\xi \equiv 1$ sur $[-1, 1]$.

1. On pose $f_n(x) := a_n \frac{x^n}{n!} \xi\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)$. Montrer que pour tout n , on peut choisir $\epsilon_n > 0$ assez petit de sorte que

$$\|f_n^{(k)}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

2. Conclure en considérant $\sum f_n$.

10.3.4 Application au prolongement

Théorème 32 (Théorème de prolongement) Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|)$ un **Banach**, $f \in C^0([a, b], E)$ dérivable sur (a, b) . Si $f'(x)$ admet une limite finie L dans $(E, \|\cdot\|)$ quand $[x \rightarrow a^+]$ alors f est dérivable à droite en a et $f'(a) = L$.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, $\|f'(x) - L\| < \epsilon$ pour tout $x \in (a, a + \delta)$. Soit $h \in (0, \delta)$. Grâce à la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - L \right\| &= \left\| \int_0^1 f'(a+th) dt - L \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|f'(a+th) - L\| dt < \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = L$. $\square$

Corollaire 8 Soient $a < c < b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(E, \|\cdot\|)$ un **Banach** et $f \in C^0((a, b), E) \cap C^n((a, c) \cup (c, b), E)$ telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $f^{(k)}(x)$ admette une limite L_k dans $(E, \|\cdot\|)$ quand $[x \rightarrow c]$. Alors $f \in C^n((a, b), E)$ et $f^{(k)}(c) = L_k$ pour $k = 1, \dots, n$.

Preuve : Par définition $\tilde{f} \in C^0((a, b), \mathbb{R})$. Le théorème précédent justifie que $\tilde{f} \in C^1((a, b), \mathbb{R})$ et que $\tilde{f}'(c) = L_1$. En ré-applicant le théorème précédent à $\tilde{f}'$, on obtient que $\tilde{f}' \in C^1((a, b), \mathbb{R})$, donc $f \in C^2((a, b), \mathbb{R})$. On obtient la conclusion par récurrence. $\square$

On obtient également la caractérisation suivante des fonctions de classe C^n sur un intervalle fermé.

Proposition 59 Soient $-\infty < a < b < \infty$, $(E, \|\cdot\|)$ un **Banach** et $f : [a, b] \rightarrow E$. EQU :

1. $f \in C^n([a, b], E)$
2. $f \in C^0([a, b], E) \cap C^n((a, b), E)$, et $f^{(k)}$ admet une limite dans $(E, \|\cdot\|)$ quand $[x \rightarrow a^+]$ et $[x \rightarrow b^-]$, pour $k = 1, \dots, n$.

Application : Construction des fonctions plateaux.

La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in (0, \infty), \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fraction rationnelle F_n telle que

$$g^{(n)}(x) = F_n(x)e^{-\frac{1}{x}}, \quad \forall x \in (0, \infty),$$

et donc $g^{(n)}(x) \rightarrow 0$ quand $[x \rightarrow 0]$. Ainsi la fonction

$$\left| \begin{array}{ll} h : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto g(x)g(1-x) \end{array} \right|$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à support compact : $\text{Supp}(h) = [0, 1]$. En conséquence, la fonction

$$\left| \begin{array}{ll} k : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\int_0^x h(t) dt}{\int_0^1 h(t) dt} \end{array} \right|$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, son support est $[0, \infty)$ et $k \equiv 1$ sur $[1, \infty)$. Il en résulte que la fonction

$$\left| \begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto k(x)k(3-x) \end{array} \right|$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact dans $[0, 3]$ et que $f \equiv 1$ sur $[1, 2]$.

Exercice : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $F(n) := \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \sin(nt) dt$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que $\int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx$ est bien défini pour tout $R > 0$ et admet une limite $L \in \mathbb{R}$ quand $[R \rightarrow \infty]$
3. Montrer que $F(n)$ admet une limite quand $[n \rightarrow \infty]$, à expliciter en fonction de L et $f(0)$.

10.4 Dérivabilité et suites/séries de fonctions

Proposition 60 Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|)$ un **Banach** et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $C^1((a, b), E)$. Si

- il existe $x_0 \in (a, b)$ tel que $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$,
- la suite $(f'_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ vers $g(x)$ uniformément par rapport à $x \in (a, b)$,

alors $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur (a, b) vers une fonction $f \in C^1((a, b), E)$ et $f' = g$.

On en déduit l'énoncé analogue pour les séries de fonctions.

Preuve : Notons que $g \in C^0((a, b), \mathbb{R})$ comme limite uniforme de fonctions continues sur (a, b) . Soit $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ et

$$f(x) := \alpha + \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad \forall x \in (a, b).$$

Alors $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ et $f' = g$. On a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left\| f_n(x_0) - \alpha + \int_{x_0}^x (f'_n - g)(t) dt \right\| \\ &\leq |f_n(x_0) - \alpha| + \int_{x_0}^x |(f'_n - g)(t)| dt \\ &\leq |f_n(x_0) - \alpha| + (b - a) \|f'_n - g\|_\infty, \quad \forall x \in (a, b). \end{aligned}$$

Ceci montre que f_n converge vers f uniformément par rapport à $x \in (a, b)$. □

Remarque 29 Notez que la complétude de $(E, \|\cdot\|)$ est nécessaire pour utiliser l'intégrale de Riemann et la formule $h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt$.

Contre-exemples : La convergence uniforme des f_n ne suffit pas. En effet, $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ est de classe C^1 sur $(-1, 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers $f(x) := |x|$ sur $(-1, 1)$, mais $f \notin C^1((-1, 1), \mathbb{R})$. En effet, un argument de monotonie permet de montrer que

$$|f_n(x) - |x|| \leq |f_n(0)| = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall x \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}^*.$$

10.5 Fonctions convexes

10.5.1 Définition

Définition 38 (Fonction convexe) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in I, \lambda \in [0, 1].$$

Elle est **strictement convexe** si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x \neq y \in I, \lambda \in (0, 1).$$

Exemples : Les fonctions affines sont convexes mais pas strictement convexes. La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement convexe.

Proposition 61 [Croissance des taux d'accroissements] Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe alors (faire un dessin)

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}, \quad \forall x < y < z \in I.$$

En particulier,

$$\frac{f(y') - f(x')}{y' - x'} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad \forall x' < y' < x < y.$$

Preuve : On a la combinaison linéaire convexe

$$y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$$

donc, par convexité de f ,

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z).$$

On en déduit, d'une part, que

$$f(y) - f(x) \leq \left(\frac{z-y}{z-x} - 1 \right) f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) = (y-x) \frac{f(z) - f(x)}{z-x},$$

ce qui fournit la première inégalité souhaitée. On en déduit d'autre part que

$$-\frac{z-y}{z-x}f(x) \leq \frac{y-x}{z-x}f(z) - f(y)$$

et en multipliant par $\frac{z-x}{z-y} > 0$

$$-f(x) \leq \frac{y-x}{z-y}f(z) - \frac{z-x}{z-y}f(y)$$

d'où

$$f(z) - f(x) \leq \left(1 + \frac{y-x}{z-y} \right) f(z) - \frac{z-x}{z-y}f(y) = \frac{z-x}{z-y} (f(z) - f(y)),$$

qui fournit la 2e inégalité souhaitée.

Soient $x' < y' < x < y \in I$. Appliquons le résultat précédent à $x' < y' < x$ et à $y' < x < y$ (faire un dessin) :

$$\frac{f(y') - f(x')}{y' - x'} \leq \frac{f(x) - f(y')}{x - y'} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \square$$

10.5.2 Régularité des fonctions convexes

Proposition 62 Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors

1. pour tout $a < b \in I$, f est lipschitzienne sur $[a, b]$,
2. f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point $x \in I$,
3. f'_d et f'_g sont des fonctions croissantes sur I et

$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq f'_g(y) \leq f'_d(y), \quad \forall x < y \in I.$$

4. l'ensemble D des points de I en lesquels f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable et f' est continue sur $I \setminus D$.

Remarque 30 Pour le point 2., il est important de se restreindre à un intervalle $[a, b]$ strictement contenu dans I . Par exemple, $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas lipschitzienne (car C^1 et de dérivée non bornée sur $\mathbb{R}$)

$$y^2 - x^2 = (y-x)(x+y) > L|y-x|, \forall L \leq x < y.$$

Preuve :

1. Soient $a', b' \in I$ tels que $a' < a < b < b'$ (faire un dessin). Par croissance des taux d'accroissement, on a

$$\frac{f(a) - f(a')}{a - a'} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(b') - f(b)}{b' - b}, \quad \forall x, y \in [a, b],$$

donc $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ où

$$M := \max \left\{ \left| \frac{f(a) - f(a')}{a - a'} \right|, \left| \frac{f(b') - f(b)}{b' - b} \right| \right\}.$$

2. Soit $x \in I$. Fixons $x < \tilde{x} \in I$. D'après la croissance des sécantes, pour tous $t_1 < t_2 < x \in I$, on a (faire un dessin)

$$\frac{f(x) - f(t_1)}{x - t_1} \leq \frac{f(x) - f(t_2)}{x - t_2} \leq M := \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}.$$

Ainsi la fonction $t \in (x - \epsilon, x) \mapsto \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$ est croissante et majorée par M , donc elle admet une limite $f'_g(x)$. Argument de monotonie similaire pour la dérivée à droite.

3. Soient $x < y$ des points intérieurs à I . Pour $h > 0$ assez petit, on a (croissance des taux d'accroissement)

$$\frac{f(x) - f(x - h)}{h} \leq \frac{f(y) - f(y - h)}{h}$$

en passant à la limite $[h \rightarrow 0^+]$ on obtient $f'_g(x) \leq f'_g(y)$. Ainsi, f'_g est croissante.

La croissance des taux d'accroissements montre que, pour $h > 0$ assez petit

$$\frac{f(x) - f(x - h)}{h} \leq \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y) - f(y - h)}{h} \leq \frac{f(y + h) - f(y)}{h}.$$

En passant à la limite $[h \rightarrow 0^+]$, on obtient $f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$.

4. Il découle de l'inégalité précédente (procéder par double inclusion) que

$$D := \{x \in I; f'_g(x) < f'_d(x)\} = \{x \in I; f'_g \text{ est discontinue en } x\}.$$

Ainsi, D est l'ensemble des points de discontinuité de la fonction croissante f'_g donc il est fini ou dénombrable, en vertu du Lemme suivant. $\square$

Lemme 7 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors,

1. f admet une limite à gauche $f_g(x)$ et une limite à droite $f_d(x)$ en tout point $x \in I$,
2. $f_g(x) \leq f(x) \leq f_d(x) \leq f_g(y) \leq f(y) \leq f_d(y)$ pour tout $x < y \in I$,
3. l'ensemble D des points de discontinuité de f

$$D := \{x \in I; f_g(x) \neq f_d(x)\}$$

est fini ou dénombrable.

Preuve : Quitte à remplacer f par $(-f)$, on peut supposer que f est croissante.

1. Soit $x \in I$ et $\epsilon > 0$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset I$. La fonction $t \mapsto f(x + t)$ est croissante sur $(-\epsilon, 0)$ et majorée par $f(x)$ donc elle admet une limite $[t \rightarrow 0^-]$, notée $f_g(x)$. On justifie de même l'existence de $f_d(x)$.

2. Soient $x < y \in I$. Pour $t > 0$ assez petit, on a $x - t < x < x + t < y - t < y < y + t$ donc (monotonie)

$$f(x - t) \leq f(x) \leq f(x + t) \leq f(y - t) \leq f(y) \leq f(y + t).$$

En passant à la limite $[t \rightarrow 0^+]$ on obtient

$$f_g(x) \leq f(x) \leq f_d(x) \leq f_g(y) \leq f(y) \leq f_d(y)$$

3. Pour tout $x \in D$, il existe $q_x \in \mathbb{Q} \cap (f_g(x), f_d(x))$. Ceci permet de construire une injection de D dans $\mathbb{Q}$, ce qui justifie que D soit fini ou dénombrable :

$$\left| \begin{array}{ccc} J : & D & \rightarrow \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto q_x \end{array} \right|$$

L'application J est injective car strictement croissante :

$$f_g(x) < q_x < f_d(x) \leq f_g(y) < q_y < f_d(y), \quad \forall x < y \in D. \square$$

10.5.3 Caractérisation de la convexité

Théorème 33 Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est dérivable sur (a, b) alors il y a équivalence entre
 - (a) f est convexe sur (a, b) ,
 - (b) f' est croissante sur (a, b) ,
 - (c) $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$ pour tous $x < y \in (a, b)$.
2. Si f est 2 fois dérivable sur (a, b) alors f est convexe sur (a, b) ssi $f'' \geq 0$ sur (a, b) .
3. Si f est 2 fois dérivable et $f'' > 0$ sur (a, b) alors f est strictement convexe. La réciproque est fausse (considérer $x \in \mathbb{R} \mapsto x^4$)

Preuve :

1. (a) $\Rightarrow$ (b) : On a $f' = f'_g$ est croissante.
 (b) $\Rightarrow$ (c) : Taylor Lagrange.
 (c) $\Rightarrow$ (a) : Soient $x < y \in I$ et $\lambda \in (0, 1)$. Par hypothèse, on a

$$f(x) \geq f[\lambda x + (1 - \lambda)y] + f'[\lambda x + (1 - \lambda)y](1 - \lambda)(x - y),$$

$$f(y) \geq f[\lambda x + (1 - \lambda)y] + f'[\lambda x + (1 - \lambda)y]\lambda(y - x),$$

On multiplie la première inégalité par λ , la deuxième par $(1 - \lambda)$ et on somme les 2 inégalités résultantes pour obtenir $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f[\lambda x + (1 - \lambda)y]$.

2. Une fonction dérivable sur (a, b) est croissante sur (a, b) ssi sa dérivée est ≥ 0 sur (a, b) .
3. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 2 fois dérivable telle que $f'' > 0$ sur (a, b) . Alors f' est strictement croissante sur (a, b) . Soient $x < y \in (a, b)$ et $\lambda \in (0, 1)$ et $z := \lambda x + (1 - \lambda)y$. D'après l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe $c_1 \in (x, z)$, $c_2 \in (z, y)$ tel que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Cette inégalité se ré-écrit

$$\lambda(f[\lambda x + (1 - \lambda)y] - f(x)) < (1 - \lambda)(f(y) - f[\lambda x + (1 - \lambda)y]),$$

dont on déduit que $f[\lambda x + (1 - \lambda)y] < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. $\square$

10.5.4 Inégalités de convexité classiques

Proposition 63 On a

1. $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$.
2. $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.
3. [Hölder] $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^{p'}\right)^{1/p'}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1, \infty)$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$.

Preuve :

1. concavité de $\sin$ sur $(0, \pi/2)$ car $\sin'' = -\sin$ y est ≤ 0 .
2. convexité de l'exponentielle.
3. déjà démontrée. □

10.5.5 Convexité et optimisation

Proposition 64 Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est convexe sur (a, b) , dérivable sur (a, b) et $c \in (a, b)$ alors EQU :
 - (a) $f(c) = \min\{f(x); x \in (a, b)\}$: c est un minimum de f
 - (b) $f'(c) = 0$: c est point critique de f .
2. Si f est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum sur (a, b) .

Preuve :

1. (a) $\Rightarrow$ (b) Un extremum intérieur est tjs un point critique (même sans hypothèse de convexité).
(b) $\Rightarrow$ (a) Par convexité, on obtient $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c) = f(c)$ pour tout $x \in (a, b)$.
2. Par l'absurde, supposons f minimale en 2 points distincts $u_1 < u_2 \in (a, b)$. Alors

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) < \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2) = \min_{(a,b)}(f)$$

ce qui fournit une contradiction. □

10.6 Au programme de l'interrogation

Le Chapitre 9 est un chapitre de révisions : toutes les définitions, tous les énoncés sont exigibles en interrogation.

10.7 Appendice 1 : Intégrale de Riemann

Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $(F, \|\cdot\|_F)$ un Banach sur $\mathbb{R}$ et $\varphi \in C^0([a, b], F)$. On définit l'intégrale de Riemann de φ de la même façon que pour les fonctions à valeurs réelles.

Définition 39 $\int_a^b \varphi(t)dt$ est la limite des sommes de Riemann $\sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j)\varphi(x_j)$ où

$$a = x_0 < \dots < x_N = b$$

est une subdivision de $[a, b]$ et la limite est prise quand le pas de la subdivision $h := \sup\{x_{j+1} - x_j; j = 0, \dots, N - 1\}$ tend vers zéro.

Pour démontrer l'existence de cette limite, on utilise la continuité uniforme de φ et la complétude de $(F, \|\cdot\|_F)$. Il est donc important que φ soit continue sur l'intervalle compact $[a, b]$ et que F soit complet.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. La fonction φ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ donc (thm de Heine) uniformément continue :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_F \leq \epsilon, \forall x, y \in [a, b] / |x - y| \leq \delta.$$

Soient $a = x_0 < \dots < x_N = b$ et $a = y_0 < \dots < y_M = b$ deux subdivisions de $[a, b]$ de pas $< \delta$. Notons $a = z_0 < \dots < z_P = b$ la subdivision obtenue par la réunion de ces 2 subdivisions. En regroupant ensemble les z_k appartenant à un même intervalle $[x_j, x_{j+1})$, on obtient

$$\left\| \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j) \varphi(x_j) - \sum_{k=0}^P (z_{k+1} - z_k) \varphi(z_k) \right\|_F < \epsilon(b-a)$$

et de même

$$\left\| \sum_{j=0}^M (y_{j+1} - y_j) \varphi(y_j) - \sum_{k=0}^P (z_{k+1} - z_k) \varphi(z_k) \right\|_F < \epsilon(b-a).$$

Par inégalité triangulaire, il en résulte que

$$\left\| \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j) \varphi(x_j) - \sum_{j=0}^M (y_{j+1} - y_j) \varphi(y_j) \right\|_F < 2\epsilon(b-a).$$

Ceci montre que la famille des sommes de Riemann de φ vérifie le critère de Cauchy lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro. Comme $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet, la limite existe. $\square$

Proposition 65 1. Si $\varphi, \psi \in C^0([a, b], F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \psi)(t) dt = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt + \int_a^b \psi(t) dt.$$

2. Si $a < c < b$ alors

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^c \varphi(t) dt + \int_c^b \varphi(t) dt. \quad (10.5)$$

3. On a l'inégalité triangulaire en version continue :

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\|_F \leq \int_a^b \|\varphi(t)\|_F dt$$

4. Si $(G, \|\cdot\|_G)$ est un Banach et $L \in \mathcal{L}_c(F, G)$ alors

$$L \left(\int_a^b \varphi(t) dt \right) = \int_a^b L(\varphi(t)) dt.$$

Preuve :

1. Cela résulte de la linéarité par rapport à φ des sommes de Riemann.
2. On découpe les sommes de Riemann en 2 morceaux.
3. Cela résulte de l'inégalité triangulaire sur les sommes de Riemann, par passage à la limite.

4. On utilise la linéarité sur les sommes de Riemann. Attention, ici, l'intégrale de Riemann du membre de gauche est pour les fonctions à valeurs dans F , alors que celle du membre de droite est pour les fonctions à valeurs dans G .

Cette construction permet d'intégrer les fonctions continues par morceau $[a, b] \rightarrow F$, via la décomposition (10.5).

Proposition 66 Si $\varphi \in C^0 \cap C_{pm}^1([a, b], F)$ alors

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) dt.$$

Preuve : Il suffit de faire la preuve lorsque $\varphi \in C^1([a, b], F)$ puis d'utiliser (10.5) Soit $\epsilon > 0$. La fonction φ' est continue sur $[a, b]$ donc (thm Heine)

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \|\varphi'(x) - \varphi'(y)\|_F \leq \epsilon, \forall x, y \in [a, b] / |x - y| \leq \delta.$$

Soit $a = x_0 < \dots < x_N = b$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\leq \delta$. On a

$$\varphi(b) - \varphi(a) - \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j) \varphi'(x_j) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j) - h_j \varphi'(x_j) \right). \quad (10.6)$$

où $h_j := (x_{j+1} - x_j)$.

Etape 1 : Montrons que

$$\|\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j) - (x_{j+1} - x_j) \varphi'(x_j)\|_F \leq \epsilon h_j, \quad \forall j \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (10.7)$$

Soit $j \in \{0, \dots, N-1\}$. On a

$$\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j) - (x_{j+1} - x_j) \varphi'(x_j) = G_j(1) - G_j(0)$$

où

$$\begin{cases} G_j : [0, 1] & \rightarrow F \\ t & \mapsto \varphi(x_j + th_j) - th_j \varphi'(x_j). \end{cases}$$

De plus,

$$\|G_j'(t)\|_F = \|\varphi'(x_j + th_j) h_j - \varphi'(x_j) h_j\|_F \leq \epsilon h_j, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Grâce à l'IAF, on obtient (10.7). *Notez qu'il est important d'avoir une preuve de l'IAF qui ne repose pas sur la formulation intégrale !...*

Etape 2 : Conclusion. On déduit de (10.6) et (10.7) que

$$\left\| \varphi(b) - \varphi(a) - \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j) \varphi'(x_j) \right\|_F \leq \epsilon(b-a).$$

On en déduit, en passant la limite sur le pas de la subdivision que

$$\left\| \varphi(b) - \varphi(a) - \int_a^b \varphi'(t) dt \right\|_F \leq \epsilon(b-a).$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) dt \text{ dans } F. \square$$

Chapitre 11

Différentielle

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On pourrait généraliser la notion de dérivée d'une fonction d'une variable, au cas de plusieurs variables, en demandant que les fonctions $x_j \mapsto f(\bar{x}_1, \dots, x_j, \dots, \bar{x}_n)$ soient dérivables pour tout $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_{j+1}, \dots, \bar{x}_n)$ (différentielle de Gateaux). Cependant, cette généralisation n'est pas pratique car elle n'assure même pas la continuité de la fonction.

Exemple 1 : Considérons $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées partielles nulles par rapport à x et par rapport à y en $(0, 0)$ car

$$0 \equiv \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \equiv \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } [h \rightarrow 0]$$

Mais f n'est pas continue en $(0, 0)$, car

$$f(ah, bh) \rightarrow \frac{ab}{a^2 + b^2} \neq 0, \quad \text{quand } [h \rightarrow 0], \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^*.$$

L'exemple ci-dessus n'admet pas des dérivées dans **toutes** les directions de $\mathbb{R}^2$. En effet, $\frac{f(ah, bh) - f(0, 0)}{h}$ diverge quand $[h \rightarrow 0]$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}^*$. On pourrait penser que le problème vient de là, et qu'une fonction dérivable dans toutes les directions est continue. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 2 : Considérons $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors g n'est pas continue en $(0, 0)$ car $g(x, x^2) = \frac{1}{x^3}$ ne tend pas vers zéro quand $[x \rightarrow 0]$. Pourtant, g admet des dérivées suivant tout vecteur à l'origine : si $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus (0, 0)$ alors

$$\frac{g(ah, bh) - g(0, 0)}{h} = \frac{h^2 a^5}{(b + ha^2)^2 + h^6 a^8} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq 0, \\ a & \text{si } b = 0 \text{ et } a \neq 0. \end{cases}$$

11.1 Différentiabilité

11.1.1 Définition

Définition 40 (Différentielle) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Ω un ouvert de E , $a \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow F$.

- f est **différentiable en a** s'il existe $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o_{\|h\|_E \rightarrow 0}(\|h\|_E), \quad (11.1)$$

c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F < \epsilon \|h\|_E, \quad \forall h \in E / \|h\|_E < \delta.$$

Alors L est unique, appelé **différentielle de f en a** et notée $L = df(a)$.

- f est **différentiable sur Ω** si f est différentiable en a pour tout $a \in \Omega$.
- $f \in C^1(\Omega, F)$ si f est différentiable sur Ω et sa différentielle $df : (\Omega, \|\cdot\|_E) \rightarrow (\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E, F)})$ est continue, c'est-à-dire : pour tout $x \in \Omega$,

$$\|df(x) - df(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } [\|x - \tilde{x}\|_E \rightarrow 0].$$

Preuve de l'unicité de la différentielle : Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telles que $f(a+h) = f(a) + L_j(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|_E)$ pour $j = 1, 2$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tel que, pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\|_E < \delta$, on a

$$\begin{aligned} \|(L_1 - L_2)(h)\|_F &\leq \|f(a+h) - f(a) - L_1(h)\|_F + \|f(a+h) - f(a) - L_2(h)\|_F \\ &< 2\epsilon \|h\|_E. \end{aligned}$$

Par linéarité, on en déduit que $\|(L_1 - L_2)(x)\|_F \leq 2\epsilon \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, cad $\|L_1 - L_2\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq 2\epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $L_1 = L_2$. $\square$

Remarques/Commentaires

1. Il est très important de bien comprendre ce que signifie la notation

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o_{\|h\|_E \rightarrow 0}(\|h\|_E),$$

c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F < \epsilon \|h\|_E, \quad \forall h \in E, \|h\|_E < \delta.$$

- En particulier, le terme $o_{\|h\|_E \rightarrow 0}(\|h\|_E)$ est un **vecteur** de F dont la norme $\|\cdot\|_F$ est négligeable devant $\|h\|_E$ quand $\|h\|_E \rightarrow 0$.
- L'écriture $f(a+h)$ sous-entend que h est pris suffisamment petit pour que $a+h \in \Omega$. C'est pour permettre cela qu'on doit considérer " Ω ouvert".
- Si E est de dimension finie, par équivalence des normes, il serait légitime d'écrire

$$o_{h \rightarrow 0}(h) \quad \text{au lieu de} \quad o_{\|h\|_E \rightarrow 0}(\|h\|_E).$$

Mais en dimension infinie, il est important de bien préciser quelle norme de h intervient à l'intérieur et au dessous du petit o .

