Espaces de Hilbert 1

Produit scalaire - Inégalité de Cauchy-Schwarz - Identité du parallélogramme

Résumé de cours préparé par

Prof. Benouhiba

Sommaire

Produit scalaire

Le symbole K désigne le corps réel $\mathbb{R}$ ou le corps complexe $\mathbb{C}$.

Définition

Soit E un espace vectoriel sur K. On appelle produit scalaire sur E toute application

$$(.,.) : E \times E \to K$$

qui vérifie pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in K$

1. $(x, \lambda y + \mu z) = \lambda(x, y) + \mu(x, z)$
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $(x, x) \geq 0$
4. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

- Le symbole $\overline{Z}$ représente le conjugué de l'élément Z si $K = \mathbb{C}$.
- Dans le cas réel, la condition (2) s'écrit $(x, y) = (y, x)$.

Définition

Un espace pré-Hilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
L'espace pré-Hilbertien est dit réel (resp. complexe) si $K = \mathbb{R}$ (resp. $K = \mathbb{C}$).

- L'espace $K^n = \underbrace{K \times K \times ... \times K}_{n \text{ fois}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est un espace pré-Hilbertien par rapport au produit scalaire

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

$x = (x_1, ...x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in K^n.$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Soit $(E, (.,.))$ un espace pré-Hilbertien, pour tout $x, y \in E$ l'inégalité suivante est vraie

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

- $|(x, y)|^2 = (x, x)(y, y)$ si et seulement si x et y sont colinéaires ($x = \alpha y$ ou bien $y = \alpha x$).
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de déterminer l'angle entre deux éléments non nuls par la formule

$$cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)(y, y)}}.$$

Norme

Proposition

Tout espace pré-Hilbertien $(E, (.,.))$ est un K-evn. La norme associée au produit scalaire $(.,.)$ est définie par

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \forall x \in E.$$

- Bien que le produit scalaire est une opération algébrique, il induit sur l'espace E une structure topologique.
- L'inverse de la proposition ci-dessus n'est pas, en général, vrai.

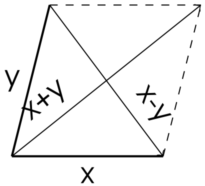
Identité du parallélogramme

Proposition

Un K-evn $(E, \|.\|)$ est un espace pré-Hilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'égalité : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 ...(P)$

- Le produit scalaire défini à partir d'une norme est donné par

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right).$$



- (P) signifit que la somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses deux diagonales.

Définition

Un espace de Hilbert est un espace pré-Hilbertien complet.

- Un espace de Hilbert est un Banach dont la norme est issue d'un produit scalaire.
- Tout espace pré-Hilbertien de dimension finie est un Hilbert.

Exemples d'espaces de Hilbert

- L'espace $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est l'ensemble des suites complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n^2 < +\infty.$$

L'espace $\ell^2 := \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{x_n} y_n ; x, y \in \ell^2$$

qui fait de lui un espace de Hilbert.

- L'espace $C([a,b],\mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes ($a,b \in \mathbb{R}, a < b$).
  L'espace $C([a,b],\mathbb{C})$ est muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

  L'espace pré-hilbertien $(C([a,b],\mathbb{C}), \langle .,.\rangle)$ n'est pas complet.

Contre exemple.
Sur l'intervalle $[-1, 1]$ on définit la suite de fonctions

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < -\frac{1}{n} \\ nx + 1, & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C[-1, 1]$ est une suite de Cauchy qui converge vers la fonction $f \notin C[-1, 1]$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Exemples d'espaces de Hilbert

- L'espace de Lebesgue $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que

$$\int_\Omega |f(t)|^2 dt < +\infty.$$

L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(t)\overline{g(t)}dt$$

qui lui donne la structure d'un espace de Hilbert.