- **Les égalités avec des petit o et des grands O sont à manipuler prudemment**, en particulier lorsqu'on veut les multiplier ou les composer.

2. Lorsque f est différentiable en a , il est parfois plus comode d'utiliser la formule suivante

$$f(x) = f(a) + df(a).(x - a) + \|x - a\|_E \epsilon(x), \quad \text{où } \epsilon : \Omega \rightarrow F \text{ et } \|\epsilon(x)\|_F \xrightarrow{\|x-a\|_E \rightarrow 0} 0.$$

ϵ est alors une application de Ω dans F et pas un nombre réel!!! Exercice : Démontrer l'équivalence entre ces 2 formulations de la différentiabilité.

3. Si $E = \mathbb{R}$, la différentiabilité est équivalente à la dérivabilité. Exercice : Le démontrer.
4. La différentiabilité en a d'une fonction f signifie qu'elle se comporte, au voisinage du point a , 'à peu près' comme la fonction affine $h \mapsto f(a) + df(a).h$ (somme d'une constante et d'une application linéaire). Sous forme géométrique, cela exprime que la courbe est, au voisinage d'un point, 'à peu près' confondue avec sa droite tangente.
5. En dimension infinie, $df(a)$ dépend, a priori, des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ choisies sur E et F . Mais, en dimension finie, les normes sont toutes équivalentes donc $df(a)$ ne dépend pas des normes choisies.
6. Notez bien que $df(a)$ doit être continue $(E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$: c'est automatique si E est de dimension finie, mais pas s'il est de dimension infinie.

11.1.2 Exemples classiques

Exemple 1 : Différentielle d'une fonction constante.

Si f est constante sur Ω , alors $df = 0$. La réciproque est vraie seulement si Ω est connexe.

Exemple 2 : Différentielle d'une application linéaire continue.

Si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ alors $df(a) = f$ pour tout $a \in E$, car $f(a + h) = f(a) + f(h)$. Autrement dit, la différentielle d'une application linéaire continue est constante (en cette application).

Exemple 3 : Différentielle du carré.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre normée (commutative ou non), par exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} f : & E & \rightarrow E \\ & x & \mapsto x^2 \end{array} \right|$$

est $C^1(E)$ et $df(x).h = xh + hx$ pour tout $h \in E$.

Pour commencer, on fixe $x \in E$.

Etape 1 : Continuité du candidat. L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{ccc} L : & E & \rightarrow E \\ & h & \mapsto xh + hx \end{array} \right|$$

est continue car

$$\begin{aligned} \|L(h)\| &\leq \|xh\| + \|hx\| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq 2\|x\|\|h\| && \text{(norme d'algèbre sous-multiplicative)}. \end{aligned}$$

De plus, $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq 2\|x\|$.

Etape 2 : Différentiabilité. On a

$$f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + xh + hx + h^2 \quad \text{et} \quad \|h^2\| \leq \|h\|^2 = o_{\|h\| \rightarrow 0}(\|h\|)$$

donc f est différentiable en x et $df(x) = L$.

Ceci est vrai pour tout $x \in E$ donc f est différentiable sur E et $df(x).h = xh + hx$ pour tous $x, h \in E$.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. Cette expression explicite montre que la différentielle $df : E \rightarrow \mathcal{L}_c(E)$ est linéaire :

$$df(\lambda x + y) = \lambda df(x) + df(y), \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Donc, pour montrer qu'elle est continue, il suffit d'exhiber un réel de continuité $M > 0$:

$$\|df(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq M\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

D'après l'étape 1, $M = 2$ convient.

On montre de même que l'application produit $P : (x, y) \in E^2 \mapsto xy \in E$ est C^1 et que

$$dP(x, y).(h_1, h_2) = h_1y + xh_2, \quad \forall x, y, h_1, h_2 \in E.$$

On montre également de même que la puissance n -ième (avec $n \geq 3$) $g : x \in E \mapsto x^n \in E$ est différentiable et que

$$dg(x).h = \sum_{k=0}^{n-1} x^k h x^{n-1-k}, \quad \forall x, h \in E.$$

La preuve du caractère C^1 de g est cependant différente car $dg : E \rightarrow \mathcal{L}_c(E)$ n'est pas linéaire.

Preuve de la continuité de la différentielle de g : On fixe $x \in E$. On veut montrer que

$$\|dg(x) - dg(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}_c(E)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } [\|\tilde{x} - x\|_E \rightarrow 0].$$

Pour $\tilde{x}, h \in E$, on a

$$dg(x).h - dg(\tilde{x}).h = \sum_{k=0}^{n-1} (x^k h x^{n-1-k} - \tilde{x}^k h \tilde{x}^{n-1-k})$$

et, pour $k = 0, \dots, n-1$, on a

$$x^k h x^{n-1-k} - \tilde{x}^k h \tilde{x}^{n-1-k} = (x - \tilde{x})x^{k-1} h x^{n-1-k} + \tilde{x}(x - \tilde{x})x^{k-2} h x^{n-1-k} + \dots + \tilde{x}^k h \tilde{x}^{n-2}(x - \tilde{x})$$

donc (inégalité triangulaire et sous-multiplicativité de la norme)

$$\|x^k h x^{n-1-k} - \tilde{x}^k h \tilde{x}^{n-1-k}\|_E \leq (n-1)\|h\|_E \|x - \tilde{x}\|_E (\|x\|_E + 1)^{n-2}, \quad \forall \tilde{x} \in B_E(x, 1), h \in E,$$

d'où

$$\|dg(x).h - dg(\tilde{x}).h\|_F \leq (n-1)^2 \|h\|_E \|x - \tilde{x}\|_E (\|x\|_E + 1)^{n-2}, \quad \forall \tilde{x} \in B_E(x, 1), h \in E,$$

Ceci montre que

$$\|dg(x) - dg(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq (n-1)^2 \|x - \tilde{x}\|_E (\|x\|_E + 1)^{n-2} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } [\|x - \tilde{x}\|_E \rightarrow 0].$$

Exemple 4 : Différentielle de la norme au carré.

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph sur $\mathbb{R}$ et $f : x \in H \mapsto \|x\|^2 \in \mathbb{R}$. Alors f est C^1 sur H et $df(a).h = 2\langle a, h \rangle$ pour tous $a, h \in H$.

Pour commencer, on fixe $a \in E$.

Etape 1 : Continuité du candidat. L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{lll} L : & H & \rightarrow \mathbb{R} \\ & h & \mapsto 2\langle a, h \rangle \end{array} \right|$$

est continue car $|L(h)| \leq 2\|a\|\|h\|$ pour tout $h \in H$ (CYS). De plus $\|L\|_{\mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})} \leq 2\|a\|$.

Etape 2 : Différentiabilité. On a

$$\|a + h\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, h \rangle + \|h\|^2 = \|a\|^2 + L(h) + \underset{\|h\| \rightarrow 0}{o}(\|h\|)$$

donc f est différentiable en a et $df(a) = L$.

Ceci est vrai pour tout $a \in H$ donc f est différentiable sur H et $df(a).h = 2\langle a, h \rangle$ pour tous $a, h \in H$.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. D'après cette expression explicite, la différentielle $df : H \rightarrow \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})$ est linéaire. Donc, pour montrer qu'elle est continue, il suffit d'exhiber un réel de continuité. D'après l'étape 1, $M = 2$ convient.

Exemple 5 : Différentielle d'une application n -linéaire.

Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn. On munit $E_1 \times E_2$ de la norme $\|(x_1, x_2)\|_{E_1 \times E_2} := \max\{\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}\}$ ou de toute norme équivalente. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$ une application bilinéaire continue $E_1 \times E_2 \rightarrow F$. Alors $f \in C^1(E_1 \times E_2, F)$ et

$$df(a_1, a_2).(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2), \quad \forall (a_1, a_2), (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2.$$

Pour commencer, on fixe $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$.

Etape 1 : Continuité du candidat. L'application

$$\left| \begin{array}{lll} L : & E_1 \times E_2 & \rightarrow F \\ & (h_1, h_2) & \mapsto f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) \end{array} \right|$$

est linéaire par bilinéarité de f et continue car, pour tout $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\begin{aligned} \|f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)\|_F &\leq \|f(a_1, h_2)\|_F + \|f(h_1, a_2)\|_F \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} [\|a_1\|_{E_1} \|h_2\|_{E_2} + \|h_1\|_{E_1} \|a_2\|_{E_2}] \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} [\|a_1\|_{E_1} + \|a_2\|_{E_2}] \|(h_1, h_2)\|_{E_1 \times E_2}. \end{aligned}$$

De plus, $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)} \leq 2\|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} \|(a_1, a_2)\|_{E_1 \times E_2}$.

Etape 2 : Différentiabilité. On a

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) &= f(a_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) + f(h_1, h_2) \text{ par bilinéarité} \\ &= f(a_1, a_2) + L(h_1, h_2) + o(\|(h_1, h_2)\|_{E_1 \times E_2}) \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \|f(h_1, h_2)\|_F &\leq \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} \|h_1\|_{E_1} \|h_2\|_{E_2} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} \|(h_1, h_2)\|_{E_1 \times E_2}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, f est différentiable en (a_1, a_2) et $df(a_1, a_2) = L$.

Ceci est vrai pour tout $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ donc f est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et $df(a_1, a_2).(h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)$ pour tous $(a_1, a_2), (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. Cette expression explicite montre que $df : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire. Donc, pour montrer qu'elle est continue, il suffit d'exhiber un réel de continuité. D'après l'étape 1, $M = 2\|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)}$ convient.

La preuve de la différentiabilité se généralise facilement à une application n -linéaire continue $f \in \mathcal{L}_c(E_1, \dots, E_n; F)$, avec $n \geq 3$:

$$df(a_1, \dots, a_n).(h_1, \dots, h_n) = \sum_{k=1}^n f(a_1, \dots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Seule la preuve du caractère C^1 doit être adaptée, car la différentielle

$$\left| \begin{array}{lll} df : E_1 \times \dots \times E_n & \rightarrow & \mathcal{L}_c(E_1 \times \dots \times E_n, F) \\ (a_1, \dots, a_n) & \mapsto & df(a_1, \dots, a_n) \end{array} \right|$$

n'est pas linéaire. On peut alors procéder comme pour la puissance n -ième, dans l'exemple précédent.
Exercice : Rédiger intégralement la preuve.

Exemple 6 : Différentielle d'une fonction explicite, avec des DL usuels (Taylor Young).

$$\left| \begin{array}{lll} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x}{y+1} \end{array} \right|$$

est différentiable que $\mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{-1\}]$ et

$$df(x, y).(h_1, h_2) = \frac{h_1}{y+1} - \frac{xh_2}{(y+1)^2}.$$

En effet, pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{-1\}]$ et $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ assez petit, on a

$$\begin{aligned} f(x+h_1, y+h_2) &= \frac{x+h_1}{y+h_2+1} = \frac{x+h_1}{y+1} \frac{1}{1+\frac{h_2}{y+1}} \\ &= \frac{x+h_1}{y+1} \left(1 - \frac{h_2}{y+1} + o(h_2) \right) \\ &= \frac{x}{y+1} + \frac{h_1}{y+1} - \frac{xh_2}{(y+1)^2} + o(\|(h_1, h_2)\|). \end{aligned}$$

Exemple 7 : Différentielle de l'inverse.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ une algèbre de Banach et $\text{Inv}(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de E (qui est bien un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$). L'application

$$\left| \begin{array}{lll} f : \text{Inv}(E) & \rightarrow & \text{Inv}(E) \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \right|$$

est C^1 et

$$df(x).h = -x^{-1}hx^{-1}, \forall x \in \text{Inv}(E), h \in E.$$

Pour commencer, on fixe $x \in \text{Inv}(E)$.

Etape 1 : Continuité du candidat. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} L : & E & \rightarrow E \\ & h & \mapsto -x^{-1}hx^{-1} \end{array} \right|$$

est clairement linéaire et continue car (sous-multiplicativité d'une norme d'algèbre)

$$\|L(h)\| \leq \|x^{-1}\|^2 \|h\|, \forall h \in E.$$

Etape 2 : Différentiabilité. Pour $h \in E$ vérifiant $\|x^{-1}\| \|h\| < 1/2$, on a

$$\begin{aligned} (x+h)^{-1} &= [x(I+x^{-1}h)]^{-1} = (I+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^{-1}h)^n\right) x^{-1} \\ &= x^{-1} + L(h) + o_{\|h\| \rightarrow 0}(\|h\|). \end{aligned}$$

(attention : on utilise ici la complétude de $(E, \|\cdot\|_E)$ pour justifier que la convergence absolue implique la convergence de la série) car

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (x^{-1}h)^n x^{-1} \right\| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} (\|x^{-1}\| \|h\|)^n \|x^{-1}\| = \frac{(\|x^{-1}\| \|h\|)^2}{1 - (\|x^{-1}\| \|h\|)} \|x^{-1}\| \\ &\leq 2 \|x^{-1}\|^3 \|h\|^2. \end{aligned}$$

Donc f est différentiable en x et $df(x) = L$.

Ceci est vrai pour tout $x \in \text{Inv}(E)$ donc f est différentiable sur $\text{Inv}(E)$ et $df(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$, $\forall x \in \text{Inv}(E), h \in E$.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. Pour $x, \tilde{x} \in \text{Inv}(E), h \in E$ on a

$$\begin{aligned} \|df(x).h - df(\tilde{x}).h\| &= \|x^{-1}hx^{-1} - \tilde{x}^{-1}h\tilde{x}^{-1}\| \\ &= \|(x^{-1} - \tilde{x}^{-1})hx^{-1} + \tilde{x}^{-1}h(x - \tilde{x})\| \\ &\leq \|x^{-1} - \tilde{x}^{-1}\| (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \|h\| \end{aligned}$$

donc

$$\|df(x) - df(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq \|x^{-1} - \tilde{x}^{-1}\| (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \|\tilde{x} - x\|_E \rightarrow 0.$$

Ceci montre que $df : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E)})$ est continue, donc f est C^1 sur $\text{Inv}(E)$.

Exemple 8 : Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On munit $E := C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. Alors l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \Phi : & E & \rightarrow \mathbb{R} \\ & f & \mapsto \int_0^1 \varphi \circ f(x) dx \end{array} \right|$$

est différentiable et

$$d\Phi(f).h = \int_0^1 \varphi' \circ f(x) h(x) dx, \quad \forall f, h \in E. \quad (11.2)$$

Pour commencer, on fixe $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Etape 1 : Continuité du candidat. On vérifie que $L : h \in E \mapsto \int_0^1 \varphi' \circ f(x) h(x) dx$ est une application linéaire continue $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$. La linéarité est claire. De plus

$$\left| \int_0^1 \varphi'[f(x)] h(x) dx \right| \leq \|h\|_{\infty} \int_0^1 |\varphi'[f(t)]| dt, \quad \forall h \in C^0([0, 1], \mathbb{R}),$$

et la dernière intégrale est finie comme intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction continue sur $[0, 1]$. Donc $L : (C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue.

Etape 2 : Différentiabilité. On fixe $\epsilon > 0$ et on cherche $\eta > 0$ tel que

$$\left| \int_0^1 \left(\varphi[f(x) + h(x)] - \varphi[f(x)] - \varphi'[f(x)]h(x) \right) dx \right| \leq \epsilon \|h\|_\infty, \quad \forall h \in C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|h\|_\infty < \eta. \quad (11.3)$$

Soit $M := \|f\|_\infty$. La fonction φ' est continue sur le compact $[-M - 1, M + 1]$ donc (thm Heine) uniformément continue :

$$\exists \eta \in (0, 1), \forall y, z \in [-M - 1, M + 1], |y - z| < \eta \Rightarrow |\varphi'(y) - \varphi'(z)| < \epsilon.$$

Soit $h \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $\|h\|_\infty < \eta$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi[f(x) + h(x)] - \varphi[f(x)] - \varphi'[f(x)]h(x)| &= \left| \int_0^1 \varphi'[f(x) + sh(x)]h(x)ds - \varphi'[f(x)]h(x) \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\varphi'[f(x) + sh(x)] - \varphi'[f(x)] \right) h(x)ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |\varphi'[f(x) + sh(x)] - \varphi'[f(x)]| |h(x)| ds \\ &\leq \int_0^1 \epsilon |h(x)| ds \leq \epsilon \|h\|_\infty, \end{aligned}$$

donc, en intégrant cette relation par rapport à $x \in (0, 1)$, on obtient (11.3). Ceci montre que Φ est différentiable en f et que $d\Phi(f) = L$.

Ceci est vrai pour tout $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, donc Φ est différentiable sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et (11.2) est vraie.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que

$$\|d\Phi(f) - d\Phi(\tilde{f})\|_{\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})} \leq \epsilon, \quad \forall \tilde{f} \in E, \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,$$

cad

$$\left| \int_0^1 \left(\varphi'[f(x)] - \varphi'[\tilde{f}(x)] \right) h(x) dx \right| \leq \epsilon \|h\|_\infty, \quad \forall \tilde{f}, h \in E, \|f - \tilde{f}\|_\infty < \eta.$$

Soit δ un module d'uniforme continuité de φ' sur $[-M - 1, M + 1]$ comme ci-dessus. Pour $\tilde{f} \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \eta$, on a alors $\|\varphi' \circ f - \varphi' \circ \tilde{f}\|_\infty < \epsilon$, ce qui fournit la conclusion.

Par exemple, l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \Phi : & C^0([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ & f & \mapsto \int_0^1 f(x)^2 dx \end{array} \right|$$

est C^1 et

$$d\Phi(f).h = \int_0^1 2f(x)h(x)dx, \quad \forall f, h \in C^0([0, 1], \mathbb{R}).$$

Exemple 9 : Différentielle du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est C^1 et

$$d(\det)(A).H = \text{tr}[\text{Com}(A)^T H], \quad \forall A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Etape 1 : Différentiabilité. L'application $\det$ est polynômiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ donc elle est C^1 :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)}.$$

Etape 2 : Calcul de $d(\det)(I_n)$. Il résulte de la formule précédente que

$$\det(I_n + H) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) (I_n + H)_{1,\sigma(1)} \dots (I_n + H)_{n,\sigma(n)}.$$

Lorsque $\sigma \in \mathcal{S}_n$ n'est pas l'identité, il existe $k \neq l \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma(k) \neq k$ et $\sigma(l) \neq l$ et donc

$$(I_n + H)_{1,\sigma(1)} \dots (I_n + H)_{n,\sigma(n)} = O(\|H\|^2) \quad \text{quand } \|H\| \rightarrow 0.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \det(I_n + H) &= (I_n + H)_{1,1} \dots (I_n + H)_{n,n} + o(\|H\|) \\ &= 1 + H_{1,1} + \dots + H_{n,n} + o(\|H\|) \quad \text{en développant.} \end{aligned}$$

Ceci montre que $d(\det)(I_n).H = \text{tr}(H)$ (la continuité par rapport à H est automatique en dimension finie).

Etape 3 : Calcul de $d(\det)(A)$ pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On a

$$\det(A + H) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}H) = \det(A) \left(1 + \text{tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|) \right)$$

donc

$$d(\det)(A).H = \det(A) \text{tr}[A^{-1}H] = \text{tr}[\text{Com}(A)^T H], \forall A \in GL_n(\mathbb{C}), H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Etape 4 : Calcul de $d(\det)(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que $d(\det)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on déduit de ce qui précède que

$$d(\det)(A).H = \text{tr}[\text{Com}(A)^T H], \forall A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Exercice : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.
2. En déduire que $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est bien définie, pour tout $x \in E$.
3. Montrer que $\exp$ est différentiable en 0 et calculer $d(\exp)(0)$.

(Corrigé : Rouvière Exercice 16 page 51)

11.1.3 Propriétés élémentaires

Les résultats suivants découlent trivialement de la définition de la différentiabilité.

Proposition 67 1. Si f est différentiable en a alors f est continue en a .

2. Structure d'ev : $d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a)$.

3. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F_j, \|\cdot\|_j)$ des evn et $f_j : E \rightarrow F_j$ différentiable (resp. C^1) pour $1 \leq j \leq n$. On muni $F := F_1 \times \dots \times F_n$ de la norme $\|(y_1, \dots, y_n)\|_F := \sup\{\|y_j\|_{F_j}; 1 \leq j \leq n\}$, ou de toute norme équivalente. Alors

$$\left| \begin{array}{ll} f : E & \rightarrow F_1 \times \dots \times F_n \\ x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array} \right|$$

est différentiable (resp. C^1) et

$$df(a).h = (df_1(a).h, \dots, df_n(a).h), \quad \forall h \in E.$$

4. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, $a \in \Omega$, $(F, \|\cdot\|_F)$ une algèbre normée (commutative ou non), $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow F$ différentiables en a (resp. $C^1(\Omega)$). Alors le produit $f_1 f_2$ est différentiable (resp. $C^1(\Omega)$) et

$$d(f_1 f_2)(a).h = [df_1(a).h]f_2(a) + f_1(a)[df_2(a).h], \quad \forall h \in H.$$

Il faut bien comprendre les objets et les opérations dans le membre de droite de la dernière formule :

- $df_1(a).h$ est un élément de l'algèbre E , résultat de l'application linéaire $df_1(a) : E \rightarrow E$ au vecteur $h \in E$,
- $[df_1(a).h]f_2(a)$ est le produit d'algèbre entre les 2 éléments de E que sont $df_1(a).h$ et $f_2(a)$.

Preuve du 4 : L'application

$$\left| \begin{array}{ll} L : H & \rightarrow F \\ a & \mapsto [df_1(a).h]f_2(a) + f_1(a)[df_2(a).h] \end{array} \right.$$

est linéaire et continue car (inégalité triangulaire et norme sous-multiplicative)

$$\|[df_1(a).h]f_2(a) + f_1(a)[df_2(a).h]\| \leq \left(\|df_1(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|f_2(a)\|_F + \|df_2(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|f_1(a)\|_F \right) \|h\|_E.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)(a+h) &= \left(f_1(a) + df_1(a).h + o(\|h\|_E) \right) \left(f_2(a) + df_2(a).h + o(\|h\|_E) \right) \\ &= (f_1 f_2)(a) + L(h) + o(\|h\|_E). \end{aligned}$$

Notez bien que la sous-multiplicativité de $\|\cdot\|_F$ est utilisée pour montrer que les termes de reste sont en $o(\|h\|_E)$ quand $[\|h\|_E \rightarrow 0]$. Par exemple,

$$\begin{aligned} \|[df_1(a).h][df_2(a).h]\|_F &\leq \| [df_1(a).h] \|_F \| [df_2(a).h] \|_F \\ &\leq \| df_1(a) \|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \| df_2(a) \|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|h\|_E^2 = o_{\|h\|_E \rightarrow 0}(\|h\|_E). \square \end{aligned}$$

Définition 41 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn, Ω un ouvert de E , $a \in \Omega$, $v \in E$ et $f : \Omega \rightarrow F$. La **dérivée de f en a dans la direction v** est (si elle existe)

$$D_v f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Proposition 68 Si f est différentiable en a alors f admet une dérivée en a dans la direction v et $D_v f(a) = df(a).v$ pour tout $v \in E$. **La réciproque est fausse.**

Preuve : On déduit de la différentiabilité de f en a que

$$f(a+tv) = f(a) + tdf(a).v + o_{t \rightarrow 0}(t)$$

d'où la conclusion. □

11.1.4 Thm des fonctions composées et conséquences

Théorème 34 [TFC]

1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ des evn, Ω_E, Ω_F des ouverts de E, F , $a \in \Omega_E$, $f : \Omega_E \rightarrow F$ et $g : \Omega_F \rightarrow G$. On suppose que f est différentiable en a , $f(\Omega_E) \subset \Omega_F$ et g est différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f : \Omega_E \rightarrow G$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg[f(a)] \circ df(a),$$

c'est-à-dire

$$d(g \circ f)(a).h = dg[f(a)].(df(a).h), \quad \forall h \in E.$$

2. Si $f \in C^1(\Omega_E, F)$, $g \in C^1(\Omega_F, G)$ et $f(\Omega_E) \subset \Omega_F$ alors $g \circ f \in C^1(\Omega_E, G)$.
 3. Si f est un C^1 difféomorphisme de Ω_E sur Ω_F alors $df(a) \in \mathcal{G}l(E, F)$ pour tout $a \in \Omega$.
 4. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, Ω_E un ouvert de E , $\gamma : I \rightarrow \Omega_E$ et $f : \Omega_E \rightarrow F$. Si γ est dérivable en t_0 et f est différentiable en $\gamma(t_0)$ alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = df[\gamma(t_0)].\gamma'(t_0).$$

5. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable sur Ω . Alors, pour tout $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$, la fonction auxiliaire

$$\left| \begin{array}{ll} u : [0, 1] & \rightarrow F \\ t & \mapsto f(x + t(y - x)) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $(0, 1)$ et

$$u'(t) = df(x + t(y - x)).(y - x), \quad \forall t \in (0, 1).$$

6. Si, de plus, $(F, \|\cdot\|_F)$ est un Banach alors

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df(x + t(y - x)).(y - x)dt \quad (11.4)$$

avec l'intégrale de Riemann des fonctions $[a, b] \rightarrow F$ (voir Section 10.7).

7. Si, de plus, $F = \mathbb{R}^q$ alors

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df(x + t(y - x)).(y - x)dt$$

avec l'intégrale de Lebesgue des fonctions $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^q$.

8. Ces 3 derniers énoncés s'appliquent, en particulier, pour tout $x, y \in \Omega$ lorsque Ω est **convexe**.

Il faut bien comprendre ce que signifie la formule

$$d(g \circ f)(a) = dg[f(a)] \circ df(a),$$

- à gauche, on compose des applications (a priori) nonlinéaires : $f : \Omega_E \rightarrow \Omega_F$ et $g : \Omega_F \rightarrow G$,
- à droite, on compose des applications linéaires : $df(a) : E \rightarrow F$ et $dg[f(a)] : F \rightarrow G$.

L'introduction de la fonction auxiliaire u permet de montrer des propriétés sur une fonction de plusieurs variables f , en se ramenant à une fonction de la variable réelle u . Cette ruse, importante, sera utilisée de nombreuses fois dans le cours.

Preuve :

1. Soit $\epsilon \in (0, 1)$. Il existe $\delta_f, \delta_g > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a) - df(a).h\|_F &< \epsilon \|h\|_E, \quad \forall h \in E, \|h\|_E < \delta_f, \\ \|g[f(a)+s] - g[f(a)] - dg[f(a)].s\|_G &< \epsilon \|s\|_F, \quad \forall s \in F, \|s\|_F < \delta_g. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Soit

$$\delta := \min \left\{ \delta_f, \frac{\delta_g}{\|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + \epsilon} \right\}$$

et $h \in E$ vérifiant $\|h\|_E < \delta$. Alors

$$\|f(a+h) - f(a)\|_F \leq \|df(a).h\| + \epsilon \|h\|_E \leq (\|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + \epsilon) \|h\|_E < \delta_g$$

donc on peut appliquer (11.5) à $s = f(a+h) - f(a)$, ce qui fournit

$$\|(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) - dg[f(a)].[f(a+h) - f(a)]\|_G < \epsilon (\|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + \epsilon) \|h\|_E.$$

On en déduit, par inégalité triangulaire, que

$$\begin{aligned} &\|(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) - dg[f(a)].[df(a).h]\|_G \\ &\leq \|dg[f(a)].[f(a+h) - f(a) - df(a).h]\|_G + \epsilon (\|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + \epsilon) \|h\|_E \\ &\leq \epsilon \|dg(f(a))\|_{\mathcal{L}_c(F,G)} \|h\|_E + \epsilon (\|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + \epsilon) \|h\|_E. \end{aligned}$$

On a montré que

$$(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) - dg[f(a)].[df(a).h] = o(\|h\|_E).$$

2. Cela résulte de la formule précédente.
3. $f^{-1} \circ f = Id$ donc (TFC) $d(f^{-1})(b) \circ df(a) = Id_E$ lorsque $b := f(a)$.
4. On applique le TFC à $f \circ \gamma$.
5. On applique le TFC pour calculer $u'(t)$ pour $t \in (0, 1)$
6. Comme $u \in C^1([a, b], F)$ on a le droit d'écrire, avec l'intégrale de Riemann (voir Section 10.7)

$$u(1) - u(0) = \int_0^1 u'(t) dt,$$

ce qui fournit la conclusion.

7. Même raisonnement avec l'intégrale de Lebesgue : l'hypothèse $u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^q)$ est alors un peu forte, il suffirait que u soit absolument continue $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q$ (voir Rudin, Analyse réelle et complexe, Thm 7.7 et Thm 7.18) □

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une application différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer la dérivée de la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, x)$, en fonction de la différentielle de f .
2. Calculer la différentielle de la fonction $k : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y, x)$, en fonction de la différentielle de f .

(Corrigé : Rouvière : Ex 14 page 49)

Exercice : Soit $k \in \mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn et $f : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il y a équivalence entre

1. f est homogène de degré k , cad $f(tx) = t^k f(x)$ pour tout $t > 0$, $x \in E \setminus \{0\}$,
2. $df(x).x = k f(x)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Pour démontrer (2) $\Rightarrow$ (1), on pourra montrer que, à x fixé, la fonction $u : t \in (0, \infty) \mapsto f(tx)$ est solution d'un problème de Cauchy, avec condition initiale en $t = 1$.
(Corrigé : Rouvière Ex 20 page 66)

Exercice : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un eph.

1. En appliquant le TFC, montrer que la norme préhilbertienne $N : x \in H \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $H \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
2. Est-elle différentiable en 0 ?
3. Montrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ll} f : H & \rightarrow H \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

est différentiable sur $H \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.

4. f est-elle différentiable en 0 ?

Exercice : (Formule de Liouville) Soit $T > 0$, $A \in C^0([0, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et R la résolvante du système différentiel d'inconnue $X(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), & t \in (0, T), \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

c'est à dire la solution $R \in C^1([0, T], GL_n(\mathbb{R}))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} R'(t) = R(t)A(t), & t \in (0, T), \\ R(0) = I_n. \end{cases}$$

Montrer que $\det[R(t)] = e^{\int_0^t \text{Tr}[A(s)]ds}$ pour tout $t \in [0, T]$.

Rappel : L'égalité des accroissements finis n'est vraie que pour les fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle. Elle ne se généralise pas aux fonctions à valeurs vectorielles d'une variable réelle. Mais elle se généralise aux fonctions à valeurs réelles d'une variable vectorielle, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, Ω un ouvert convexe de $(E, \|\cdot\|_E)$ et $f : \Omega_E \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable sur Ω_E . Montrer que, pour tout $x, y \in \Omega_E$, il existe $c \in [x, y]$ tel que

$$f(x) - f(y) = df(c).(y - x).$$

11.1.5 Différentiabilité et inversion

D'après le TFC, si $f : \Omega_E \rightarrow \Omega_F$ est différentiable en a , bijective, et f^{-1} est différentiable en $f(a)$, alors

$$Id = d(f^{-1} \circ f)(a) = df^{-1}(f(a)) \circ df(a)$$

donc $df(a) \in \mathcal{G}l(E, F)$ et

$$df^{-1}(f(a)) = df(a)^{-1}.$$

L'énoncé suivant complète ce constat.

Théorème 35 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de **Banach**, Ω_E un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, $a \in \Omega_E$, Ω_F un ouvert de $(F, \|\cdot\|_F)$ $f : \Omega_E \rightarrow \Omega_F$ un homéomorphisme de Ω_E sur Ω_F (bijection bi-continue). Si f est différentiable en a et $df(a)$ est une bijection de E sur F , alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et

$$d(f^{-1})(b) = [df(a)]^{-1}.$$

Preuve : D'après le thm d'isomorphisme de Banach, $df(a)^{-1}$ est continu $F \rightarrow E$, donc $M := \|df(a)^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(F,E)}$ est fini. On veut montrer que, pour y assez proche de b ,

$$f^{-1}(y) - a - df(a)^{-1} \cdot (y - b) = \|y - b\|_F \epsilon(y), \text{ où } \epsilon : \Omega_F \rightarrow E \text{ et } \|\epsilon(y)\|_E \xrightarrow{\|y-b\|_F \rightarrow 0} 0. \quad (11.6)$$

On sait que

$$f(x) - b - df(a) \cdot (x - a) = \|x - a\|_E \tilde{\epsilon}(x), \text{ où } \tilde{\epsilon} : \Omega_E \rightarrow F \text{ et } \|\tilde{\epsilon}(x)\|_F \xrightarrow{\|x-a\|_E \rightarrow 0} 0.$$

Fixons $y \in \Omega_F$, $x := f^{-1}(y)$ et appliquons $df(a)^{-1}$ à l'égalité précédente :

$$df(a)^{-1}(y - b) - (f^{-1}(y) - a) = \|f^{-1}(y) - a\|_E df(a)^{-1} \tilde{\epsilon}[f^{-1}(y)],$$

cad

$$f^{-1}(y) - a - df(a)^{-1} \cdot (y - b) = \|y - b\|_F \epsilon(y), \quad \text{où} \quad \epsilon(y) := -\frac{\|f^{-1}(y) - a\|_E}{\|y - b\|_F} df(a)^{-1} \tilde{\epsilon}(f^{-1}(y)). \quad (11.7)$$

Il existe $\delta_E > 0$ tel que

$$\|\tilde{\epsilon}(\tilde{x})\|_F < \frac{1}{2M}, \quad \forall \tilde{x} \in \Omega_E / \|\tilde{x} - a\|_E < \delta_E.$$

Par continuité de f^{-1} , il existe $\delta_F > 0$ tel que $f^{-1}(y) \in B_E(a, \delta_E)$ lorsque $\|y - b\|_F < \delta_F$, et on a alors, d'après (11.7)

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(y) - a\|_E &\leq \|df(a)^{-1}(y - b)\|_E + \|f^{-1}(y) - a\|_E \|df(a)^{-1} \tilde{\epsilon}(f^{-1}(y))\|_E \\ &\leq M\|y - b\|_E + \|f^{-1}(y) - a\|_E M \frac{1}{2M} \end{aligned}$$

donc

$$\|f^{-1}(y) - a\|_E \leq 2M\|y - b\|_E.$$

Ainsi,

$$\|\epsilon(y)\|_E \leq 2M\|\tilde{\epsilon}[f^{-1}(y)]\|_F \rightarrow 0, \quad \text{quand } [\|y - b\|_F \rightarrow 0],$$

par convergence de $\tilde{\epsilon}(x)$ quand $\|x - a\|_E \rightarrow 0$ et continuité de f^{-1} en b . □

Définition 42 (C^1 -difféomorphisme) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, Ω_E un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, Ω_F un ouvert de $(F, \|\cdot\|_F)$. Une application $f : \Omega_E \rightarrow \Omega_F$ est un C^1 -difféomorphisme de Ω_E sur Ω_F si

- f est un bijection de Ω_E sur Ω_F ,
- f est C^1 sur Ω_E ,
- f^{-1} est C^1 sur Ω_F .

Exercice : Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto \begin{cases} \tanh(x) \frac{x}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur sa boule unité ouverte. (Corrigé : Rouvière Ex 21 page 67)

11.1.6 Inégalité des accroissements finis et conséquences

Théorème 36 [*IAF, fonction à variable vectorielle*] Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de E , $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$, $f : \Omega \rightarrow F$ différentiable et $\phi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ dérivable telles que

$$\|df[x + t(y - x)] \cdot (y - x)\|_F \leq \phi'(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Alors

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \phi(1) - \phi(0).$$

Preuve : On applique l'inégalité des accroissements finis, établie dans le chapitre précédent, pour les fonctions de la variable réelle, à la fonction auxiliaire

$$\left| \begin{array}{ll} u : [0, 1] & \rightarrow F \\ t & \mapsto f[x + t(y - x)] \end{array} \right. \square$$

Corollaire 9 [*IAF*] Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, Ω un ouvert $(E, \|\cdot\|_E)$ et $f : \Omega \rightarrow F$.

1. Si f est différentiable sur Ω et x, y sont deux points de Ω tels que $[x, y] \subset \Omega$ alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \|x - y\|_E \sup\{\|df(z)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}; z \in [x, y]\}$$

où le sup peut éventuellement être infini.

2. Si E est de dimension finie et $f \in C^1(\Omega, F)$ alors f est localement lipschitzienne sur Ω : pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que f soit lipschitzienne sur $\overline{B}_E(x, r)$

$$\forall x \in \Omega, \exists M, r > 0 \text{ tels que } \|f(y_1) - f(y_2)\|_F \leq M\|y_1 - y_2\|_E, \forall y_1, y_2 \in B_E(x, r).$$

Preuve du 2 : Soit $x \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}_E(x, 2r) \subset \Omega$. Comme E est de dimension finie, alors $\overline{B}_E(x, r)$ est compact. Ainsi, l'application df est continue sur le compact $\overline{B}_E(x, r)$ donc bornée : il existe $M > 0$ tel que $\|df(z)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq M$ pour tout $z \in \overline{B}_E(x, r)$. Alors, pour tout $y_1, y_2 \in \overline{B}_E(x, r)$, le segment $[y_1, y_2]$ est contenu dans la boule $\overline{B}_E(x, r)$ donc dans Ω et le résultat précédent justifie la majoration voulue. $\square$

Exercice : Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\|df(z)\|_{\mathcal{L}_c(E)} < 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f admet au plus un point fixe dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice : Un résultat classique assure que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$ sont de même nature (convergente/divergente) lorsque f est monotone. Le but de cet exercice est de généraliser ce résultat en l'absence d'hypothèse de monotonie.

1. Soit $f \in C^1((0, \infty), \mathbb{C})$. Montrer que

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2} \max\{|f'(x)|; x \in [n, n+1]\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. En déduire la nature de la série $\sum \frac{\sin[\ln(n)]}{n}$ en la comparant à une intégrale.

[Corrigé Rouvière, Ex 35, page 100]

Théorème 37 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, Ω un ouvert **connexe** de $(E, \|\cdot\|_E)$ et $f : \Omega \rightarrow F$ une application différentiable sur Ω . EQU

1. f est constante sur Ω ,

2. $df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Preuve de 2 $\Rightarrow$ 1 : Soit $a \in \Omega_E$ et $b := f(a)$. Alors

- $f^{-1}(\{b\})$ est un sous-ensemble non vide de Ω_E , car il contient a .
- $f^{-1}(\{b\})$ est un sous-ensemble fermé de Ω_E , car image réciproque du fermé $\{b\}$ par l'application continue f .
- $f^{-1}(\{b\})$ est un sous-ensemble ouvert de Ω_E . En effet, soit $x \in f^{-1}(\{b\})$. Comme Ω_E est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x, r) \subset \Omega_E$. Pour tout $y \in B_E(x, r)$, le segment $[x, y]$ est contenu dans Ω_E (car il est contenu dans $B_E(x, r)$) donc

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 df[x + t(x - y)] \cdot (y - x) dt = b.$$

Ceci montre que $B_E(x, r) \subset f^{-1}(\{b\})$.

Comme Ω_E est connexe, on en déduit que $f^{-1}(\{b\}) = \Omega_E$: f est constante en b sur Ω_E . $\square$

Corollaire 10 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$ et $f : \Omega \rightarrow F$ une application différentiable sur Ω . EQU

1. f est constante sur les composantes connexes de Ω ,
2. $df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

11.1.7 Gradient

Théorème 38 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Ω un ouvert de $(H, \|\cdot\|)$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ une application différentiable à valeurs scalaires. Alors pour tout $x \in \Omega$, il existe un unique vecteur $v \in H$ tel que

$$df(x).h = \langle v, h \rangle, \quad \forall h \in H.$$

Il est appelé **gradient de f en x** et noté $\nabla f(x)$. Ainsi

$$\left| \begin{array}{ccc} \nabla f : & \Omega & \rightarrow H \\ & x & \mapsto \nabla f(x) \end{array} \right|$$

et

$$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + o_{\|h\| \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Preuve : Pour tout $x \in H$, $df(x)$ est une forme linéaire continue sur H , donc le thm de Riesz fournit la conclusion. $\square$

11.1.8 Différentiabilité et suites/séries d'applications

Théorème 39 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, Ω un ouvert **connexe** de E , $(F, \|\cdot\|_F)$ un **Banach**, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications différentiables $\Omega \rightarrow F$. On suppose que

- **(H1)** : il existe $x_1 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$,
- **(H2)** : la suite $(df_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L(x)$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$, uniformément par rapport à $x \in \Omega$, cad

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|df_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} < \epsilon, \quad \forall x \in \Omega.$$

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω vers une fonction $f : \Omega \rightarrow F$ différentiable sur Ω et de différentielle $= L$.

La convergence de f_n vers f est uniforme sur toute boule fermée contenue dans Ω .

Si, de plus, $f_n \in C^1(\Omega, F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f \in C^1(\Omega, F)$.

La preuve de ce thm utilise le Lemme suivant.

Lemme 8 *Sous les hypothèses du thm précédent, on a :*

- pour tout $x_2 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$ et
- pour tout $r > 0$ tel que $B_E(x_2, r) \subset \Omega$,

alors $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$ pour tout $x \in B_E(x_2, r)$.

Preuve du Lemme : Soit $x_2 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$, $r > 0$ tel que $B_E(x_2, r) \subset \Omega$ et $x \in B_E(x_2, r)$. On va montrer que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$, ce qui implique sa convergence, car $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet.

Soit $\epsilon > 0$. La suite $(f_n(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$ donc elle est de Cauchy :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|(f_n - f_p)(x_2)\|_F \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall p > n \geq n_1. \quad (11.8)$$

Par l'hypothèse **(H2)**,

$$\exists n_2 \geq n_1 \text{ tel que } \|df_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq \frac{\epsilon}{4r}, \quad \forall n \geq n_2, \forall x \in \Omega \quad (11.9)$$

et alors (inégalité triangulaire)

$$\|d(f_n - f_p)(x)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq \frac{\epsilon}{2r}, \quad \forall p > n \geq n_2, \forall x \in \Omega.$$

Soient $p > n \geq n_2$. Comme $[x, x_2] \subset B_E(x_2, r) \subset \Omega$, l'IAF justifie que

$$\begin{aligned} \|(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_2)\|_F &\leq \|x - x_2\|_E \sup\{\|d(f_n - f_p)(z)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}; z \in [x, x_2]\} \\ &\leq r \frac{\epsilon}{2r} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\|(f_n - f_p)(x)\|_F \leq \|(f_n - f_p)(x_2)\|_F + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \square$$

Preuve du théorème :

Etape 1 : Montrons que (f_n) converge simplement sur Ω . Par connexité de Ω , il suffit de montrer que

$$A := \{x \in \Omega; (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } (F, \|\cdot\|_F)\}$$

est un sous-ensemble non vide, ouvert et fermé dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$.

- A est non vide car il contient x_1 par hypothèse **(H2)**.
- A est ouvert dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$, grâce au lemme précédent : pour tout $x_2 \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x_2, r) \subset \Omega$ et alors $B_E(x_2, r) \subset A$.
- A est fermé dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$, grâce au lemme précédent. En effet, considérons une suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de A et $b \in \Omega$ tel que $\|b_k - b\|_E \rightarrow 0$ quand $[k \rightarrow \infty]$. Montrons que $b \in A$. Comme Ω est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B_E(b, \rho) \subset \Omega$. Comme $\|b_k - b\|_E \rightarrow 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b_{k_0} \in B_E(b, \rho/2)$. Alors $b \in B_E(b_{k_0}, \rho/2) \subset \Omega$ donc, d'après le Lemme précédent (appliqué avec $x_2 = b_{k_0}$ et $r = \rho/2$) on a $b \in A$.

En conséquence, $A = \Omega$. Notons $f(x)$ la limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ pour tout $x \in \Omega$. Ceci définit une application $f : \Omega \rightarrow F$.

Etape 2 : Montrons que f est différentiable sur Ω et de différentielle L . Soit $x_0 \in \Omega$ et $\epsilon > 0$. On veut montrer que

$$\exists \delta > 0, \|f(x_0 + h) - f(x_0) + L(x_0).h\|_F \leq \|h\|_E, \quad \forall h \in B_E(0, \delta).$$

Pour cela, on va utiliser la décomposition suivante, avec n_0 assez grand.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) + L(x_0).h &= \left(f_{n_0}(x_0 + h) - f_{n_0}(x_0) + df_{n_0}(x_0).h \right) \\ &\quad + \left((f - f_{n_0})(x_0 + h) - (f - f_{n_0})(x_0) \right) \\ &\quad + \left(L(x_0).h - df_{n_0}(x_0).h \right) \end{aligned} \quad (11.10)$$

La principale difficulté est manifestement de gérer le 2e terme du membre de droite, dans lequel on va utiliser l'IAF.

Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset \Omega$. Par hypothèse **(H2)**, il existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|df_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0, x \in \Omega. \quad (11.11)$$

On en déduit, par inégalité triangulaire, que

$$\|d(f_n - f_j)(x)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq 2\epsilon, \quad \forall n, j \geq n_0, x \in \Omega.$$

L'IAF prouve alors que

$$\|(f_n - f_j)(x_0 + h) - (f_n - f_j)(x_0)\|_F \leq 2\epsilon\|h\|_E, \quad \forall n, j \geq n_0, \forall h \in B_E(x_0, r),$$

car le segment $[x_0, x_0 + h]$ est contenu dans Ω pour tous les h concernés. En faisant $n = n_0$ et $[j \rightarrow \infty]$ dans la relation précédente, on obtient

$$\|(f_{n_0} - f)(x_0 + h) - (f_{n_0} - f)(x_0)\|_F \leq 2\epsilon\|h\|_E, \quad \forall h \in B_E(x_0, r). \quad (11.12)$$

Par ailleurs, f_{n_0} est différentiable en x_0 donc il existe $\delta \in (0, r)$ tel que

$$\|f_{n_0}(x_0 + h) - f_{n_0}(x_0) - df_{n_0}(x_0).h\|_F \leq \epsilon\|h\|_E, \quad \forall h \in B_E(0, \delta). \quad (11.13)$$

Considérons la décomposition (11.10) avec $h \in B_E(0, \delta)$: grâce à l'inégalité triangulaire et (11.11), (11.12), (11.13), on obtient

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) + L(x_0).h\|_F \leq 4\epsilon\|h\|_E, \quad \forall h \in B_E(0, \delta),$$

d'où la première conclusion du thm.

Etape 3 : Soit $x_3 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tel que $B(x_3, \rho) \subset \Omega$. Montrons que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ uniformément par rapport à $x \in B_E(x_3, \rho)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (11.11) soit vérifiée et

$$\|(f_n - f)(x_3)\|_F \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Alors, l'IAF justifie que

$$\begin{aligned} \|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x_3)\|_F &\leq \|x - x_3\|_E \sup\{\|d(f_n - f)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}; z \in [x, x_3]\} \\ &\leq \rho\epsilon, \quad \forall x \in B_E(x_3, \rho), \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\|(f_n - f)(x)\|_F \leq \|(f_n - f)(x_3)\|_F + \rho\epsilon \leq \epsilon(\rho + 1), \quad \forall x \in B_E(x_3, \rho), \forall n \geq n_0$$

ce qui conclut l'Etape 3.

Etape 4 : Maintenant si les applications f_n sont $C^1(\Omega, F)$ alors les applications $df_n : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$ sont continues donc, par convergence uniforme, $L : \Omega \mapsto \mathcal{L}_c(E, F)$ est continue, cad $f \in C^1(\Omega_E, F)$. $\square$

Application : Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach. Alors

$$\left| \begin{array}{ccc} \exp : & E & \rightarrow E \\ & x & \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} \right|$$

définit une application de classe C^1 sur E .

Preuve :

Etape 1 : $\exp$ est bien définie. Soit $x \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \frac{x^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|x\|^n}{n!}$$

par sous-multiplicativité de la norme d'algèbre, donc la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument. Comme $(E, \|\cdot\|)$ est complet, alors cette série converge dans $(E, \|\cdot\|)$.

Etape 2 : $\exp \in C^1(E, E)$. On va appliquer le théorème précédent avec

$$\left| \begin{array}{ccc} f_n : & E & \rightarrow E \\ & x & \mapsto \frac{x^n}{n!} \end{array} \right|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in C^1(E, E)$ car elle est polynômiale et

$$df_n(x).h = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} x^k h x^{n-1-k}, \quad \forall x, h \in E$$

(nous l'avons déjà démontré). On a

$$\begin{aligned} \|df_n(x).h\| &\leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \|x^k h x^{n-1-k}\| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \|h\| \|x^{n-1}\| \quad (\text{norme sous-multiplicative}) \\ &\leq \frac{\|x\|^{n-1}}{(n-1)!} \|h\|, \quad \forall x, h \in E \end{aligned}$$

donc

$$\|df_n(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq \frac{\|x\|^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \forall x \in E.$$

Pour avoir de la convergence uniforme par rapport à x , on doit donc travailler sur un ouvert borné de E .

Soit $R > 0$ et $\Omega := B_E(0, R)$. Alors

- l'ouvert Ω est connexe (car convexe),
- $f_n \in C^1(\Omega, E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- la série $\sum f_n(x)$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ pour tout $x \in \Omega$
- la série $\sum df_n(x)$ converge dans $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E, F)})$, uniformément par rapport à $x \in \Omega$ car

$$\|df_n(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq \frac{R^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Donc $\exp \in C^1(\Omega, E)$ et $d(\exp)(x).h = \sum_{n=1}^{\infty} df_n(x).h$ pour tout $x \in \Omega$ et $h \in E$. Ceci est vrai pour tout $R > 0$ donc $\exp \in C^1(E, E)$ et $d(\exp)(x).h = \sum_{n=1}^{\infty} df_n(x).h$ pour tout $x, h \in E$. $\square$

11.2 Différentielles partielles

Dans toute cette section, on utilise les notations suivantes :

- $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n}), (F, \|\cdot\|_F)$ sont des evn sur $\mathbb{K}$,
- $E := E_1 \times \dots \times E_n$ est muni de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_E := \max\{\|x_j\|_{E_j}; j = 1, \dots, n\}$,
- Ω est un ouvert de E , $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow F$.

11.2.1 Différentielle partielle d'ordre 1

Definition 43 *f admet une différentielle partielle par rapport à x_j en a si l'application*

$$x_j \in E_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \in F$$

admet une différentielle en a_j , alors notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathcal{L}_c(E_j, F).$$

Autrement dit, on a

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, \dots, a_n) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j + o_{\|h_j\|_{E_j} \rightarrow 0}(\|h_j\|_{E_j})$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \left\| f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j \right\|_F \leq \epsilon \|h_j\|_{E_j},$$

$$\forall h_j \in E_j \text{ vérifiant } \|h_j\|_{E_j} < \delta.$$

Proposition 69 *Si f est différentiable en $a \in \Omega$ alors f est différentiable par rapport à chacune de ses variables en a et*

$$df(a).h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E.$$

Preuve : Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $h_j \in E_j$, $\tilde{h}_j$ désigne le vecteur de E dont toutes les composantes sont nulles sauf la j ème qui vaut h_j . L'application linéaire $L : h_j \in E_j \mapsto df(a).\tilde{h}_j \in F$ est continue car

$$\|L(h_j)\|_F \leq \|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \|\tilde{h}_j\|_E = \|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \|h_j\|_{E_j}, \quad \forall h_j \in E_j.$$

Par différentiabilité de f en a , on a

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, \dots, a_n) = f(a) + L(h_j) + o_{\|h_j\|_{E_j} \rightarrow 0}(\|h_j\|_{E_j}).$$

Ainsi, f admet une différentielle partielle par rapport à x_j en a et

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j = df(a).\tilde{h}_j, \quad \forall h_j \in E_j.$$

Par linéarité de $df(a)$, on en déduit que

$$df(a).h = \sum_{j=1}^n df(a).\tilde{h}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E. \square$$

Théorème 40 *Il y a équivalence entre*

1. $f \in C^1(\Omega, F)$
2. f admet des différentielles partielles par rapport à toutes les variables x_j sur Ω **ET** ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues de $(\Omega, \|\cdot\|_E) \rightarrow \mathcal{L}_c(E_j, F)$.

Preuve de 2 $\Rightarrow$ 1 avec $n = 2$:

Etape 1 : Montrons que f est différentiable sur Ω . Soit $a = (a_1, a_2) \in \Omega$. L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{lll} L : & E = E_1 \times E_2 & \rightarrow F \\ & h = (h_1, h_2) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2. \end{array} \right.$$

est continue car, pour tout $h = (h_1, h_2) \in E$,

$$\begin{aligned} \|L(h)\|_F &\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1, F)} \|h_1\|_{E_1} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)} \|h_2\|_{E_2} \\ &\leq \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1, F)} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)} \right) \|h\|_E. \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Montrons que

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F \leq \epsilon \|h\|_E, \quad \forall h \in B_E(0, \delta).$$

Pour cela, on utilise la décomposition

$$f(a+h) - f(a) - L(h) = \Delta_1(h) + \Delta_2(h)$$

où

$$\Delta_1(h) := f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2).h_1,$$

$$\Delta_2(h) := f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2).h_2.$$

Par continuité des différentielles partielles de f en a , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(b) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_j, F)} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall b \in B_E(a, \delta), j \in \{1, 2\}. \quad (11.14)$$

Soit $h \in B_E(0, \delta)$. On a

$$\Delta_1(h) = G(1) - G(0)$$

où

$$\left| \begin{array}{lll} G : & [0, 1] & \rightarrow F \\ & t & \mapsto f(a_1 + th_1, a_2 + h_2) - t \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2).h_1 \end{array} \right.$$

L'IAF justifie donc que

$$\|\Delta_1(h)\|_F \leq \sup\{\|G'(t)\|_F; t \in (0, 1)\}.$$

Or, d'après le TFC et l'hypothèse (11.14), on a

$$\|G'(t)\|_F = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + th_1, a_2 + h_2).h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2).h_1 \right\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} \|h_1\|_{E_1}, \quad \forall t \in (0, 1).$$

Donc

$$\|\Delta_1(h)\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} \|h_1\|_{E_1}.$$

De même, on a

$$\Delta_2(h) = \tilde{G}(1) - \tilde{G}(0)$$

où

$$\left| \begin{array}{ll} \tilde{G} : [0, 1] & \rightarrow F \\ t & \mapsto f(a_1, a_2 + th_2) - t \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2).h_2 \end{array} \right.$$

L'IAF justifie que

$$\|\Delta_2(h)\|_F \leq \sup\{\|\tilde{G}'(t)\|_F; t \in (0, 1)\}.$$

Or, d'après le TFC et l'hypothèse (11.14), on a

$$\|\tilde{G}'(t)\|_F = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + th_2).h_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2).h_2 \right\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} \|h_2\|_{E_2}, \quad \forall t \in (0, 1).$$

Donc

$$\|\Delta_2(h)\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} \|h_2\|_{E_2}.$$

En conséquence,

$$\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} (\|h_1\|_{E_1} + \|h_2\|_{E_2}) \leq \epsilon \|h\|_E.$$

Etape 2 : Montrons que $f \in C^1(\Omega, F)$. On a montré que, pour tout $a \in \Omega$,

$$df(a).h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2, \quad \forall h \in E$$

donc $df \in C^0(\Omega, \mathcal{L}_c(E, F))$ cad $f \in C^1(\Omega, F)$. □

11.2.2 Différentielle partielle d'ordre 2

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 41 [Lemme de Schwartz] Soit $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ existent sur Ω et sont continues sur Ω , alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \text{ sur } \Omega.$$

Il est important de bien comprendre quels objets on est en train de manipuler. Pour simplifier, prenons $n = 2$, $\{j, k\} = \{1, 2\}$. On a

$$f : \Omega \subset E_1 \times E_2 \rightarrow F$$

Pour tout $(a_1, a_2) \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)$ est la différentielle en a_2 de l'application

$$\left| \begin{array}{ll} \Omega_2 \subset E_2 & \rightarrow F \\ x_2 & \mapsto f(a_1, x_2) \end{array} \right.$$

où Ω_2 est un voisinage ouvert de a_2 dans $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \in \mathcal{L}_c(E_2, F).$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} : \Omega \subset E_1 \times E_2 \rightarrow \mathcal{L}_c(E_2, F).$$

On peut donc considérer les différentielles partielles de cette nouvelle application : pour tout $(a_1, a_2) \in \Omega$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$ est la différentielle en a_1 de l'application

$$\left| \begin{array}{ll} \Omega_1 \subset E_1 & \rightarrow \mathcal{L}_c(E_2, F) \\ x_1 & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, a_2) \end{array} \right.$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) \in \mathcal{L}_c\left(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F)\right).$$

De même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) \in \mathcal{L}_c\left(E_2, \mathcal{L}_c(E_1, F)\right).$$

Pour pouvoir identifier ces 2 objets, il faut qu'ils vivent dans un même espace. C'est ce que justifie l'énoncé suivant.

Proposition 70 *L'application linéaire*

$$\left| \begin{array}{ll} J : \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F) & \rightarrow \mathcal{L}_c\left(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F)\right) \\ \alpha & \mapsto \left(\begin{array}{ll} E_1 & \rightarrow \mathcal{L}_c(E_2, F) \\ x_1 & \mapsto \alpha(x_1, \cdot) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

est une isométrie bijective. Elle permet d'identifier

$$\mathcal{L}_c\left(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F)\right), \quad \mathcal{L}_c\left(E_2, \mathcal{L}_c(E_1, F)\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F).$$

Rappelons que $\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$ est l'espace vectoriel des applications bilinéaires et continues $E_1 \times E_2 \rightarrow F$, naturellement muni de la norme

$$\|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} := \sup\{\|\alpha(x_1, x_2)\|_F; (x_1, x_2) \in E, \|x_1\|_{E_1} = \|x_2\|_{E_2} = 1\}.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{L}_c\left(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F)\right)$ est naturellement muni de la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_{E_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)}$:

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))} = \sup\{\|\phi(x_1)\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)}; x_1 \in E_1, \|x_1\|_{E_1} = 1\}.$$

Ainsi, le Lemme de Schwarz conclut que, pour tout $a \in \Omega$, les différentielles partielles d'ordre 2 en a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)$ sont égales, en tant que formes bilinéaires continues $E_1 \times E_2 \rightarrow F$.

Preuve de la Proposition :

Etape 1 : Montrons que J est bien à valeurs dans $\mathcal{L}_c\left(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F)\right)$. Pour $\alpha \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$ et $x_1 \in E_1$, l'application $\alpha(x_1, \cdot)$ est linéaire $E_2 \rightarrow F$, par bilinéarité de α , et continue car

$$\|\alpha(x_1, x_2)\|_F \leq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}, \quad \forall x_2 \in E_2.$$

De plus,

$$\|\alpha(x_1, \cdot)\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)} \leq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} \|x_1\|_{E_1}.$$

L'application $x_1 \in E_1 \mapsto \alpha(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}_c(E_2, F)$ est linéaire, par bilinéarité de α et continue en raison de l'inégalité précédente.

Etape 2 : J est clairement linéaire, $J(\lambda\alpha + \beta) = \lambda J(\alpha) + J(\beta)$.

Etape 3 : Montrons que J est une isométrie (et donc elle est injective, par linéarité). Soit $\alpha \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$. On veut montrer que

$$\|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))} = \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)}.$$

On a vu à l'étape 1 que

$$\|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))} \leq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Par propriété de la borne supérieure, il existe $(x_1^*, x_2^*) \in E$ tels que $\|x_1^*\|_{E_1} = \|x_2^*\|_{E_2} = 1$ et

$$\|\alpha(x_1^*, x_2^*)\|_F \geq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} - \epsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))} &\geq \|J(\alpha)(x_1^*)\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)} = \|\alpha(x_1^*, \cdot)\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)} \\ &\geq \|\alpha(x_1^*, x_2^*)\|_F \\ &\geq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} - \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc

$$\|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))} \geq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)},$$

ce qui fournit la conclusion.

Etape 4 : Montrons que J est surjective. Soit $\phi \in \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))$. Définissons

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha : & E_1 \times E_2 & \rightarrow F \\ & (x_1, x_2) & \mapsto \phi(x_1).x_2 \end{array} \right|$$

Alors α est une forme bilinéaire continue sur $E_1 \times E_2 \rightarrow F$ [...] et $J(\alpha) = \phi$. □

Preuve du Lemme de Schwartz : Soit $(a_1, a_2) \in \Omega$ et $\epsilon > 0$. On va montrer que

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} < \epsilon. \quad (11.15)$$

Quitte à translater Ω et f , on peut supposer que $(a_1, a_2) = (0, 0)$. Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que $B_E((0, 0), r) \subset \Omega$ et

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(b_1, b_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall (b_1, b_2) \in B_E((0, 0), r), \{i, j\} = \{1, 2\}. \quad (11.16)$$

Fixons $(u_1, u_2) \in B_E((0, 0), r)$ et considérons

$$\Delta(u_1, u_2) := f(u_1, u_2) - f(u_1, 0) - f(0, u_2) + f(0, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(u_1, u_2) \in F.$$

Alors

$$\Delta(u_1, u_2) = \varphi_{u_1}(u_2) - \varphi_{u_1}(0)$$

où

$$\left| \begin{array}{ccc} \varphi_{u_1} : & \Omega_2 \subset E_2 & \rightarrow F \\ & t & \mapsto f(u_1, t) - f(0, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(u_1, t) \end{array} \right|$$

et Ω_2 est un ouvert de E_2 contenant $[0, u_2]$. L'inégalité des accroissements finis justifie donc que

$$\|\Delta(u_1, u_2)\|_F \leq \|u_2\|_{E_2} \sup\{\|d\varphi_{u_1}(t)\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)}; t \in [0, u_2]\}.$$

Soit $t \in [0, u_2]$. Pour tout $\tau \in E_2$, on a (TFC)

$$d\varphi_{u_1}(t).\tau = \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_1, t).\tau - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, t).\tau - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(u_1, \tau).$$

Soit $\tau \in E_2$. On a

$$d\varphi_{u_1}(t).\tau = \theta_{t, \tau}(u_1) - \theta_{t, \tau}(0)$$

où

$$\left| \begin{array}{ccc} \theta_{t, \tau} : & \Omega_1 \subset E_1 & \rightarrow F \\ & s & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_2}(s, t).\tau - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(s, \tau) \end{array} \right.$$

et Ω_1 est un ouvert de E_1 contenant $[0, u_1]$. L'inégalité des accroissements finis justifie donc que

$$\|d\varphi_{u_1}(t).\tau\|_F \leq \|u_1\|_{E_1} \sup\{\|d\theta_{t, \tau}(s)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, F)}; s \in [0, u_1]\}.$$

Soit $s \in [0, u_1]$ et $\sigma \in E_1$. On a

$$\|d\theta_{t, \tau}(s).\sigma\|_F = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(s, t).(s, \tau) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(s, \tau) \right\|_F < \frac{\epsilon}{2} \|\sigma\|_{E_1} \|\tau\|_{E_2}$$

grâce à (11.16). Ceci est vrai pour tout $\sigma \in E_1$, donc, en passant au sup sur $\sigma \in E_1$ tel que $\|\sigma\|_{E_1} = 1$, on obtient

$$\|d\theta_{t, \tau}(s)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, F)} \leq \frac{\epsilon}{2} \|\tau\|_{E_2}.$$

Ceci est vrai pour tout $s \in [0, u_1]$ donc, en passant au sup sur $s \in [0, u_1]$, on obtient

$$\|d\varphi_{u_1}(t).\tau\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} \|u_1\|_{E_1} \|\tau\|_{E_2}.$$

Ceci est vrai pour tout $\tau \in E_2$ donc, en passant au sup sur $\tau \in E_2$ tel que $\|\tau\|_{E_2} = 1$, on obtient

$$\|d\varphi_{u_1}(t)\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)} \leq \frac{\epsilon}{2} \|u_1\|_{E_1}.$$

Ceci est vrai pour tout $t \in [0, u_2]$ donc, en passant au sup sur $t \in [0, u_2]$, on obtient

$$\|\Delta(u_1, u_2)\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2}.$$

On a montré que

$$\left\| f(u_1, u_2) - f(u_1, 0) - f(0, u_2) + f(0, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(u_1, u_2) \right\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2},$$

$$\forall (u_1, u_2) \in B_E((0, 0), r).$$

Le même raisonnement, échangeant le rôle des variables x_1 et x_2 montre que

$$\left\| f(u_1, u_2) - f(u_1, 0) - f(0, u_2) + f(0, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0).(u_1, u_2) \right\|_F \leq \frac{\epsilon}{2} \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2},$$

$$\forall (u_1, u_2) \in B_E((0, 0), r).$$

En conséquence,

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0).(u_1, u_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(u_1, u_2) \right\|_F \leq \epsilon \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2}, \quad \forall (u_1, u_2) \in B_E((0, 0), r).$$

Par bilinéarité, cette inégalité reste vraie pour tout $(u_1, u_2) \in E$, ce qui prouve (11.15). $\square$

11.2.3 Différentielle partielle d'ordre n

On a vu dans la section précédente que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \in \mathcal{L}_c(E_j, E_k; F)$$

est une forme bilinéaire continue $E_j \times E_k \rightarrow F$ donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} : \Omega \mapsto \mathcal{L}_c(E_j, E_k; F)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k}(a) \in \mathcal{L}_c\left(E_l, \mathcal{L}_c(E_j, E_k; F)\right).$$

A nouveau, on peut identifier les espaces

$$\mathcal{L}_c\left(E_l, \mathcal{L}_c(E_j, E_k; F)\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_c(E_l, E_j, E_k; F).$$

Ainsi, la différentielle partielle d'ordre 3 de f en a

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k}(a)$$

est une application 3-linéaire continue de $E_l \times E_j \times E_k \rightarrow F$. Et la différentielle partielle d'ordre 3 de f

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_c(E_l, E_j, E_k; F)$$

est une application sur Ω à valeurs dans l'espace des applications 3-linéaires continues $E_l \times E_j \times E_k \rightarrow F$.

En itérant, on voit que, pour tout n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ de longueur $L := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, la différentielle partielle d'ordre L de f en a

$$\frac{\partial^L f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a) \in \mathcal{L}_c(E_1^{\alpha_1}, \dots, E_n^{\alpha_n}; F)$$

est une application L -linéaire continue de $E_1^{\alpha_1} \times \dots \times E_n^{\alpha_n}$ dans F . Et la différentielle partielle d'ordre L de f

$$\frac{\partial^L f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_c(E_1^{\alpha_1}, \dots, E_n^{\alpha_n}; F)$$

est une application sur Ω à valeurs dans l'espace des applications L linéaires continues $E_1^{\alpha_1} \times \dots \times E_n^{\alpha_n} \rightarrow F$.

L'ordre dans lequel se font les différentiations successives peut être changé sous réserve que les propriétés de continuité adhoc soient vérifiées (itérer l'application du Lemme de Schwarz).

11.2.4 Exercices type

Exercice 1 : L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

est-elle différentiable en $(0, 0)$?

En utilisant $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, on voit que $f(x, y) \leq 2\|(x, y)\|$ donc f est continue en $(0, 0)$.

On a $f(x, 0) \equiv 0$ donc f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même $f(0, y) = -y$ donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$. Par l'absurde, supposons que f est différentiable en $(0, 0)$. Alors

$$df(0).(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)h_2 = -h_2$$

et

$$\epsilon(x, y) := \frac{f(x, y) - f(0, 0) - df(0).(x, y)}{\|(x, y)\|} \longrightarrow 0 \text{ quand } \|(x, y)\| \rightarrow 0.$$

Or,

$$\epsilon(x, y) = \frac{y(x^2 - y^2) + y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{2yx^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

donc, pour $a, b \in \mathbb{R}^*$, $\epsilon(at, bt) \equiv \frac{2ba^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$ ne tend pas vers zéro quand $[t \rightarrow 0]$: contradiction

Exercice 2 : L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Il est clair que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. On a $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$ donc f admet des DP par rapport à x et y en $(0, 0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Par l'absurde, supposons que f est différentiable en $(0, 0)$. Alors $df(0) = 0$ et

$$\epsilon(x, y) := \frac{f(x, y) - f(0, 0) - df(0).(x, y)}{\|(x, y)\|} \longrightarrow 0 \text{ quand } \|(x, y)\| \rightarrow 0.$$

Or

$$\epsilon(x, y) = \frac{x^3 y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

en particulier $\epsilon(x, x^2) = \frac{x^5}{2x^4\sqrt{x^2+x^4}} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{1+x^2}}$ ne tend pas vers zéro quand $[t \rightarrow 0]$: contradiction

Exercice 3 : On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et les calculer. Qu'en déduire ?

En utilisant $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, on voit que $f(x, y) \leq 2\|(x, y)\|^2 = o(\|(x, y)\|)$ quand $\|(x, y)\| \rightarrow 0$, donc f est différentiable en $(0, 0)$ et $df(0, 0) = 0$. En particulier

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Le calcul explicite fournit, pour $(x, y) \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

donc la dérivée partielle $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existe et vaut -1 . On constate que $f(x, y) = -f(y, x)$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existe et vaut $+1$. D'après le Lemme de Schwartz, l'une au moins de ces 2 dérivées partielles n'est pas continue en $(0, 0)$. En fait, aucune des 2 n'est continue, par symétrie. On verra plus tard que cela implique que f n'est pas 2 fois différentiable en $(0, 0)$.

11.3 Différentielle d'ordre ≥ 2

11.3.1 Différentielle d'ordre 2

Definition 44 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow F$. On dit que f est **2 fois différentiable en a** si f est différentiable sur un voisinage ouvert U de a dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$ et si

$$df : U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$$

est différentiable en a . On note alors $d^2 f(a)$ la différentielle de cette application :

$$d^2 f(a) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$$

qui s'identifie à une forme bilinéaire continue $E \times E \rightarrow F$.

Exemple 1 : Différentielle seconde du déterminant.

On a établi que $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est différentiable et

$$d(\det)(A).H = \det(A) \operatorname{Tr}(A^{-1}H), \quad \forall A \in GL_n(\mathbb{C}), H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Grâce au TFC et à la différentielle de l'inverse, déjà calculée, on en déduit que pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $H, K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$(d^2 \det(A).K).H = \det(A) \operatorname{Tr}(A^{-1}K) \operatorname{Tr}(A^{-1}H) + \det(A) \operatorname{Tr}(-A^{-1}KA^{-1}H).$$

Exemple 2 : Différentielle seconde de l'inversion.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach. On a déjà établi que

$$\left| \begin{array}{ccc} f : & \operatorname{Inv}(E) & \rightarrow \operatorname{Inv}(E) \\ & x & \mapsto x^{-1} \end{array} \right|$$

est C^1 et que $df(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$ pour tout $x \in \operatorname{Inv}(E)$ et $h \in E$. Grâce au TFC, on en déduit que $f \in C^2(\operatorname{Inv}(E), E)$ et

$$(d^2 f(x).k).h = x^{-1}kx^{-1}hx^{-1} + x^{-1}hx^{-1}kx^{-1}, \quad \forall x \in \operatorname{Inv}(E), h, k \in E.$$

Proposition 71 Si f est 2 fois différentiable en a alors $d^2 f(a)$ est une forme bilinéaire continue symétrique $E \times E \rightarrow F$

Preuve : Seule la symétrie est à établir. Montrons que

$$\left(d^2 f(a).h\right).h' = \left(d^2 f(a).h'\right).h, \quad \forall h, h' \in E. \quad (11.17)$$

Pour cela, on va approcher, à ϵ -près, chacun de ces termes par une quantité symétrique en (h, h') .

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $B_E(a, \delta) \subset \Omega$ et

$$\|df(a+s) - df(a) - d^2 f(a).s\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \epsilon \|s\|_E, \quad \forall s \in B_E(0, \delta).$$

Soient $h, h' \in B_E(0, \delta/2)$ On a

$$f(a+h+h') - f(a+h) - f(a+h') + f(a) - \left(d^2 f(a).h'\right).h = G(1) - G(0)$$

où

$$\begin{cases} G : [0, 1] \rightarrow F \\ t \mapsto f(a+th+h') - f(a+th) - t\left(d^2 f(a).h'\right).h \end{cases}$$

De plus (TFC)

$$\begin{aligned} G'(t) &= df(a+th+h').h - df(a+th).h - \left(d^2 f(a).h'\right).h \\ &= \left(df(a+th+h') - df(a) - d^2 f(a).(th+h')\right).h \\ &\quad - \left(df(a+th) - df(a) - d^2 f(a).(th)\right).h \end{aligned}$$

donc

$$\|G'(t)\|_F \leq \epsilon \left(\|th+h'\|_E + \|th\|_E\right) \|h\|_E \leq 2\epsilon \left(\|h\|_E + \|h'\|_E\right)^2.$$

L'inégalité des accroissements finis justifie donc que

$$\left\|f(a+h+h') - f(a+h) - f(a+h') + f(a) - \left(d^2 f(a).h'\right).h\right\|_F \leq 2\epsilon \left(\|h\|_E + \|h'\|_E\right)^2, \quad \forall h, h' \in B_E(0, \delta/2).$$

En échangeant h et h' dans la formule ci-dessus, on obtient

$$\left\|f(a+h+h') - f(a+h) - f(a+h') + f(a) - \left(d^2 f(a).h\right).h'\right\|_F \leq 2\epsilon \left(\|h\|_E + \|h'\|_E\right)^2, \quad \forall h, h' \in B_E(0, \delta/2).$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\left\|\left(d^2 f(a).h'\right).h - \left(d^2 f(a).h\right).h'\right\|_F \leq 4\epsilon \left(\|h\|_E + \|h'\|_E\right)^2, \quad \forall h, h' \in B_E(0, \delta/2).$$

Si $h, h' \in E$, pour $\eta > 0$ assez petit, $\eta h, \eta h' \in B_E(0, \delta/2)$ et donc

$$\begin{aligned} \left\|\left(d^2 f(a).h'\right).h - \left(d^2 f(a).h\right).h'\right\|_F &= \frac{1}{\eta^2} \left\|\left(d^2 f(a).\eta h'\right).\eta h - \left(d^2 f(a).\eta h\right).\eta h'\right\|_F \quad (\text{linéarité+axiome N2}) \\ &\leq \frac{4\epsilon}{\eta^2} \left(\|\eta h\|_E + \|\eta h'\|_E\right)^2 \\ &\leq 4\epsilon \left(\|h\|_E + \|h'\|_E\right)^2. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\left\|\left(d^2 f(a).h'\right).h - \left(d^2 f(a).h\right).h'\right\|_F \leq 4\epsilon \left(\|h\|_E + \|h'\|_E\right)^2, \quad \forall h, h' \in E.$$

Pour $h, h' \in E$ fixés, on fait $[\epsilon \rightarrow 0]$ dans la relation précédente, ce qui prouve (11.17). $\square$

Proposition 72 Si $E = E_1 \times \dots \times E_n$ et si f est 2 fois différentiable en a alors f admet des différentielles partielles d'ordre 2 en a et

$$d^2 f(a).(h, h') = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a).(h_j, h'_k), \quad \forall h, h' \in E.$$

Remarque 31 On récupère ainsi le Lemme de Schwarz mais sous des hypothèses plus fortes.

Application : On a vu dans l'exercice type 3 une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dont les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales. En conséquence, cette fonction n'est pas 2 fois différentiable en $(0, 0)$.

Preuve : On a déjà vu que

$$df(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \circ p_j \quad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F) \quad (11.18)$$

où

$$\left| \begin{array}{ccc} p_j : & E & \rightarrow E_j \\ & h & \mapsto h_j \end{array} \right|$$

Dans cette formule le symbole $\circ$ est la composition de $p_j : E \rightarrow E_j$ avec $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) : E_j \rightarrow F$, qui fournit bien un élément de $\mathcal{L}_c(E, F)$, l'espace où vit $df(a)$.

Rappelons que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \subset E \rightarrow \mathcal{L}_c(E_j, F)$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) \in \mathcal{L}_c(E_k, \mathcal{L}_c(E_j, F))$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k \in \mathcal{L}_c(E_j, F), \quad \forall h_k \in E_k.$$

On déduit de (11.18) que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et $h_k \in E_k$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [df](a).h_k = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k \right) \circ p_j \quad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F).$$

Dans cette formule, le symbole $\circ$ est donc la composition de $p_j : E \rightarrow E_j$ avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k : E_j \rightarrow F$. En appliquant la formule (11.18) à df , on obtient

$$d^2 f(a).h = d(df)(a).h = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [df](a).h_k \quad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F).$$

On déduit de ce qui précède que

$$d^2 f(a).h = \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k \right) \circ p_j \quad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F),$$

ou encore

$$d^2 f(a).(h, h') = \left(d^2 f(a).h \right).h' = \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k \right).h'_j \quad \text{dans } F, \forall h, h' \in E.$$

d'où le résultat. □

11.3.2 Différentielle d'ordre supérieur

Definition 45 On définit par récurrence la différentielle k -ième : $f : \Omega \rightarrow F$ est k fois **différentiable en a** si f est $(k-1)$ -fois différentiable sur un voisinage ouvert U de a dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$ et que $d^{k-1}f : U \rightarrow \mathcal{L}_c(E^{k-1}; F)$ est différentiable en a . On note alors $d^k f(a)$ la différentielle de cette application en a , appelée **différentielle d'ordre k de f en a** , elle s'identifie à une application k -linéaire $E^k \rightarrow F$.

On définit par récurrence les espaces $C^k(\Omega, F) : f \in C^k(\Omega, F)$ si f est différentiable et $df \in C^{k-1}(\Omega, \mathcal{L}_c(E, F))$.

$f \in C^\infty(\Omega, F)$ si $f \in C^k(\Omega, F)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 73 Si f est k -fois différentiable en a alors $d^k f(a)$ est une application k -linéaire symétrique $E^k \rightarrow F$.

Preuve : Il s'agit de montrer que

$$d^k f(a).(h_1, \dots, h_k) = d^k f(a).(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}), \quad \forall (h_1, \dots, h_k) \in E^k, \forall \sigma \text{ permutation de } \{1, \dots, k\}.$$

Il suffit de le montrer lorsque σ est une transposition (toute permutation est une composition de transpositions). Montrons que

$$d^k f(a).(h_1, h_2, \dots, h_k) = d^k f(a).(h_2, h_1, \dots, h_k), \quad \forall (h_1, \dots, h_k) \in E^k.$$

Cela résulte de la symétrie pour la différentielle seconde :

$$\begin{aligned} d^k f(a).(h_1, h_2, \dots, h_k) &= d^2 \left(d^{k-2} f(a).(h_3, \dots, h_k) \right).(h_1, h_2) \\ &= d^2 \left(d^{k-2} f(a).(h_3, \dots, h_k) \right).(h_2, h_1) \\ &= df(a).(h_2, h_1, \dots, h_k). \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 74 Supposons que $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Alors $f \in C^n(\Omega, F)$ ssi f admet des différentielles partielles jusqu'à l'ordre n et que celles-ci sont continues sur Ω .

Proposition 75 1. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(\Omega, F)$ est un *ev*.

2. Les applications affines continues sont C^∞ .

3. Les applications n -linéaires continues sont C^∞ .

4. La composée (bien définie) d'applications $C^k(\Omega, F)$ est $C^k(\Omega, F)$.

5. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un algèbre normée, alors le produit d'applications $C^k(\Omega, F)$ est $C^k(\Omega, F)$.

6. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est une algèbre de Banach, alors $f : x \in \text{Inv}(E) \mapsto x^{-1}$ est C^∞ .

7. Si f est un C^1 -difféomorphisme de Ω_E sur Ω_F et que $f \in C^k(\Omega_E, F)$ alors $f^{-1} \in C^k(\Omega_F, E)$.

Preuve :

1. trivial

2. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et continue alors sa différentielle $df : E \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$ est constante en f donc $d^2 f = 0$.

3. Si $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ est une application bilinéaire, alors $df : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire. D'après 2., df est C^∞ donc f est C^∞ . De plus $d^3 f = 0$.

Si $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est une application n -linéaire, alors $d^{n+1} f = 0$ (Exercice : le démontrer) donc f est C^∞ .

4. Récurrence sur k + TFC

5. Récurrence sur k + formule de la différentielle d'un produit

6. On a vu que $df(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$ et

$$d^2f(x).(h', h) = x^{-1}h'x^{-1}hx^{-1} + x^{-1}hx^{-1}h'x^{-1}.$$

On montre par récurrence sur n que

$$d^n f(x).(h_1, \dots, h_n) = (-1)^n \sum_{\sigma \in S_n} x^{-1}h_{\sigma(1)}x^{-1}h_{\sigma(2)}x^{-1} \dots x^{-1}h_{\sigma(n)}x^{-1}.$$

7. Récurrence sur k + $d(f^{-1})(b) = df(a)^{-1}$ + continuité de l'inversion. □

11.4 Formules de Taylor

11.4.1 Taylor Young

Théorème 42 (Formule de Taylor Young) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, $a \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : \Omega \rightarrow F$. Si f est n fois différentiable en a alors

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \frac{1}{2!}d^2f(a).(h, h) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(a).(h, \dots, h) + o_{\|h\|_E \rightarrow 0}(\|h\|_E^n).$$

Preuve : La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, comme quand $E = \mathbb{R}$. Il faut seulement veiller à utiliser l'IAF au lieu de la formulation intégrale sur $H(h)$, car on n'a pas d'hypothèse de complétude sur $(F, \|\cdot\|_F)$.

Pour $n = 0$, la formule correspond à la définition de la différentiabilité en a . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'énoncé vrai pour $(n-1)$ et montrons le pour n . Il s'agit de montrer que

$$H(h) := f(a+h) - f(a) - df(a).h - \frac{1}{2!}d^2f(a).(h, h) - \dots - \frac{1}{n!}d^n f(a).(h, \dots, h) = o_{\|h\|_E \rightarrow 0}(\|h\|_E^n).$$

Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$. Alors H est différentiable sur $B(0, r)$ et

$$dH(h).h' = df(a+h).h' - df(a).h' - d^2f(a).(h, h') - \dots - \frac{1}{(n-1)!}d^n f(a).(h, \dots, h, h')$$

Soit $\epsilon > 0$. L'hypothèse de récurrence justifie l'existence de $\delta \in (0, r)$ tel que

$$\|dH(h)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq \epsilon \|h\|_E^{n-1}, \quad \forall h \in B_E(0, \delta).$$

Soit $h \in B_E(0, \delta)$. D'après l'IAF, on a

$$\|H(h)\|_F = \|H(h) - H(0)\|_F \leq \|h\|_E \sup\{\|dH(z)\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}; z \in [0, h]\} \leq \epsilon \|h\|_E^n. \square$$

Exemple : Pour une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = & f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x_1}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b) \\ & + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a, b) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a, b) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a, b) + o(\|(h, k)\|^2) \end{aligned}$$

11.4.2 Taylor avec reste intégral

Théorème 43 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ un **Banach**. Si $f \in C^k(\Omega, F)$ et $[a, a+h] \subset \Omega$ alors

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \frac{1}{2!}d^2f(a).(h, h) + \dots + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1}f(a).(h, \dots, h) \\ + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}d^k f(a+th).(h, \dots, h)dt.$$

Dans cet énoncé, on manipule une intégrale de Riemann pour les fonctions continues $[0, 1] \rightarrow F$ (voir Section 10.7). Lorsque $F = \mathbb{R}^n$, ce peut être l'intégrale de Lebesgue.

Exercice : Soit $f \in C^2(E, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. Montrer qu'il existe une application continue

$$\left| \begin{array}{ccc} B : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathcal{L}_c(E, E; \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & B_x \end{array} \right.$$

telle que $f(x) = B_x(x, x)$ pour tout $x \in E$.

Ceci est utile, par exemple, pour démontrer le Lemme de Morse [cf Rouviere Ex 105 page 305]

11.4.3 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 44 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, Ω un ouvert de E et $(F, \|\cdot\|_F)$ un **Banach**. Si $f \in C^{n+1}(\Omega, F)$ et $[a, a+h] \subset \Omega$ alors

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}d^k f(a).(h, \dots, h) \right\|_F \leq \frac{\|h\|_E^{n+1}}{(n+1)!} \sup \left\{ \|d^{n+1} f(z)\|_{\mathcal{L}_c(E^n, F)} ; z \in [a, a+h] \right\}.$$

Pour le démontrer, on majore le reste dans la formule de Taylor avec reste intégral.

11.5 En dimension finie

Le but de cette section est de montrer que les précédentes définitions permettent de retrouver les objets familiers dans le cas d'applications entre espaces de dimension finie. On considère donc $E = \mathbb{R}^n$, muni de la norme euclidienne, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$. Lorsque $F = \mathbb{R}^q$, on note f_k les composantes de f :

$$\left| \begin{array}{ccc} f : \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^q \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_q(x)) \end{array} \right.$$

11.5.1 Reformulation des précédents résultats

Reformulons les résultats sur les différentielles partielles d'ordre 1 lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un evn. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F) \\ y & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & F \\ t & \mapsto & ty \end{array} \right) \end{array} \right.$$

est une isométrie bijective $(F, \|\cdot\|_F) \rightarrow (\mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F)})$ (Exercice : le démontrer). Elle permet d'identifier F et $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F)$. Les différentielles partielles de f sont appelées **dérivées partielles** (parce qu'on dérive par rapport à la variable réelle x_j)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t} \in F$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \rightarrow F$$

On récupère ainsi l'énoncé familier suivant.

Corollaire 11 *Supposons que $E = \mathbb{R}^n$. Il y a équivalence entre*

1. $f \in C^1(\Omega, F)$
2. f admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables x_j sur Ω **ET** ces dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues de $(\Omega, \|\cdot\|) \rightarrow F$.

Cet énoncé peut être utilisé pour étudier une fonction f définie par une intégrale à paramètre :

$$f(x) = \int_{\Lambda} g(x, \lambda) d\lambda, \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

- on utilise le théorème de dérivation sous l'intégrale pour calculer les dérivées partielles de f (dérivée par rapport à une variable réelle),
- on montre que les dérivées partielles sont continues sur Ω ,
- on en déduit que f est C^1 et on a la formule explicite de sa différentielle.

Reformulons les résultats sur les différentielles partielles d'ordre 2 dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^2$ cad $n = 2$ et $E_j = \mathbb{R}$ pour $j = 1, 2$. On a

$$\left| \begin{array}{ll} f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow F \\ (x_1, x_2) & \mapsto f(x_1, x_2) \end{array} \right|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in F \quad \left(= \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow F$$

Ainsi, les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont des applications de $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow F$, exactement comme f . En itérant, on en déduit que les dérivées partielles à tout ordre de f sont des applications de $\Omega \rightarrow F$ (lorsqu'elle existent). Le Lemme de Schwartz se reformule donc de la façon suivante.

Théorème 45 *Supposons que $E = \mathbb{R}^n$. Si les applications*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} : \Omega \rightarrow F$$

existent et sont continues alors elles sont égales.

11.5.2 Matrice Jacobienne et changement de variables

Définition 46 *Si $F = \mathbb{R}^q$ et f est différentiable en a , alors la matrice Jacobienne de f en a est la matrice $q \times n$ de $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^q$*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le **Jacobien de f en a** (il intervient dans la formule de CVAR)

On déduit du TFC que, sous les mêmes hypothèses,

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a).$$

Definition 47 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. f est C^1 -**difféomorphisme** si

- $V := f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
- f est un bijection de Ω sur V ,
- $f \in C^1(\Omega, V)$ et $f^{-1} \in C^1(V, \Omega)$.

Proposition 76 Si $f : \Omega \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme, alors

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = J_f(x)^{-1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Si f est connu explicitement, on a ainsi accès aux dérivées partielles de f^{-1} sans expliciter f^{-1} .

Exercice : Considérons le changement de variables

$$\left| \begin{array}{ll} \Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) & \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus [\mathbb{R}_- \times \{0\}] \\ (r, \theta) & \mapsto (x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que Φ est un C^1 -difféomorphisme de $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus [\mathbb{R}_- \times \{0\}]$.
2. Si $f(x, y) = g(r, \theta)$, donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et g .
3. Si $f(x, y) = h(x, \theta)$, comparer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}$. Expliquer la différence.

(Corrigé : Ex 19, Rouvière, page 64)

Exercice : Interprétation du Jacobien [Rouvière, Ex 28, page 80]

Exercice : Interprétation du rotationnel [Rouvière, Ex 30, page 85]

11.5.3 Gradient

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs scalaires et différentiable en a , alors

$$df(a).h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

donc

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ telle que $df(a) \neq 0$. Montrer que $\nabla f(a)$ est la direction de plus grande pente de f en a . (Corrigé : Rouvière, Ex 26 page 76)

11.5.4 Hessienne

Definition 48 Si f est à valeurs scalaires ($F = \mathbb{R}$) et 2-fois différentiable en a , alors **la matrice Hessienne de f en a** est la matrice $n \times n$ de la forme bilinéaire symétrique continue $d^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On déduit de la formule

$$d^2 f(a).(h, h') = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).(h_i, h'_j)$$

que

$$\text{Hess}(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

et donc

$$d^2 f(a).(h, h') = h^T \text{Hess}(f)(a) h', \quad \forall h, h' \in \mathbb{R}^n.$$

11.6 Optimisation et convexité

11.6.1 Problèmes d'extrémum

Definition 49 *a est un **point critique** de $f : \Omega \rightarrow F$ si f est différentiable en a et $df(a) = 0$.*

Proposition 77 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Si f est différentiable en a et admet un extremum local en a alors a est point critique de f : $df(a) = 0$.*
2. *Si $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet un minimum local en a alors a est point critique de f , $df(a) = 0$, et $d^2 f(a) \geq 0$ (forme quadratique positive).*
3. *Si $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet un point critique en a et s'il existe $h_+, h_- \in E$ tels que $d^2 f(a).(h_+, h_+) > 0$ et $d^2 f(a).(h_-, h_-) < 0$ alors f n'admet pas d'extrémum en a .*
4. *Si E est de dimension finie, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet un point critique en a et $d^2 f(a) > 0$ (forme quadratique définie positive) alors a est un minimum local de f .*

Preuve : Exercice. Indication : utiliser $u : t \in (-1, 1) \mapsto f(a + th)$. □

11.6.2 Applications convexes

Definition 50 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et Ω un ouvert **convexe** de $(E, \|\cdot\|)$. Une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in \Omega, \lambda \in [0, 1].$$

*Elle est **strictement convexe** si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x \neq y \in \Omega, \lambda \in (0, 1).$$

L'énoncé suivant permet de ramener l'étude des applications convexes (de plusieurs variables) à celle des fonctions convexes de la variable réelle.

Proposition 78 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, Ω une partie **convexe** de $(E, \|\cdot\|)$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. EQU :*

1. *f est convexe sur Ω .*
2. *Pour tous $x, y \in \Omega$, la fonction auxiliaire*

$$\left| \begin{array}{ll} u : [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f[x + t(y - x)] \end{array} \right.$$

est convexe.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 : Soient $t_1, t_2, \lambda \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} u[\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2] &= f\left(x + [\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2](y - x)\right) \\ &= f\left(\lambda[x + t_1(y - x)] + (1 - \lambda)[x + t_2(y - x)]\right) \\ &\leq \lambda f\left(x + t_1(y - x)\right) + (1 - \lambda)f\left(x + t_2(y - x)\right) \text{ par convexité de } f \\ &\leq \lambda u(t_1) + (1 - \lambda)u(t_2). \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 1 : Soient $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} f\left(\lambda x + (1 - \lambda)y\right) &= f\left(x + (1 - \lambda)(y - x)\right) \\ &= u(1 - \lambda) \\ &= u\left(\lambda * 0 + (1 - \lambda) * 1\right) \\ &\leq \lambda u(0) + (1 - \lambda)u(1) \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \square \end{aligned}$$

On déduit alors les propriétés suivantes de la caractérisation des fonctions convexes de la variable réelle établie au chapitre précédent.

Proposition 79 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et Ω un ouvert **convexe** de $(E, \|\cdot\|)$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est différentiable sur Ω alors EQU :
 - f est convexe sur Ω
 - $f(y) \geq f(x) + df(x).(y - x)$ pour tout $x, y \in \Omega$.
2. Si f est 2 fois différentiable sur Ω , alors EQU :
 - f est convexe sur Ω
 - $d^2 f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Preuve : Exercice.

Remarque 32 On a utilisé le point 1 dans le chapitre sur la topologie faible des Hilbert, dans la section d'application à l'optimisation.

Exercice : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $F := \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}); f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \beta\}$.

1. Montrer que φ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant l'inégalité de convexité

$$\varphi(u) \geq \varphi(\beta) + \varphi'(\beta)(u - \beta), \quad u \in \mathbb{R},$$

montrer que

$$\min \left\{ \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx; f \in F \right\}$$

est atteint par la seule fonction affine qui appartient à F .

(Corrigé : Rouvière, Ex 41, page 117).

11.6.3 Optimisation des applications convexes

Proposition 80 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, Ω un ouvert convexe de $(E, \|\cdot\|)$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est convexe sur Ω , différentiable sur Ω et $c \in \Omega$ alors EQU :

(a) $f(c) = \min\{f(x); x \in \Omega\}$: c est un minimum de f

(b) $df(c) = 0$: c est point critique de f .

2. Si f est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum sur Ω .

Preuve :

1. (a) $\Rightarrow$ (b) Un extremum intérieur est tjs un point critique (même sans hypothèse de convexité).

(b) $\Rightarrow$ (a) Par convexité, on obtient $f(x) \geq f(c) + df(c).(x - c) = f(c)$ pour tout $x \in \Omega$.

2. Par l'absurde, supposons f minimale en 2 points distincts $u_1 \neq u_2 \in \Omega$. Alors

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) < \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2) = \min_{\Omega}(f)$$

ce qui fournit une contradiction. □

11.6.4 Exercices-type

Exercice 1 : Déterminer la nature des points critiques de

$$\left| \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto x^2 + y^2 + z^3 e^x \end{array} \right.$$

Un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est point critique de f ssi

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + z^3 e^x \\ 2y \\ 3z^2 e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(0, 0, 0)$ est l'unique point critique de f . On a

$$\text{Hess}(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 + z^3 e^x & 0 & 3z^2 e^x \\ 0 & 2 & 0 \\ 3z^2 e^x & 0 & 6ze^x \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \text{Hess}(f)(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La Hessienne de f en $(0, 0, 0)$ est ≥ 0 mais elle n'est pas > 0 donc on ne peut pas conclure. En fait, $(0, 0, 0)$ n'est pas un extrémum local de f car $f(0, 0, 0) = 0$ et $f(0, 0, z) = z^3$ peut être > 0 et < 0

Exercice 2 : Déterminer la nature des points critiques de

$$\left| \begin{array}{ccc} g : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto xy + yz + xz \end{array} \right.$$

Un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est point critique de g ssi

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(0, 0, 0)$ est l'unique point critique de g . On a $g(0, 0, 0) = 0$ et $g(x, y, 0) = xy$, qui peut être > 0 ou < 0 , donc $(0, 0, 0)$ n'est pas un extrémum local de g .

Exercice 3 : Déterminer la nature des points critiques de

$$\left| \begin{array}{lll} h : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto (x+y)^2 + \sin(xz) + \frac{z^2}{2} \end{array} \right.$$

Un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est point critique de h ssi

$$\nabla h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x+y) + z \cos(xz) \\ 2(x+y) \\ x \cos(xz) + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(0, 0, 0)$ est l'unique point critique de g . On a

$$\text{Hess}(h)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 - z^2 \sin(xz) & 2 \cos(xz) - xz \sin(xz) \\ 2 & 2 \cos(xz) - xz \sin(xz) \\ \cos(xz) - xz \sin(xz) & 0 & 1 - x^2 \sin(xz) \end{pmatrix}$$

donc

$$\text{Hess}(f)(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique associée est (réduction de Gauss)

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz = 2 \left(x + y + \frac{z}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (z - 2y)^2 - 2y^2,$$

sa signature est $(+, +, -)$. En conséquence $(0, 0, 0)$ n'est pas un extrémum local. En effet, si $X \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur propre de $\text{Hess}(f)(0, 0, 0)$ associé à une valeur propre λ alors (Taylor Young)

$$f(tX) = f(0) + \lambda \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2).$$

Donc

- si $\lambda > 0$ alors $f(tX) > 0$ pour t assez petit,
- si $\lambda < 0$ alors $f(tX) < 0$ pour t assez petit.

On conclut en remarquant que $\text{Hess}(f)(0, 0, 0)$ admet 2 vap > 0 et 1 vap < 0 .

Chapitre 12

Inversion locale et fonctions implicites

12.1 Théorème d'inversion locale

12.1.1 C^1 -difféomorphisme

Définition 51 (C^1 -difféomorphisme) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, V un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, W un ouvert de $(F, \|\cdot\|_F)$. Une application $f : V \rightarrow W$ est un C^1 -difféomorphisme de V sur W si

- f est une bijection de V sur W ,
- f est C^1 sur V ,
- f^{-1} est C^1 sur W .

Il est à noter que, si f est un C^1 -difféomorphisme de V sur W alors $df(x)$ est une bijection de E sur F pour tout $x \in V$. En effet, en appliquant le TFC à l'égalité $Id = f^{-1} \circ f$ on obtient $Id = df^{-1}(f(x)) \circ df(x)$, donc $df(x)$ est une bijection de E sur F et $df(x)^{-1} = df^{-1}(f(x))$. Le TIL montrera que la réciproque est vraie, mais uniquement **localement**.

Exercice : On considère l'application

$$\left| \begin{array}{lll} f : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto (x + y, xy) \end{array} \right.$$

Expliciter un ouvert connexe maximal U tel que f soit un C^1 -difféomorphisme de U sur $f(U)$.
(Corrigé : Rouvière Ex 61 page 190)

12.1.2 Énoncé et preuve du TIL

Théorème 46 (TIL) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des **Banach**, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, F)$ telle que $df(a)$ soit une bijection de E sur F . Alors il existe

- un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$ et
- un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$

tels que f soit un C^1 -difféomorphisme de V sur W .

Si, de plus, $f \in C^k(\Omega, F)$ alors $f^{-1} \in C^k(W, V)$.

Corollaire 12 (TIL en dimension finie) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telle que le Jacobien de f en a est non nul :

$$\det[J(f)(a)] \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$ et un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ tel que f soit un C^1 -difféomorphisme de V sur W .

Preuve : Quitte à traduire, on peut supposer que $a = 0$ et $f(a) = 0$. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, $df(0)^{-1}$ est continue $F \rightarrow E$ donc $C := \|df(0)^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(F,E)}$ est bien défini. Comme $f \in C^1(\Omega, F)$ alors il existe $r > 0$ tel que $B_E(0, r) \subset \Omega$ et

$$\|f(x) - f(0) - df(0).x\|_F \leq \frac{1}{2C}\|x\|_E, \quad \forall x \in \overline{B}_E(0, r), \quad (12.1)$$

$$\|df(x) - df(0)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \frac{1}{2C}, \quad \forall x \in \overline{B}_E(0, r). \quad (12.2)$$

Soit $W := B_F(0, \frac{r}{2C})$.

Etape 1 : Montrons que $\forall y \in W, \exists! x \in B_E(0, r)$ tel que $f(x) = y$. Soit $y \in W$. On va appliquer le théorème du point fixe de Banach à l'application

$$\left| \begin{array}{ll} \phi_y : \overline{B}_E(0, r) & \rightarrow E \\ x & \mapsto x - df(0)^{-1} \cdot [f(x) - y] = df(0)^{-1} [f(x) - f(0) - df(0).x - y] \end{array} \right.$$

- $\overline{B}_E(0, r)$, muni de $\|\cdot\|_E$ est un espace métrique complet (fermé dans un complet).
- ϕ_y envoie $\overline{B}_E(0, r)$ dans $\overline{B}_E(0, r)$. En effet, pour tout $x \in \overline{B}_E(0, r)$,

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x)\|_E &\leq C \left(\|f(x) - f(0) - df(0).x\|_F + \|y\|_F \right) \\ &\leq C \left(\frac{1}{2C}\|x\|_E + \frac{r}{2C} \right) \text{ par (12.1)} \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

- ϕ_y est contractante sur $\overline{B}_E(0, r)$. En effet, pour tout $x \in \overline{B}_E(0, r)$

$$\|d\phi_y(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} = \left\| df(0)^{-1} \circ (df(0) - df(x)) \right\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq C \frac{1}{2C} = \frac{1}{2} \quad \text{par (12.2)}$$

donc l'IAF justifie que

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\|_E \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_E, \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B}_E(0, r).$$

En conséquence, il existe un unique $x \in \overline{B}_E(0, r)$ tel que $y = f(x)$.

En fait, x appartient à la boule **ouverte** $B_E(0, r)$ car l'argument de point fixe précédent fonctionne encore quand on remplace $\overline{B}_E(0, r)$ par $\overline{B}_E(0, r')$ avec $r' = 2C\|y\|_F < r$ (cette boule est bien stable par ϕ_y car $\frac{r'}{2} + C\|y\|_F = r'$). Ainsi $x \in \overline{B}_E(0, r') \subset B_E(0, r)$, ce qui conclut l'Etape 1.

Attention, on ne peut pas dire que f est une bijection de $B_E(0, r)$ sur W car on n'a pas forcément $f(B_E(0, r)) \subset W$. C'est pourquoi on poursuit avec un ouvert V possiblement plus petit que $B_E(0, r)$.

Soit $V := B_E(0, r) \cap f^{-1}(W)$. Alors V est un voisinage ouvert de 0 dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$ et f est une bijection C^1 de V sur W .

Etape 2 : Montrons que $f^{-1} : W \rightarrow V$ est continue. Soient $y_1, y_2 \in W$ et $x_j = f^{-1}(y_j) \in V$ pour $j = 1, 2$. On a

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|_E &= \|\phi_{y_1}(x_1) - \phi_{y_2}(x_2)\|_E \\ &= \|df(0)^{-1} \cdot [f(x_1) - f(x_2) - df(0).(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)]\|_E \\ &\leq C \left(\left\| \int_0^1 [df(x_2 + t(x_1 - x_2)) - df(0)] \cdot (x_1 - x_2) dt \right\|_F + \|y_1 - y_2\|_F \right) \\ &\leq C \left(\frac{1}{2C}\|x_1 - x_2\|_E + \|y_1 - y_2\|_F \right) \text{ par (12.2)} \end{aligned}$$

(notez que la formulation intégrale est légitime car F est complet : on manipule l'intégrale de Riemann des fonctions $(0, 1) \rightarrow F$) donc

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\|_E = \|x_1 - x_2\|_E \leq 2C\|y_1 - y_2\|_F.$$

Ceci montre que $f^{-1} : W \rightarrow V$ est $2C$ -lipschitzienne, donc continue.

Etape 3 : Conclusion. Ainsi f est un homéomorphisme de V sur W et est différentiable sur V donc f^{-1} est différentiable sur W et

$$df^{-1}(y) = df\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}, \quad \forall y \in W$$

(voir la section 'Différentiabilité et inversion' du chapitre précédent). On déduit de cette formule que $f^{-1} \in C^1(W, V)$.

Si, de plus, $f \in C^k(\Omega, F)$ alors $df \in C^{k-1}(\Omega, \mathcal{L}_c(E, F))$ donc (formule précédente + TFC) $df^{-1} \in C^{k-1}(W, \mathcal{L}_c(F, E))$ cad $f^{-1} \in C^k(W, V)$. $\square$

Exemples et contre-exemples :

– **La conclusion est uniquement locale.** En effet, considérons $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et l'application

$$\left| \begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{array} \right|$$

Alors $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et son Jacobien est non nul en tout point de Ω

$$\text{Jac}(f)(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0, \forall (x, y) \in \Omega.$$

Par le TIL, f est un C^1 -difféomorphisme local au voisinage de tout point de Ω . Mais f n'est pas un C^1 -difféomorphisme global de Ω sur $\mathbb{R}^2$, car elle n'est pas injective sur Ω : $f(x, y) = f(-x, -y)$.

Exercice : Expliciter des ouverts V et W aussi grand que possible, tels que $f : V \rightarrow W$ soit un C^1 -difféomorphisme de V sur W .

(Corrigé Rouvière Ex 62 page 192-193)

– **L'hypothèse C^1 est nécessaire.** En effet, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement, $f \in C^1(\mathbb{R}^*)$. Comme $f(x) = x + o(x)$ quand $[x \rightarrow 0]$ alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ est bien non nul. Cependant, f n'est bijective sur aucun voisinage ouvert de 0, car elle n'y est pas monotone : si k est un entier pair alors (faire le calcul)

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} < f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} < f\left(\frac{1}{k+1/2}\right).$$

Le problème vient de ce que f n'est pas C^1 au voisinage de 0. En effet, pour $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

diverge quand $[x \rightarrow 0]$.

- **L'hypothèse de complétude est nécessaire.** En effet considérons $E = (C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $F = (C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $\Theta = Id$. Alors Θ est une application linéaire et continue de $E \rightarrow F$ car $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$. Elle est donc $C^1(E, F)$ et $d\Theta(f) = \Theta$ pour tout $f \in E$. En particulier, $d\Theta(0)$ est une bijection de E sur F . Mais Θ n'est pas un C^1 -diffeomorphisme au voisinage de 0 car $\Theta^{-1} = Id : F \rightarrow E$ n'est même pas continue : (il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_\infty \leq C\|\cdot\|_1$ sur F).

Il s'agit du même contre-exemple que pour le thm d'isomorphisme de Banach.

Exercice : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^k$, $a \in \Omega$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ telle que $df(a)$ soit injective (de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^m$). Montrer qu'il existe un voisinage ouvert Ω_1 de a dans Ω tel que

- f soit injective sur Ω_1 ,
- $df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega_1$.

12.1.3 Exercices-type

Exercice 1 : Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ des Banach et $f : \Omega \rightarrow F$ telle que $df(x)$ soit une bijection de E sur F pour tout $x \in \Omega$. Montrer que $f(\Omega)$ est un ouvert de $(F, \|\cdot\|_F)$.

CORRECTION : Soit $b \in f(\Omega)$. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert W de b dans F tel que $W \subset f(\Omega)$. Il existe $a \in \Omega$ tel que $b = f(a)$. Comme $df(a)$ est une bijection de E sur F , alors, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$, un voisinage ouvert W de b dans $(F, \|\cdot\|_F)$, tels que f soit un C^1 -diffeomorphisme de V sur W . En particulier, W est contenu dans l'image de f .

Exercice 2 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach. Montrer que l'exponentielle est un difféomorphisme local de E au voisinage de 0.

CORRECTION : $(E, \|\cdot\|)$ est complet, $\exp \in C^1(E, E)$ (déjà vu) et $d(\exp)(0) = Id$ est une bijection de E sur E . D'après le TIL, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et un voisinage ouvert W de 1 dans $(E, \|\cdot\|_E)$ tels que $\exp$ soit un C^1 -diffeomorphisme de V sur W .

On peut montrer que l'inverse local de $\exp$ est défini par la série (absolument convergente, donc convergente, par complétude de $(E, \|\cdot\|_E)$)

$$\ln(1 + Y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{Y^n}{n}, \quad \forall Y \in B_E(0, 1).$$

Exercice : Montrer, par des manipulations de séries, que $\exp[\ln(1 + Y)] = \ln[\exp(1 + Y)] = 1 + Y$ pour Y assez petit.

Exercice 3 : Réduction des formes quadratiques. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible et on considère

$$\left| \begin{array}{ccc} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto M^T A_0 M \end{array} \right.$$

1. Montrer que $d\Phi(I_n)$ est surjective. Déterminer son noyau.
2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ telle que $A = \psi(A)^T A_0 \psi(A)$ pour tout $A \in V$.

Ceci montre que toute forme quadratique, suffisamment proche d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente, cad s'y ramène après un changement de base. Ceci est utile pour démontrer le Lemme de Morse, dans l'exercice suivant.

CORRECTION :

1. On a $d\tau(I_n).H = {}^tHA + AH$ donc $\text{Ker}(d\tau(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AH \text{ est antisymétrique}\}$. Définissons $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AH \text{ est symétrique}\}$. Alors $I_n \in F$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(d\tau(I_n)) \oplus F$. Ainsi $d(\tau|_F)(I_n) : F \rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ est injective donc (égalité des dimensions) inversible.
2. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F et un voisinage ouvert V de $A = \tau(I_n)$ dans $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ tels que τ réalise un C^1 -difféomorphisme de U sur V . Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut supposer que $U \subset F \cap GL_n(\mathbb{R})$ (quitte à réduire U). Ainsi $\psi := \tau^{-1}$ donne la conclusion.

Exercice 4 : Lemme de Morse Le but de cet exercice est de démontrer le lemme suivant.

Lemme de Morse : Soit Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, $f \in C^3(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ et $A := d^2f(0) \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe des voisinages ouverts Ω', Ω'' de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1 difféomorphisme $h : \Omega' \rightarrow \Omega''$ tels que $f \circ h(x) = \frac{1}{2}{}^t x A x, \forall x \in \Omega'$.

1. Montrer qu'il existe $S \in C^1(\Omega, \text{Sym}_n(\mathbb{R}))$ telle que $S(0) = A$ et $f(x) = \frac{1}{2}{}^t x S(x)x, \forall x \in \Omega$.
2. Conclure, en utilisant l'exercice précédent.

CORRECTION

1. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(x) = f(0) + df(0).x + \int_0^1 (1-t)d^2f(tx).(x, x)dt, \forall x \in \Omega.$$

On obtient donc la conclusion avec

$$S(x) := 2 \int_0^1 (1-t)d^2f(tx)dt.$$

2. Par continuité de S , il existe un voisinage ouvert Ω^* de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $S(x) \in V, \forall x \in \Omega^*$. Pour $x \in \Omega^*$, on définit $k(x) := \psi(S(x))x$. D'après la question précédente, on a $f(x) = \frac{1}{2}{}^t k(x) A k(x)$ pour tout $x \in \Omega^*$. De plus, k est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ localement en zéro, puisque $d(k)(0) = I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ (théorème d'inversion locale). Donc $h := k^{-1}$ fournit la conclusion du Lemme de Morse.

Exercice 5 : Soit $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ non constant et $K := \{P(x); P'(x) = 0\}$.

1. Montrer, en utilisant le théorème d'inversion locale, que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \nu : & \mathbb{C} - K & \rightarrow \mathbb{N} \\ & z & \mapsto \text{card}(P^{-1}(z)) \end{array} \right|$$

est localement constante.

2. Montrer que $\mathbb{C} - K$ est connexe par arcs. En utilisant que ν ne peut être identiquement nulle, montrer que P est surjective.
3. En déduire que tout polynôme non constant possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (Théorème de d'Alembert-Gauss).

4. Quelle partie de la démonstration ne marche pas sur $\mathbb{R}$?

Solution :

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C} - \{K\}$ et $n := \nu(z_0)$. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert O de z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $\nu(z) = n$ pour tous $z \in O$.

Premier cas : $n = 0$. $P(\mathbb{C})$ est fermé (*) et z_0 appartient à son complémentaire (qui est ouvert) donc il existe $r > 0$ tel que $B_{\mathbb{C}}(z_0, r) \cap P(\mathbb{C}) = \emptyset$. En particulier, ν est constante en 0 sur $B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$, donc $O := B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$ fournit la conclusion.

Deuxième cas : $n \geq 1$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ 2 à 2 distincts tels que $P(x_1) = \dots = P(x_n) = z$. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. La différentielle $dP(x_k) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $dP(x_k).h = P'(x_k)h$. En particulier, elle est inversible ($dP(x_k)^{-1}.h = h/P'(x_k)$) donc (thm d'inversion locale) il existe un voisinage ouvert V_k de x_k dans $\mathbb{C}$ tel que P soit un C^1 -difféomorphisme de V_k sur $P(V_k)$. Quitte à prendre des voisinages plus petits, on peut supposer que $V_1, \dots, V_n$ sont 2 à 2 disjoints. Alors $\Omega := P(V_1) \cap \dots \cap P(V_n)$ est un voisinage ouvert de z dans $\mathbb{C}$ et $\nu(z) \geq n, \forall z \in \Omega$ (z admet un antécédent dans chaque V_k).

$P(\mathbb{C} - \cup_{k=1}^n V_k)$ est un fermé (même preuve que pour $P(\mathbb{C})$, en utilisant le caractère fermé de $\mathbb{C} - \cup_{k=1}^n V_k$, pour conclure que X_∞ est dedans), z_0 appartient à son complémentaire, donc il existe $r > 0$ tel que $B_{\mathbb{C}}(z_0, r) \cap P(\mathbb{C} - \cup_{k=1}^n V_k) = \emptyset$: les points de $B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$ n'ont d'antécédents que dans $\cup_{k=1}^n V_k$.

On obtient la conclusion avec $O := \Omega \cap B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$.

(*) Soit $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de $P(\mathbb{C})$ qui converge vers Z_∞ dans $\mathbb{C}$. Pour tous $j \in \mathbb{N}$, il existe $X_j \in \mathbb{C}$ tel que $Z_j = P(X_j)$. La suite $(P(X_j))_{j \in \mathbb{N}}$ converge, donc elle est bornée. Comme $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} |P(x)| = +\infty$, on en déduit que $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée. Elle admet donc une sous-suite $(X_{\phi(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $X_\infty \in \mathbb{C}$. Par continuité de P , on a $P(X_\infty) = Z_\infty$.

2. $K := \{P(x); P'(x) = 0\}$ est fini, donc $\mathbb{C} - K$ est connexe par arc (faire un dessin).

$\nu : \mathbb{C} - K \rightarrow \mathbb{N}$ est continue (car localement constante), $\mathbb{C} - K$ est un connexe, donc $\nu(\mathbb{C} - K)$ est un connexe de $\mathbb{N}$, cad un singleton. Ainsi, ν est constante sur $\mathbb{C} - K$.

Considérons $z_0 \in P(\mathbb{C}) - K$. Alors $N := \nu(z_0) \neq 0$ et $\nu \equiv N$ sur $\mathbb{C} - K$. En particulier, tout point de $\mathbb{C} - K$ admet $N \geq 1$ antécédents; et tout point de K admet au moins un antécédent (par définition de K); donc P est surjectif.

3. $0 \in P(\mathbb{C})$ car P est surjectif.

4. $\mathbb{R} - K$ n'est pas connexe.

12.2 Théorème des fonctions implicites

12.2.1 Enoncé du TFI

Théorème 47 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des **Banach**. $E \times F$ est muni de la norme $\|(x, y)\|_{E \times F} := \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$. Soit U un ouvert de $(E \times F, \|\cdot\|_{E \times F})$, $(a, b) \in U$ et $f \in C^1(U, G)$ telle que $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ soit une bijection de F sur G . Alors il existe

- un voisinage ouvert V de a dans $(E, \|\cdot\|_E)$,
- un voisinage ouvert W de b dans $(F, \|\cdot\|_F)$ tels que $V \times W \subset U$,

– $\varphi \in C^1(V, W)$

tels que

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

Si, de plus $f \in C^k(U, G)$ alors $\varphi \in C^k(V, W)$.

On appelle φ la fonction implicite définie par f au voisinage de (a, b) et en particulier $b = \varphi(a)$.

La signification du thm est que la 'courbe' définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ peut, **localement**, être vue comme le graphe de la fonction φ .

Notez qu'on a accès à la différentielle de la fonction implicite φ , ce qui est souvent utile en pratique. En effet quitte à réduire V et W , on peut supposer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est une bijection de F sur G pour tout $(x, y) \in V \times W$ (l'ensemble des bijections continues $F \rightarrow G$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(F, G)$, donc son image réciproque, par l'application $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est un ouvert de U qui contient (a, b)). Alors de la relation

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \text{dans } G, \forall x \in V,$$

on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \circ d\varphi(x) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, G), \forall x \in V,$$

donc

$$d\varphi(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)).$$

Cette formule justifie la dernière assertion du TFI.

Corollaire 13 Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = G = \mathbb{R}^p$ il suffit de vérifier que le déterminant $p \times p$

$$\det \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right]$$

est non nul.

Preuve du TFI : On muni $E \times G$ de la norme $\|(x, z)\|_{E \times G} := \max\{\|x\|_E, \|z\|_G\}$. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} g : & E \times F & \rightarrow E \times G \\ & (x, y) & \mapsto (x, f(x, y)) \end{array} \right|$$

est $C^1(U, E \times G)$ et

$$dg(a, b).(h, k) = \left(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).k \right), \quad \forall (h, k) \in E \times F.$$

Pour $(u, v) \in E \times G$ et $(h, k) \in E \times F$, on a

$$dg(a, b).(h, k) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} h = u \\ k = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)^{-1} \left[v - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).u \right] \end{cases}$$

donc $dg(a, b)$ est une bijection de $E \times F$ sur $E \times G$. D'après le TIL, il existe un voisinage ouvert $\Omega_{E \times F}$ de (a, b) dans $E \times F$, un voisinage ouvert $\Omega_{E \times G}$ de $(a, 0)$ dans $E \times G$, tels que g soit un C^1 -diffeomorphisme de $\Omega_{E \times F}$ sur $\Omega_{E \times G}$. Alors il existe un voisinage ouvert V de a dans E et un

voisinage ouvert W de b dans F tels que $V \times W \subset \Omega_{E \times F}$ et $V \times \{0\} \subset \Omega_{E \times G}$. Par restriction, g est un C^1 difféomorphisme de $V \times W$ sur $g(V \times W)$. Définissons

$$\left| \begin{array}{ccc} \varphi : & V & \rightarrow W \\ & x & \mapsto p_F(g^{-1}(x, 0)) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{ccc} p_F : & E \times F & \rightarrow F \\ & (x, y) & \mapsto y. \end{array} \right.$$

Alors $\varphi \in C^1(V, W)$ et

$$\begin{aligned} (x \in V, y \in W, f(x, y) = 0) &\Leftrightarrow (x \in V, y \in W, g(x, y) = (x, 0)) \\ &\Leftrightarrow (x \in V, y \in W, (x, y) = g^{-1}(x, 0)) \\ &\Leftrightarrow (x \in V, y = \varphi(x)). \quad \square \end{aligned}$$

12.2.2 Exercices type

Exercice 1 : Folium de Descartes Soit

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 3xy = 0\}.$$

1. Cette équation définit-elle y comme fonction implicite de x ? Si oui, calculer la dérivée de la fonction implicite et écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$.
2. Tracer $\mathcal{C}$ et préciser l'asymptote. On pourra trouver sa représentation paramétrique en introduisant t tel que $y = tx$.

CORRECTION :

1. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto x^3 + y^3 - 3xy \end{array} \right.$$

est C^1 et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3(y^2 - x) \neq 0 \quad \text{ssi} \quad x \neq y^2.$$

Les points de $\mathcal{C}$ de la forme $x = y^2$ sont

$$P := \{(0, 0), (2^{2/3}, 2^{1/3})\}.$$

Pour tout $(a, b) \in \mathcal{C} \setminus P$, le TFI s'applique : il existe

- un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}$,
- un voisinage ouvert W de b dans $\mathbb{R}$,
- $\varphi \in C^1(V, W)$

tels que $((x, y) \in \mathcal{C} \cap [V \times W]) \Leftrightarrow (x \in V, y = \varphi(x))$. Autrement dit, au voisinage de tout point $(a, b) \in \mathcal{C} \setminus P$, alors $\mathcal{C}$ est contenu dans le graphe de la fonction implicite φ .

On a

$$x^3 + \varphi(x)^3 - 3x\varphi(x) = 0, \quad \forall x \in V$$

donc

$$3x^2 + 3\varphi'(x)\varphi(x)^2 - 3\varphi(x) - 3x\varphi'(x) = 0, \quad \forall x \in V.$$

En particulier, avec $x = a$ et $\varphi(x) = b$ on obtient

$$3a^2 + 3\varphi'(a)b^2 - 3b - 3a\varphi'(a) = 0 \quad \text{donc} \quad \varphi'(a) = \frac{b - a^2}{b^2 - a}.$$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(a, b) \in \mathcal{C} \setminus P$ est

$$y = b + \frac{b - a^2}{b^2 - a}(x - a)$$

La condition $a \neq b^2$ (pour être hors de P) exprime que la droite tangente à $\mathcal{C}$ en (a, b) n'est pas verticale.

2. Le calcul explicite montre que, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alors

$$\left(y = tx \text{ et } x^3 + y^3 - 3xy = 0 \right) \Leftrightarrow \left((x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3} \right) \right).$$

On peut alors établir le tableau des variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et en déduire le dessin de $\mathcal{C}$.

Corrigé : Rouviere Ex 75 page 224

Exercice 2 : Asymptotique des racines d'un polynôme. Soit $a_1 < a_2 \in \mathbb{R}$ et

$$\left| \begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\epsilon, t) & \mapsto (x - a_1)(a_2 - x) + \epsilon x^3. \end{array} \right.$$

1. Montrer que, pour ϵ assez petit, le polynôme $x \mapsto f(\epsilon, x)$ admet 3 racines distinctes $x_1(\epsilon) < x_2(\epsilon) < x_3(\epsilon)$.
2. Calculer le DL de $x_j(\epsilon)$ à l'ordre $O(\epsilon^2)$.

CORRECTION :

1. La fonction f est C^∞ , $f(0, a_j) = 0$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(0, a_j) \right| = (a_2 - a_1) \neq 0$ donc, d'après le TFI, il existe un voisinage ouvert V_j de $\epsilon = 0$ dans $\mathbb{R}$, un voisinage ouvert W_j de $x = a_j$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi_j \in C^\infty(V_j, W_j)$ tels que

$$\left(\epsilon \in V_j, x \in W_j, f(\epsilon, x) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\epsilon \in V_j, x = \varphi_j(\epsilon) \right).$$

Pour $\epsilon \in V := V_1 \cap V_2$, le polynôme de degré 3 $x \mapsto f(\epsilon, x)$ admet 2 racines distinctes, $\varphi_1(\epsilon)$ et $\varphi_2(\epsilon)$. Comme le polynôme est à coefficients réels, sa 3e racine $\varphi_3(\epsilon)$ est également réelle.

2. On a, pour $\epsilon \in V$,

$$f(\epsilon, x) = (x - a_1)(a_2 - x) + \epsilon x^3 = \epsilon \left(x^3 - \frac{1}{\epsilon} x^2 + \frac{a_1 + a_2}{\epsilon} x - \frac{a_1 a_2}{\epsilon} \right)$$

et

$$f(\epsilon, x) = \epsilon[x - \varphi_1(\epsilon)][x - \varphi_2(\epsilon)][x - \varphi_3(\epsilon)]$$

donc les relations coefficients/racine s'écrivent

$$\varphi_1(\epsilon) + \varphi_2(\epsilon) + \varphi_3(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\varphi_1(\epsilon)\varphi_2(\epsilon) + \varphi_1(\epsilon)\varphi_3(\epsilon) + \varphi_2(\epsilon)\varphi_3(\epsilon) = \frac{a_1 + a_2}{\epsilon}$$

$$\varphi_1(\epsilon)\varphi_2(\epsilon)\varphi_3(\epsilon) = \frac{a_1 a_2}{\epsilon}.$$

La première permet d'obtenir un développement à l'ordre $O(\epsilon^2)$ de $\varphi_3(\epsilon)$ lorsqu'on en connaît un pour $\varphi_1(\epsilon)$ et $\varphi_2(\epsilon)$. Or ces 2 fonctions sont régulières d'après le TFI donc (Taylor Young)

$$\varphi_j(\epsilon) = \varphi_j(0) + \epsilon \varphi_j'(0) + O(\epsilon^2) = a_j + \epsilon \varphi_j'(0) + O(\epsilon^2) \quad \forall j = 1, 2.$$

Il suffit donc de calculer $\varphi'_j(0)$ pour $j = 1, 2$ pour conclure. On a vu dans le cours qu'on pouvait calculer la différentielle de la fonction implicite en différentiant la relation qui la définit : on applique donc cette stratégie ici. Pour $j = 1, 2$, on a

$$\epsilon \varphi_j(\epsilon)^3 - \varphi_j(\epsilon)^2 + (a_1 + a_2)\varphi_j(\epsilon) - a_1 a_2 = 0, \quad \forall \epsilon \in V_j$$

donc

$$\varphi_j(\epsilon)^3 + 3\epsilon \varphi'_j(\epsilon) \varphi_j(\epsilon)^2 - 2\varphi'_j(\epsilon) \varphi_j(\epsilon) + (a_1 + a_2)\varphi'_j(\epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon \in V_j.$$

En particulier, avec $\epsilon = 0$, $\varphi_j(0) = a_j$ donc

$$\varphi'_j(0) = \frac{a_j^3}{2a_j - a_1 - a_2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi_j(\epsilon) &= a_j + \frac{a_j^3}{2a_j - a_1 - a_2} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad \forall j = 1, 2, \\ \varphi_3(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} - (a_1 + a_2) - \frac{a_1^3 - a_2^3}{a_1 - a_2} \epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Exercice 3 : TFI et point fixe.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $(x, y)(t) \in \mathbb{R}^2$ au système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin(x + y) + t - 1, \\ y = \frac{1}{2} \cos(x - y) - t + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto (x, y)(t) \in \mathbb{R}^2$ est C^∞ .

3. Calculer son DL en $t = 1$.

CORRECTION :

1. L'application

$$\left| \begin{array}{lll} f : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(\frac{1}{2} \sin(x + y) + t - 1, \frac{1}{2} \cos(x - y) - t + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right.$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$df(x, y).(h, k) = \left(\frac{1}{2}(h + k) \cos(x + y), \frac{1}{2}(k - h) \sin(x - y) \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \|df(x, y).(h, k)\|^2 &= \frac{1}{4} \left((h + k)^2 \cos^2(x + y) + (k - h)^2 \sin^2(x - y) \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left((h + k)^2 + (k - h)^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (h^2 + k^2). \end{aligned}$$

D'après l'IAF, f est $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -contractante sur $\mathbb{R}^2$. le thm du point fixe donne la ccl.

2. Introduisons

$$\left| \begin{array}{lll} G : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x, y) & \mapsto & \left(x - \frac{1}{2} \sin(x + y) - t + 1, y - \frac{1}{2} \cos(x - y) + t - \frac{1}{2} \right) \end{array} \right.$$

Alors $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et, pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$

$$\det[d_{x,y}G(x, y)] = \left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\cos(x+y)}{2} & -\frac{\cos(x+y)}{2} \\ \frac{\sin(x-y)}{2} & 1 - \frac{\sin(x-y)}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \cos(x + y))(1 - \sin(x + y)) \geq \frac{1}{2}.$$

D'après le TFI, le paramétrage local $(x, y)(t)$ des solutions de $G(t, x, y) = 0$ est une application $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

3. Pour $t = 1$, $(x, y)(1) = (0, 0)$. Des relations

$$x(t) = \frac{1}{2} \sin[x(t) + y(t)] + t - 1 \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{2} \cos[x(t) - y(t)] - t + \frac{1}{2}$$

on déduit que

$$x'(t) = \frac{x'(t) + y'(t)}{2} \cos[x(t) + y(t)] + 1 \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{y'(t) - x'(t)}{2} \sin[x(t) - y(t)] - 1.$$

En particulier, pour $t = 1$, $x(t) = y(t) = 0$ donne

$$x'(0) = \frac{x'(0) + y'(0)}{2} + 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = -1,$$

donc $x'(0) = 1$ et $y'(0) = -1$. La formule de Taylor Young justifie donc que $(x, y)(t) = t(1, -1) + O(t^2)$.

Exercice 4 : TFI et solutions périodiques d'EDO. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ différentiable (pas forcément holomorphe : $\mathbb{C}$ est considéré comme $\mathbb{R}$ -ev cad identifié à $\mathbb{R}^2$) telle que $f \equiv 0$ sur $\mathbb{U}$ (le cercle unité de $\mathbb{C}$). On s'intéresse à l'existence de solutions périodiques pour l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = ix(t) + \epsilon f[x(t)], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (12.3)$$

1. Montrer que, pour tout $(x_0, \epsilon) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy (12.3). On la notera $t \mapsto \phi(t; x_0, \epsilon)$. Calculer $\phi(\cdot; 1, 0)$ associée à $x_0 = 1$ et $\epsilon = 0$.
2. Montrer que, pour $(x_0, \epsilon) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$, $\phi(2\pi; x_0, \epsilon) = \phi(0; x_0, \epsilon)$ ssi

$$\int_0^{2\pi} e^{-is} f[\phi(s; x_0, \epsilon)] ds = 0.$$

3. En utilisant le TFI, montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{R} & \rightarrow & (C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \\ (x_0, \epsilon) & \mapsto & \phi(\cdot; x_0, \epsilon) \end{array}$$

est (bien définie et) de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $(1, 0)$.

4. En utilisant le TFI, montrer que, sous de bonnes hypothèses sur f (à formuler), alors l'équation (12.3) admet une solution périodique pour tout ϵ assez proche de 0 : $\exists \epsilon_1 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$, il existe $x_0(\epsilon) \in \mathbb{C}$ tel que $t \mapsto \phi(t; x_0(\epsilon), \epsilon)$ soit définie sur tout $\mathbb{R}$ et 2π -périodique.
5. Donner des exemples de telles fonctions f .

CORRECTION :

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz : l'équation est de la forme $x' = g(x)$ avec $g \in \mathbb{C}^1$.
2. Cela résulte de la formule de variation de la constante :

$$x(t) = x_0 e^{it} + \epsilon \int_0^t e^{i(t-s)} f[x(s)] ds.$$

3. On applique le théorème des fonctions implicites à l'application $F : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}) \rightarrow C^0([0, T], \mathbb{C})$ définie par

$$F(x_0, \epsilon, y)(t) = x_0 e^{it} + \epsilon \int_0^t e^{i(t-s)} f[y(s)] ds - y(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

- Les espaces de départ et d'arrivée sont complets
 - On a $F(1, 0, y_*) = 0$ où $y_* : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$.
 - L'application F est de classe C^1 et $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0, y_*) = -Id$ est une bijection de $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$.
- D'après le TFI, il existe
- un voisinage ouvert $V = B_{\mathbb{C}}(1, r) \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ de $(x_0, \epsilon) = (1, 0)$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$,
 - un voisinage ouvert W de y_* dans $(C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty})$,
 - une application $\psi \in C^1(V, W)$
- tels que

$$\left((x_0, \epsilon) \in V, y \in W \text{ et } F(x_0, \epsilon, y) = 0 \right) \Leftrightarrow \left((x_0, \epsilon) \in V \text{ et } y = \psi(x_0, \epsilon) \right).$$

Par unicité de $\phi(\cdot; x_0, \epsilon)$, on en déduit que localement $\phi(\cdot; x_0, \epsilon) = \psi(x_0, \epsilon)$ et donc que l'application

$$\left| \begin{array}{ll} B_{\mathbb{C}}(1, r) \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) & \rightarrow (C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty}) \\ (x_0, \epsilon) & \mapsto \phi(\cdot; x_0, \epsilon) \end{array} \right.$$

est de classe C^1 .

4. On applique le TFI à l'application

$$\left| \begin{array}{ll} G : B_{\mathbb{C}}(1, r) \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x_0, \epsilon) & \mapsto \int_0^{2\pi} e^{-is} f[\phi(s; x_0, \epsilon)] ds. \end{array} \right.$$

- L'application G est de classe C^1 d'après la question précédente.
- $G(1, 0) = 0$ car $f = 0$ sur $\mathbb{U}$.
- Pour tout $y_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$\frac{\partial G}{\partial x_0} \cdot y_0 = \int_0^{2\pi} e^{-is} df(e^{is}) \cdot (y_0 e^{is}) ds$$

A partir de maintenant, on fait l'hypothèse que l'application $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ y_0 & \mapsto \int_0^{2\pi} e^{-is} df(e^{is}) \cdot (y_0 e^{is}) ds \end{array} \right.$$

est bijective. Alors l'application linéaire $\frac{\partial G}{\partial x_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est bijective.

D'après le TFI, il existe

- un voisinage ouvert $(-\epsilon_1, \epsilon_1)$ de 0 dans $\mathbb{R}$,
- un voisinage ouvert $B_{\mathbb{C}}(1, r_1)$ de 1 dans $\mathbb{C}$,
- une application $\Psi \in C^1((-\epsilon_1, \epsilon_1), B_{\mathbb{C}}(1, r_1))$

tels que

$$\left(\epsilon \in (-\epsilon_1, \epsilon_1), x_0 \in B_{\mathbb{C}}(1, r_1) \text{ et } G(x_0, \epsilon) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\epsilon \in (-\epsilon_1, \epsilon_1) \text{ et } x_0 = \Psi(\epsilon) \right).$$

On en déduit que, pour tout $\epsilon \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$, la solution de l'équation (12.3) de condition initiale $x(0) = \Psi(\epsilon)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et 2π -périodique.

12.3 Sous-variétés

De nombreux problèmes nécessitent de généraliser le calcul différentiel à des fonctions définies sur des entités géométriques autres que des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, on peut être amené à chercher les extrema d'une fonction dont la variable décrit l'espace des phases d'un système physique, cet espace de phases étant un certain lieu géométrique dans un espace $\mathbb{R}^n$, mais pas nécessairement un ouvert. De tels problèmes d'optimisation sous contrainte apparaissent naturellement en mécanique, en physique, en économie, etc.

Les sous-variétés apparaissent historiquement comme généralisation de la théorie classique des courbes et surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Elles peuvent être considérées selon différents points de vue qui font la richesse et la difficulté de la théorie. Une première étape va donc être de dégager des définitions équivalentes correspondant à ces différents points de vue, pour pouvoir choisir la plus adaptée. L'outil fondamental permettant le lien entre ces points de vue est le théorème d'inversion locale, ou de façon équivalente, le théorème de fonctions implicites. Localement, une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$ ressemble à l'inclusion d'un ouvert de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$.

12.3.1 Définitions équivalentes

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Un sous ensemble N de $\mathbb{R}^n$ est **une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension k et de classe C^p** si, pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que l'un des énoncés équivalents suivants a lieu.

Carte locale : il existe un C^p -diffeomorphisme local $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}].$$

Graphe : il existe $u : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p et un changement de coordonnées $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que

$$W \cap N = \{A(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W.$$

Équation : il existe $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$.

Nappe paramétrée : il existe $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$ et une application $j : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^p telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \rightarrow N \cap W$ est une bijection bi-continue.

Afin de s'appropriier ces 4 définitions équivalentes, il est bénéfique de les tester toutes sur des exemples simples : la parabole $\{y = x^2\}$ (Ex 1), l'ellipse $\{x = a \cos(t), y = b \sin(t)\}$, le cylindre $\{x^2 + y^2 = 1\}$, la sphère (Ex 2),...

Pour démontrer qu'un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété, généralement, l'une des 4 définitions est plus pratique que les 3 autres. Lorsqu'elle est utilisable, **la définition par la graphe est la plus économique**, car il n'y a aucune propriété d'injectivité ou surjectivité à vérifier.

Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$.

Preuve de l'équivalence entre les 4 définitions :

Carte locale $\Rightarrow$ *Equation*. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^p -diffeomorphisme local tel que

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}].$$

On note $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k})$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, l'espace d'arrivée de φ . Alors l'application

$$\left| \begin{array}{lll} F : & W & \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ & x & \mapsto (v_1(\varphi(x)), \dots, v_{n-k}(\varphi(x))) \end{array} \right|$$

est de classe C^p et satisfait

$$\begin{aligned} (x \in N \cap W) &\Leftrightarrow (\varphi(x) \in \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}]) \\ &\Leftrightarrow (x \in W \text{ et } F(x) = 0). \end{aligned}$$

De plus, pour $h \in \mathbb{R}^n$, on a (TFC)

$$\left| \begin{array}{lll} dF(x_0) : & \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ & h & \mapsto (v_1(d\varphi(x_0).h), \dots, v_{n-k}(d\varphi(x_0).h)) \end{array} \right|.$$

Soit $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Comme φ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0 alors $d\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. Donc il existe $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $d\varphi(x_0).h = (0^k, \tilde{v})$. Alors $dF(x_0).h = \tilde{v}$. On a montré que $dF(x_0)$ est surjective.

Equation $\Rightarrow$ Graphe. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$. On introduit $E_1 := \text{Ker}[dF(x_0)]$, qui est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k (thm du rang), E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= E_1 \oplus E_2 \\ x &= x_1 + x_2 \\ x_0 &= x_{0,1} + x_{0,2} \end{aligned}$$

et

$$\widetilde{W} := \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2; x_1 + x_2 \in W\}$$

qui est un ouvert de $E_1 \times E_2$, car image réciproque de l'ouvert W par l'application continue $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. L'application

$$\left| \begin{array}{lll} \widetilde{F} : & \widetilde{W} \subset E_1 \times E_2 & \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto F(x_1 + x_2) \end{array} \right|$$

est de classe C^p et $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_{0,1}, x_{0,2})$ est une bijection de E_2 sur $\mathbb{R}^{n-k}$. D'après le TFI, il existe $V_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_{0,1})$, $V_2 \in \mathcal{V}_{E_2}(x_{0,2})$, $u \in C^1(V_1, V_2)$ tels que $V_1 \times V_2 \subset \widetilde{W}$ et

$$\left((x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \text{ et } \widetilde{F}(x_1, x_2) = 0 \right) \Leftrightarrow (x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1)).$$

Graphe $\Rightarrow$ Carte locale. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}^k$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$

$$\left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}^n &= \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ x &= (x_1, x_2). \end{array} \right|$$

L'application

$$\left| \begin{array}{lll} \varphi : & \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ & x = (x_1, x_2) & \mapsto (x_1, x_2 - u(x_1)) \end{array} \right|$$

est de classe C^p et $\varphi(N \cap W) = [\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}] \cap \varphi(W)$. De plus, pour $h, v \in \mathbb{R}^n$, on a (TFC)

$$v = d\varphi(x_0).h = \left(h_1, h_2 - du(x_{0,1}).h_1 \right) \Leftrightarrow h_1 = v_1 \text{ et } h_2 = v_2 + du(x_{0,1}).v_1$$

donc $d\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. D'après le TIL, φ est un C^p -diffeomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0 .

Graphe $\Rightarrow$ *Nappe paramétrée*. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W \quad (12.4)$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Notons $x_0 = (z_0, u(z_0))$ avec $z_0 \in \mathbb{R}^k$ et

$$U := \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^k; (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})) \in W\}. \quad (12.5)$$

Alors U est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$, comme image réciproque de l'ouvert W par l'application continue $\tilde{z} \mapsto (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z}))$. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} j : & U \subset \mathbb{R}^k & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ & \tilde{z} & \mapsto (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})) \end{array} \right|$$

est de classe C^p et satisfait $j(0) = (z_0, u(z_0)) = x_0$.

De plus $dj(0).h = (h, du(z_0).h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ donc

$$(h \in \mathbb{R}^k \text{ et } dj(0).h = 0) \Rightarrow (h = 0)$$

ainsi $dj(0)$ est injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$.

Enfin j est injective sur U car

$$(z_1, z_2 \in U \text{ et } j(z_1) = j(z_2)) \Leftrightarrow (z_1, z_2 \in U \text{ et } (z_1, u(z_1)) = (z_2, u(z_2))) \Leftrightarrow (z_1 = z_2).$$

et j est surjective de U sur $W \cap N$ par (12.4) et (12.5). De plus sa réciproque

$$\left| \begin{array}{ccc} j^{-1} : & W \cap N & \rightarrow U \\ & x = (z, u(z)) & \mapsto z - z_0 \end{array} \right|$$

est continue. Ainsi, j est une bijection bi-continue de U sur $N \cap W$.

Nappe paramétrée $\Rightarrow$ *Graphe*. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $j \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$ telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \rightarrow N \cap W$ est une bijection bi-continue. Notons $E_1 := \text{Im}[dj(0)]$ qui est un sev de dimension k de $\mathbb{R}^n$, E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & = & E_1 \oplus E_2 \\ x & = & x_1 + x_2 \\ x_0 & = & x_{0,1} + x_{0,2} \\ \mathbb{P}_1 & = & Id + 0 \\ \mathbb{P}_2 & = & 0 + Id \end{array}$$

L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} f : & U \subset \mathbb{R}^k & \rightarrow E_1 \\ & z & \mapsto \mathbb{P}_1[j(z)] \end{array} \right|$$

est de classe C^p et (TFC)

$$df(0).h = \mathbb{P}_1[dj(0).h], \quad \forall h \in \mathbb{R}^k,$$

donc $df(0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^k$ sur E_1 (car $dj(0)$ est injective et son image = E_1). D'après le TIL, il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$, $V_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_{0,1})$ tels que f soit un C^p -diffeomorphisme de V_0 sur V_1 :

$$(z \in V_0 \text{ et } x_1 = f(z)) \Leftrightarrow (x_1 \in V_1 \text{ et } z = f^{-1}(x_1)).$$

Soit $\widetilde{W} := j(V_0)$, qui est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ (comme image réciproque de l'ouvert V_0 par l'application continue j^{-1}), contenu dans W . Alors

$$\begin{aligned} (x \in N \cap \widetilde{W}) &\Leftrightarrow (\exists z \in V_0 \text{ tel que } x = j(z)) \\ &\Leftrightarrow (\exists z \in V_0 \text{ tel que } \mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_1[j(z)] \text{ et } \mathbb{P}_2(x) = \mathbb{P}_2[j(z)]) \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{P}_1(x) \in V_1, \quad z = f^{-1}(\mathbb{P}_1(x)) \text{ et } \mathbb{P}_2(x) = \mathbb{P}_2[j(z)]) \\ &\Leftrightarrow (\exists x_1 \in V_1 \text{ tel que } x = x_1 + \mathbb{P}_2[j \circ f^{-1}(x_1)]) \end{aligned}$$

ainsi N est localement le graphe de l'application $x_1 \mapsto j \circ f^{-1}(x_1)$ qui est de classe C^p . $\square$

Exemples : Sont des sous-variété de $\mathbb{R}^n$:

- les ouvert $\mathbb{R}^n$,
- les sous-espace vectoriels, ou affines de $\mathbb{R}^n$,
- les paraboles, les cercles, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$: voir exercices ci-dessous,
- la spirale, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$, qui est définie par le paramétrage

$$\left| \begin{array}{ll} j : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto (e^s \cos(s), e^s \sin(s)) \end{array} \right.$$

Cet exemple montre qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément fermée : $(0,0)$ est adhérent à la spirale, mais pas dedans.

- les sphère ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$), ellipsoïde ($ax^2 + by^2 = 1$), hyperboloïde à une nappe : ($x^2 + y^2 - z^2 = 1$), hyperboloïde à 2 nappes : ($z^2 - x^2 - y^2 = 1$), tore ($(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$) avec $k = 2$, $n = 3$, $p = \infty$: voir exercices ci-dessous,
- le Folium de Descartes privé du point $\{(0,0)\}$, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$: $(0,0)$ est un 'point multiple',
- un ouvert d'une sous-variété (même classe et même dimension),
- $N_1 \times N_2$ lorsque N_j est un sous-variété de $\mathbb{R}^{n_j}$ et $n_1 + n_2 = n$,
- l'image d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ par un C^1 -diffeomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice : Le démontrer.

12.3.2 Espace tangent

Definition 52 Lorsque N est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$ alors **l'espace tangent à N en x_0** , noté $T_{x_0}N$, est l'ensemble des vecteurs vitesse à $t = 0$, des chemins C^1 tracés sur N passant par x_0 à $t = 0$:

$$T_{x_0}N := \left\{ \gamma'(0); \gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n), I \text{ intervalle ouvert contenant } 0, \gamma(I) \subset N, \gamma(0) = x_0 \right\}.$$

Remarque 33 Il est clair que, si N est un ouvert d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors $T_{x_0}N$ coïncide avec ce sous-espace vectoriel, pour tout $x_0 \in N$.

Il n'est pas clair, avec cette définition, que $T_{x_0}N$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Mais on peut caractériser l'espace tangent en terme de carte/graphes/equation/nappe et cette reformulation rend mieux compte de sa structure d'ev.

Carte locale : $T_{x_0}N = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) = d\varphi^{-1}[\varphi(x_0)](\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$.

Grapshe : $T_{x_0}N = \{A(h, du(z_0).h); h \in \mathbb{R}^k\}$ avec z_0 tel que $x_0 = A(z_0, u(z_0))$.

Équation : $T_{x_0}N = \text{Ker}[dF(x_0)]$.

Nappe paramétrée : $T_{x_0}N = dj(0)(\mathbb{R}^k)$.

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de carte locale : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^p -diffeomorphisme local tel que

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}].$$

Montrons que $T_{x_0}N \subset d\varphi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$.

Soit $v \in T_{x_0}N$: il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma(I) \subset N$ et $\gamma(0) = x_0$ et $v = \gamma'(0)$. Alors $\beta := \varphi \circ \gamma$ est un chemin C^1 sur $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ donc (voir Remarque 33) $\beta'(0) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Or (TFC) $\beta'(0) = d\varphi(x_0).\gamma'(0) = d\varphi(x_0).v$ donc $v = d\varphi(x_0)^{-1}.\beta'(0) \in d\varphi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$.

Montrons que $d\varphi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}] \subset T_{x_0}N$.

Soit $v = d\varphi(x_0)^{-1}.w$ où $w \in \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Comme $\varphi(W)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(W)$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Alors

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma : & (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ & t \mapsto \varphi^{-1}[\varphi(x_0) + tw] \end{array} \right.$$

est un chemin C^1 à valeurs dans N tel que $\gamma(0) = x_0$ donc $\gamma'(0) \in T_{x_0}N$. Or (TFC) $\gamma'(0) = d\varphi^{-1}(x_0).w = v$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de nappe paramétrée : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$, $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$ et $j \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$ telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \rightarrow N \cap W$ est une bijection bi-continue.

Montrons que $T_{x_0}N \subset dj(0)(\mathbb{R}^k)$.

Soit $v \in T_{x_0}N$: il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma(I) \subset N$ et $\gamma(0) = x_0$ et $v = \gamma'(0)$. Quitte à réduire I , on peut supposer que $\gamma(I) \subset N \cap W$. Alors $\beta : t \in I \mapsto j^{-1} \circ \gamma(t) \in U$ est un chemin C^1 sur U et $\beta(0) = 0$ donc $\beta'(0) \in T_0U = \mathbb{R}^k$ (voir Remarque 33). Or (TFC), $\beta'(0) = d(j^{-1})(0).\gamma'(0) = dj(0)^{-1}.v$ donc $v = dj(0).\beta'(0) \in dj(0)[\mathbb{R}^k]$.

Montrons que $dj(0)(\mathbb{R}^k) \subset T_{x_0}N$.

Soit $v := dj(0).w$ où $w \in \mathbb{R}^k$. Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $tw \in U$ pour tout $t \in (-\delta, \delta)$. Alors l'application

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma : & (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ & t \mapsto j(tw) \end{array} \right.$$

est bien définie, de classe C^1 , à valeurs dans $N \cap W$, vérifie $\gamma(0) = x_0$ et (TFC) $\gamma'(0) = dj(0).w = v$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de graphe : Soit $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W \quad (12.6)$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Dans la preuve de l'équivalence entre les différentes définitions d'une sous-variété, on a construit, à partir de u , une nappe paramétrée

$$\left| \begin{array}{ll} j : U \subset \mathbb{R}^k & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \tilde{z} & \mapsto (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})) \end{array} \right.$$

On sait alors que $T_{x_0}N = dj(0).(\mathbb{R}^k)$. Or (TFC) $dj(0).h = (h, du(z_0).h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ donc $T_{x_0}N = \{(h, du(z_0).h); h \in \mathbb{R}^k\}$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme d'équation : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$. Dans la preuve de l'équivalence entre les différentes définitions d'une sous-variété, on a construit, à partir de F , une application u dont N est localement le graphe (TFI) :

$$\left(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \text{ et } F(x_1 + x_2) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1) \right).$$

On sait alors que

$$T_{x_0}N = \{h + du(x_{0,1}).h; h \in E_1\}.$$

Par le TFI, on peut exprimer la différentielle de u en $x_{0,1}$ à partir de celle de F :

$$\begin{aligned} du(x_{0,1}) &= -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2}(x_{0,1}, x_{0,2})^{-1} \circ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1}(x_{0,1}, x_{0,2}) \\ &= -\left(dF(x_0) \circ \mathbb{P}_2\right)^{-1} \circ \left(dF(x_0) \circ \mathbb{P}_1\right) \end{aligned}$$

Rappelons que $\mathbb{P}_1$ est la projection sur $E_1 = \text{Ker}[dF(x_0)]$ parallèlement à E_2 donc $dF(x_0) \circ \mathbb{P}_1 = 0$ et $du(x_{0,1}) = 0$. En conséquence, $T_{x_0}N = E_1 = \text{Ker}[dF(x_0)]$. $\square$

12.3.3 Exercices type

Exercice 1 : Appliquer chacune des 4 définitions équivalentes à la parabole $\mathcal{P} := \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$.

Carte locale : L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y - x^2) \end{aligned}$$

est de classe C^∞ et satisfait $\varphi(\mathcal{P}) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Pour montrer que φ est un C^∞ -diffeomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ au voisinage de tout point $(x, y) \in \mathcal{P}$, il suffit d'appliquer le TIL, car

$$d\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $(x, y) \in \mathcal{P}$.

Graphe : $u : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et $\mathcal{P} = \{(x, u(x)); x \in \mathbb{R}\}$.

Équation : $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y - x^2 \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et vérifie $\mathcal{P} = F^{-1}(\{0\})$. De plus $dF(x_0, x_0^2) : (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto h_1 - 2x_0h_2 \in \mathbb{R}$ est surjective : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $dF(x_0, x_0^2).(\alpha, 0) = \alpha$.

Nappe paramétrée : $j : x \in \mathbb{R} \mapsto (x_0 + x, (x_0 + x)^2)$ est de classe C^p , satisfait $j(0) = (x_0, x_0^2)$ et $j'(0) = (1, 2x_0) \neq 0$ donc $dj(0) : h \in \mathbb{R} \rightarrow hj'(0) \in \mathbb{R}^2$ est injective. De plus j est une bijection bi-continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{P}$ puisque $j^{-1}(x_1, x_1^2) = x_1 - x_0$.

Remarque 34 *La parabole est un exemple particulièrement simple où la carte, le graphe, l'équation et la nappe ne sont pas locaux, mais globaux (ils ne dépendent pas de x_0). Notez que la définition par le graphe est la plus économique : 1 ligne suffit.*

Exercice 2 : Appliquer chacune des 4 définitions équivalentes à la sphère $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Carte locale : Pour $z \neq 0$, on prend $\varphi(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ qui satisfait

$$d\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Le TIL justifie que φ est un C^∞ -difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$. Pour $y \neq 0$, on prend $\varphi(x, y, z) = (x, x^2 + y^2 + z^2 - 1, z)$. Pour $z \neq 0$, on prend $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, y, z)$.

Remarque 35 *Contrairement à la parabole, les cartes sont ici locales : la première carte ne permet pas de conclure sur l'équateur $\{z = 0\}$.*

Graphe : Sur l'hémisphère nord $\{z > 0\}$, on prend $\{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}); (x, y) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, 1)\}$. Sur l'hémisphère sud $\{z < 0\}$, on prend $\{(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}); (x, y) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, 1)\}$. Pour recouvrir toute la sphère, il faut considérer les 6 hémisphères : $\{z > 0\}$, $\{z < 0\}$, $\{x > 0\}$, $\{x < 0\}$, $\{y > 0\}$, $\{y < 0\}$. Notez que ces graphes sont locaux.

Équation : $F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ satisfait $\nabla F(X) = X \neq 0$ pour tout $X \in \mathbb{S}$.

Nappe paramétrée : ...

Exercice 3 : Montrer que $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^4 - x^4 = 0\}$ n'est pas une sous-variété. [Ex 86, Rouvière]

Idée : M est la réunion des 2 droites $\{y = x\}$ et $\{y = -x\}$: il y a un point double en $(0, 0)$, l'espace tangent n'y est pas défini.

$M - \{0\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1 et de classe C^∞ car graphe de $x \mapsto \pm x$. Par l'absurde, supposons que M soit un sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. Donc son espace tangent en $(0, 0)$ est de dimension 1. $\gamma_+ : t \in [0, 1] \mapsto (t, t)$ et $\gamma_- : t \in [0, 1] \mapsto (-t, t)$ sont deux chemins $C^1([0, 1], \mathbb{R}^2)$, à valeurs dans N et vérifiant $\gamma_\pm(0) = (0, 0)$ donc $\gamma'_+(0) = (1, 1)$ et $\gamma'_-(0) = (-1, 1)$ sont 2 vecteurs de $T_{(0,0)}N$: Contradiction.

Exercice 4 : Montrer que $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^4 = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

Idée : M est la réunion de 2 paraboles $\{y = x^2\}$ et $\{y = -x^2\}$: il y a un point double en zéro, mais l'argument précédent ne peut plus être utilisé : on exploite un argument de connexité.

$M - \{(0, 0)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1 et de classe C^∞ : graphes de $\pm x^2$. Par l'absurde, on suppose que M est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. D'après la définition par la carte locale, il existe un voisinage W de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une C^1 -difféomorphisme locale de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(M \cap W) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W)$ [faire un dessin].

Alors $(M \cap W) \setminus \{(0, 0)\}$ admet 4 composantes connexes et φ est un homéomorphisme de $(M \cap W) \setminus \{(0, 0)\}$ sur $[\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W) \setminus \{\varphi(0, 0)\}$. donc ce dernier ensemble contient 4 composante connexes : contradiction (il n'en contient que deux).

Exercice 5 : Montrer que $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^3 - x^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

Idée : M est le graphe de $x \mapsto |x|^{2/3}$ qui n'est pas C^1 en $x = 0$. On formalise le problème de différentiabilité en $(0, 0)$.

$M - \{(0, 0)\}$ est un sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1 car graphe de $x \mapsto |x|^{2/3}$. Par l'absurde, on suppose que M est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. D'après la définition par la carte locale, il existe un voisinage W de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et un C^1 -difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(M \cap W) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W)$ [faire un dessin]. Quitte à remplacer φ par $\varphi - \varphi(0, 0)$, on peut supposer que $\varphi(0, 0) = (0, 0)$. Son inverse $\varphi^{-1}(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$ vérifie donc $g(0, 0) = h(0, 0) = 0$ et $g(u, 0)^2 = h(u, 0)^3$ pour u proche de zéro. La fonction $u \mapsto h(u, 0)$ est donc ≥ 0 et minimale en $u = 0$ donc $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = 0$. Le DL de l'égalité $g(u, 0)^2 = h(u, 0)^3$ quand $[u \rightarrow 0]$ s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0, 0)^2 u^2 + o(u^2) = o(u^3)$$

donc $\frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = 0$. Ainsi

$$d\varphi^{-1}(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) & \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) & \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible : contradiction.

Rédaction alternative : Par l'absurde, supposons que M soit une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. La caractérisation par le graphe montre que $M - \{(0, 0)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. Comme M est connexe (par arc) alors elle est de dimension 1. Grâce à la caractérisation par l'équation, il existe

- un voisinage ouvert U de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$,
- une application C^∞ , $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $dF(0, 0)$ est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$
- tels que $F(x, y) = 0, \forall (x, y) \in U \cap M_3$.

La formule de Taylor-Young justifie que

$$F(x, y) = F(0, 0) + dF(0, 0).(x, y) + O(\|(x, y)\|^2) \text{ quand } (x, y) \rightarrow 0. \quad (12.7)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point (t^3, t^2) appartient à M donc $F(t^3, t^2) = 0$ pour t assez petit. On déduit de (12.7) que

$$\begin{aligned} 0 &= dF(0, 0).(t^3, t^2) + O(t^4) \text{ quand } t \rightarrow 0 \\ &= t^2 dF(0, 0).(0, 1) + t^3 dF(0, 0).(1, 0) + O(t^4) \text{ quand } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

par linéarité de l'application $dF(0, 0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. L'unicité du DL de la fonction nulle implique alors que $dF(0, 0).(0, 1) = 0$ et $dF(0, 0).(1, 0) = 0$. Ainsi l'application linéaire $dF(0, 0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est identiquement nulle, ce qui contredit sa surjectivité.

Exercice 6 : L'ensemble $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^3 + zx + y = 0\}$ est-il une sous-variété ?

Oui ! Il suffit d'utiliser la caractérisation par le graphe : $y = -z^3 - zx$.

Exercice 7 : Montrer que $SL_N(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}); \det(M) = 1\}$ est une sous-variété de dimension $N^2 - 1$. Même question pour $O_N(\mathbb{R})$.

On utilise la caractérisation par l'équation. $F : M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \rightarrow \det(M) - 1 \in \mathbb{R}$ est C^∞ (polynomiale) et

$$dF(M).H = \text{tr}[\text{Com}(A)^T H] = \det(A) \text{tr}[A^{-1}H]$$

donc $dF(M) : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective pour tout $M \in SL_N(\mathbb{R})$. Ainsi, $SL_N(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de classe C^∞ et de dimension $N^2 - 1$.

$G : M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \rightarrow M^T M - I_N \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ (sev des matrices symétriques) est C^∞ et

$$dG(M).H = H^T M + M^T H, \forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}).$$

Soit $M \in O_N(\mathbb{R})$. On va montrer que $dG(M) : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est surjective en appliquant le théorème du rang. Pour $H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

$$(H \in \text{Ker}[dG(M)]) \Leftrightarrow (M^T H = M^{-1} H \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})) \Leftrightarrow (H \in M \mathcal{A}_N(\mathbb{R}))$$

(sev des matrices antisymétriques). Ainsi,

$$\text{rg}[dG(M)] = N^2 - \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} = \dim[\mathcal{S}_N(\mathbb{R})].$$

12.4 Théorème des extrêma liés

12.4.1 Enoncé

Théorème 48 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$. Si $f|_N$ admet un extremum local en x_0 alors $T_{x_0}N \subset \text{Ker}[df(x_0)]$.

Preuve : Soit $v \in T_{x_0}N$. Il existe un chemin $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans N tel que $\gamma(0) = x_0$. Alors $f \circ \gamma \in C^1(I, \mathbb{R})$ admet un extrêmu en $t = 0$ donc $0 = (f \circ \gamma)'(0)$. Or (TFC) $(f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0)).\gamma'(0) = df(x_0).v$ donc $v \in \text{Ker}[df(x_0)]$. $\square$

Graphe : Si $N = \{(x, y) = (z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\}$ et $X_0 = (z_0, u(z_0))$ alors $z \mapsto f(z, u(z))$ admet un extremum en z_0 sur $\mathbb{R}^k$ donc (équation d'Euler sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0, u(z_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, u(z_0)) \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) = 0.$$

Dans le cas d'une sous-variété définie par une équation, on obtient l'**énoncé fondamental** suivant.

Proposition 81 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $f_1, \dots, f_{n-k} \in C^1(U, \mathbb{R})$ telles que $df_1(x_0), \dots, df_{n-k}(x_0)$ soient des formes linéaires **indépendantes** et N la sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k définie par

$$N := \{x \in U; f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}.$$

Si $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $g|_N$ admet un extrêmu local en x_0 alors il existe des **multiplieurs de Lagrange** $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ tels que

$$dg(x_0) = \lambda_1 df_1(x_0) + \dots + \lambda_{n-k} df_{n-k}(x_0) \quad \text{dans } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Preuve : N est définie par l'équation associée à la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} F : & U & \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ & x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_{n-k}(x)) \end{array} \right.$$

donc $T_{x_0}N = \text{Ker}[dF(x_0)]$. Or

$$dF(x_0).h = (df_1(x_0).h, \dots, df_{n-k}(x_0).h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

donc $\text{Ker}[dF(x_0)] = \cap_{1 \leq j \leq (n-k)} \text{Ker}[df_j(x_0)]$. La proposition précédente justifie alors que

$$\cap_{1 \leq j \leq (n-k)} \text{Ker}[df_j(x_0)] \subset \text{Ker}[dg(x_0)].$$

Le Lemme d'algèbre linéaire ci-dessous justifie alors l'existence des multiplicateurs de Lagrange. $\square$

Lemme 9 Soient $T, L_1, \dots, L_m$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $(L_1, \dots, L_m)$ soit libre et

$$\cap_{1 \leq j \leq m} \text{Ker}(L_j) \subset \text{Ker}(T).$$

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $T = \lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_m L_m$.

Preuve : Soient $w, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ tels que $L_j(x) = \langle v_j, x \rangle$ et $T(x) = \langle w, x \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1, \dots, m$. La matrice rectangulaire $(m+1) \times n$

$$M := \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \\ w^T \end{pmatrix}$$

est la matrice dans la base canonique de l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} u : & \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \\ & x & \mapsto (\langle v_1, x \rangle, \dots, \langle v_m, x \rangle, \langle w, x \rangle) \end{array} \right.$$

donc son rang vaut $n - \dim[\text{Ker}(u)]$, par le théorème du rang. Or $\cap_{1 \leq j \leq m} \text{Ker}(L_j)$ est un sev de dimension $(n-m)$ car $(L_1, \dots, L_m)$ est libre. Il est contenu dans $\text{Ker}(u)$ par hypothèse donc $\dim[\text{Ker}(u)] \geq (n-m)$. Il en résulte que $\text{rg}(M) \leq m$. En particulier, les $(m+1)$ lignes de M sont liées. Comme les m premières lignes sont indépendantes, nécessairement la dernière est une combinaison linéaire des premières. $\square$

12.4.2 Exercices-type

Exercice :

1. On introduit l'ensemble

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^4 = 1\}. \quad (12.8)$$

Soit $(x_0, y_0) \in M$. Montrer qu'il existe des ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ et un C^1 -difféomorphisme φ de U sur V tels que $(x_0, y_0) \in U$ et $\varphi(M \cap U) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap V$.

On définira φ explicitement.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Quels sont les points critiques de f ?

3. Donner la nature de chacun de ces points critiques : montrer que deux sont des minima locaux et que le troisième n'est pas un extremum.
4. Montrer qu'il existe $(x_*, y_*) \in M$ tel que $f(x_*, y_*) = \min\{f(x, y); (x, y) \in M\}$.
(l'ensemble M est défini par la formule (12.8))
5. Calculer explicitement $\min\{f(x, y); (x, y) \in M\}$.

1. Rappelons d'abord le Théorème d'inversion locale : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des **Banach**, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, F)$ telle que $df(a)$ soit une bijection de E sur F . Alors il existe
 - un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|\cdot\|_E)$ et
 - un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$
 tels que f soit un C^1 -diffeomorphisme de V sur W . Si, de plus, $f \in C^k(\Omega, G)$ alors $f^{-1} \in C^k(W, V)$.

Soit $(x_0, y_0) \in M$. Comme $x_0^4 + y_0^4 = 1$ alors $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$.

Premier cas : $y_0 \neq 0$. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & (x, x^4 + y^4 - 1) \end{array} \right|$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\text{Jac}(\varphi)(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4x_0^3 & 4y_0^3 \end{vmatrix} = 4y_0^3 \neq 0.$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert W de $\varphi(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que φ soit un C^1 -diffeomorphisme de U sur W . Par définition de M , on a bien $\varphi(M \cap U) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap W$.

Deuxième cas : $x_0 \neq 0$. Même analyse avec $\varphi(x, y) = (y, x^4 + y^4 - 1)$.

2. $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et

$$\nabla f(x, y) = 4 \begin{pmatrix} x^3 - x + y \\ y^3 + x - y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} (\nabla f(x, y) = 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - x^3 \text{ et } x = y - y^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - x^3 \text{ et } x = x - x^3 - (x - x^3)^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - x^3 \text{ et } x^3(1 + (1 - x^2)^3) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - x^3 \text{ et } x = 0 \text{ ou } 1 - x^2 = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - x^3 \text{ et } x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{Hess}(f)(x, y) = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

donc, en particulier

$$\text{Hess}(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

est définie positive (car sa trace et son déterminant sont > 0). Ceci prouve que $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum local de f . Comme f est paire, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est aussi un minimum local de f .

En revanche, $(0, 0)$ n'est pas un extremum local, car $f(t, t) = 2t^4 > 0$ pour tout $t \neq 0$ et $f(0, t) = t^4 - 2t^2 < 0$ pour $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$.

4. M est un compact de $\mathbb{R}^2$ car

- M est fermé : image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x^4 + y^4$,
- M est borné : $|x|, |y| \leq 1$ pour tout $(x, y) \in M$.

L'application f est continue sur le compact M donc elle y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $(x_*, y_*) \in M$ tel que $f(x_*, y_*) = \min\{f(x, y); (x, y) \in M\}$.

5. D'après le théorème des extremas liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_*, y_*) = \lambda \nabla g(x_*, y_*)$ où $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$. Ainsi, (x_*, y_*) est solution du système

$$\begin{cases} 4(x^3 - x + y) = 4\lambda x^3 \\ 4(y^3 + x - y) = 4\lambda y^4 \end{cases}$$

qui, après simplification, s'écrit $-x + y = \mu x^3 = -\mu y^3$ où $\mu := \lambda - 1$.

Premier cas : $\mu = 0$. On en déduit de $-x + y = \mu x^3$ que $x = y$. Comme $(x, y) \in M$ alors $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ et donc $f(x, y) = 1$.

Deuxième cas : $\mu \neq 0$. On déduit de $\mu x^3 = -\mu y^3$ que $x = -y$. Comme $(x, y) \in M$ alors $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ et donc $f(x, y) = 1 - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

En conclusion, $\min\{f(x, y); (x, y) \in M\} = 1 - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

Exercice 8 : Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n \setminus M$.

1. Caractériser les points critiques de la fonction $F : p \in M \mapsto \|a - p\|^2 \in \mathbb{R}$ en fonction des espaces tangents $T_x M$.
2. Calculer la distance de 0 à la surface $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 1\}$.

1. Si $F|_M$ est extrémale en $p_* \in M$ alors (thm extréma liés) $T_{p_*} M \subset \text{Ker}[dF(p_*)] = (p_* - a)^\perp$.
2. $M = \{xyz = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ (utiliser la caractérisation par le graphe), $f : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|X\|^2$ est de classe C^1 .

Montrons que f atteint son minimum sur M . Le point $(1, 1, 1) \in M$ donc $M \cap \overline{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 3) \neq \emptyset$. f est continue sur le compact $M \cap \overline{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 3) \neq \emptyset$, donc elle y atteint son inf en un point (x_*, y_*, z_*) . Il est alors clair que $f(x_*, y_*, z_*) = \min_M(f)$.

Montrons que $\min_M(f) = 3$, cad $\text{dist}(0, M) = \sqrt{3}$. D'après le thm des extremas liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$2 \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} = \nabla f(x_*, y_*, z_*) = \lambda \begin{pmatrix} y_* z_* \\ x_* z_* \\ x_* y_* \end{pmatrix}.$$

Comme $x_* y_* z_* = 1$ alors $\lambda = 2$. On en déduit que $(x_*, y_*, z_*) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (4 possibilités seulement réalisent $xyz = 1$) et que $f(x_*, y_*, z_*) = 3$.

Exercice 9 : Soit $V_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 1 \text{ et } x^4 + y^4 + z^4 = r\}$.

1. Pour quelles valeurs de $r > 0$ l'ensemble V_r est-il non vide ?
 2. Dans ce cas, est-ce une sous-variété ?
1. L'inégalité arithmético géométrique permet de montrer que $V_r \neq \emptyset$ si et seulement si $r \geq 3$. Mais je vais détailler ici une méthode systématique pour régler ce type de question, à l'aide du théorème des extrema liés.

Etape 1 : Soit $r > 0$. L'ensemble $M_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + z^2 = r\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ compacte. (définition par le graphe + fermée bornée). L'application $f : (x, y, z) \in M_r \mapsto xyz$ est continue sur le compact M_r donc elle atteint son min et son max en deux points $x_{min}, x_{max} \in M$ qui sont des points critiques de $f|_{M_r}$.

Etape 2 : Calculons les points critiques $(x_*, y_*, z_*) \in M_r$ de $f|_{M_r}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_*, y_*, z_*) = \lambda dF(x_*, y_*, z_*)$ où $F(x, y, z) := x^4 + y^4 + z^4 - r$. Ainsi

$$\begin{cases} y_* z_* = 4\lambda x_*^3 \\ x_* z_* = 4\lambda y_*^3 \\ x_* y_* = 4\lambda z_*^3 \\ x_*^4 + y_*^4 + z_*^4 = r \end{cases}$$

On déduit des 3 première égalités que

$$x_* y_* z_* = 4\lambda x_*^4 = 4\lambda y_*^4 = 4\lambda z_*^4.$$

Si $\lambda = 0$ alors (x_*, y_*, z_*) admet 2 composantes nulles et la 3e vaut $\sqrt[4]{r}$ donc $f(x_*, y_*, z_*) = 0$. Si $\lambda \neq 0$ alors $x_*^4 = y_*^4 = z_*^4 = \frac{r}{3}$ donc $(x_*, y_*, z_*) = (\pm \sqrt[4]{\frac{r}{3}}, \pm \sqrt[4]{\frac{r}{3}}, \pm \sqrt[4]{\frac{r}{3}})$ et $f(x_*, y_*, z_*) = \pm (\frac{r}{3})^{3/4}$. On en déduit que $\min_{M_r}(f) = -(\frac{r}{3})^{3/4}$ et $\max_{M_r}(f) = (\frac{r}{3})^{3/4}$. Ainsi, V_r est vide pour $r < 3$ et V_r ne contient que 4 points de la forme $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ lorsque $r = 3$.

Etape 3 : Montrons que V_r est non vide lorsque $r > 3$. On peut le déduire de la connexité de M_r , qui se déduit de celle de $\mathbb{S}^2$ (qui est connexe par arc) car

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \rightarrow & M_r \\ (x, y, z) & \mapsto & \sqrt[4]{r}(\text{sign}(x)\sqrt{|x|}, \text{sign}(y)\sqrt{|y|}, \text{sign}(z)\sqrt{|z|}) \end{array}$$

est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$ sur M_r . En effet,

– elle est bien à valeurs dans M_r car, pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$,

$$\sum_{j=1}^3 \left(\sqrt[4]{r} \text{signe}(x_j) \sqrt{|x_j|} \right)^4 = r \sum_{j=1}^3 x_j^2 = r,$$

– elle est continue (chq composante l'est),

– elle est bijective car la fonction $H_r : M_r \rightarrow \mathbb{S}^2$ définie par

$$H_r(y_1, y_2, y_3) = (\text{signe}(y_1)y_1^2, \text{signe}(y_2)y_2^2, \text{signe}(y_3)y_3^2)$$

satisfait $Y = G_r[H_r(Y)], \forall Y \in M_r$ et $X = H_r[G_r(X)], \forall X \in \mathbb{S}^2$.

Ainsi, M_r est l'image du connexe $\mathbb{S}^2$ par l'application continue G_r donc M_r est connexe.

Une alternative simple consiste à exhiber un point de la forme $(x, 1/x, 1)$ appartenant à V_r . Il suffit pour cela que $x^4 + \frac{1}{x^4} = r - 1$. Tracer la courbe $y + \frac{1}{y}$ pour se convaincre qu'un tel x existe bien, $\forall r > 3$.

2. Montrons que V_r est une sous-variété C^∞ de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ pour tout $r > 3$. On utilise la caractérisation par l'équation avec

$$F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xyz - 1, x^4 + y^4 + z^4 - r) \in \mathbb{R}^2.$$

qui vérifie

$$dF(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y, z) \in V_r$. Par l'absurde, on suppose que $dF(x, y, z)$ n'est pas surjective. Alors la matrice ci-dessus est de rang < 2 donc tous ses sous-déterminants 2×2 sont $= 0$, ce qui s'écrit

$$4z(y^4 - x^4) = 0, \quad 4y(z^4 - x^4) = 0, \quad 4x(z^4 - y^4) = 0.$$

Alors $x^4 = y^4 = z^4 = r/3$ et $1 = xyz = (r/3)^{3/4}$: contradiction. Ainsi, $dF(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est surjective pour tout $(x, y, z) \in V_r$.