Espaces de Hilbert 2

Orthogonalité - Projection orthogonale - Théorème de Riesz

Résumé de cours préparé par

Prof. Benouhiba

Sommaire

Orthogonalité

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Définition

Deux éléments $x, y \in H$ sont dits orthogonaux s'ils vérifient

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

On note $x \perp y$.
Un élément $x \in H$ est orthogonal à un sous ensemble $A \subset H$ si

$$\forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0.$$

On note $x \perp A$.
Deux sous ensembles A et B de H sont dits orthogonaux Si

$$\forall x \in A, \forall y \in B : x \perp y.$$

On note $A \perp B$.

Orthogonalité

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, les vecteurs $(0, 3, 1)$ et $(5, -2, 6)$ sont orthogonaux.
- Dans l'espace $C[-\pi, \pi]$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

les fonctions $h_1(x) = \sin(nx)$ et $h_2(x) = \cos(mx)$ sont orthogonales $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

- ▷ $\forall x \in H, x \perp 0_H$.
- ▷ $\forall x, y \in H; \forall \alpha, \beta \in K : (x \perp y \Rightarrow \alpha x \perp \beta y)$.
- ▷ Pour tout sous ensemble F de H : $F^\perp = \bigcap_{x \in F} \{x\}^\perp$.

Théorème de Pythagore

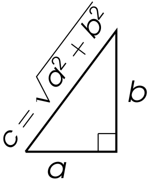
Théorème de Pythagore

Soient x_1 et x_2 deux éléments orthogonaux d'un espace de Hilbert. Alors,

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$

▷ Le théorème peut se généraliser à n éléments $x_i \in H, i = 1, ..., n,$ deux à deux orthogonaux : $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$

▷ Le théorème est une généralisation de la régle de Pythagore



Complément orthogonal

Définition

Le complément orthogonal d'un sous ensemble A de H est le sous ensemble, noté $A^\perp$, de tous les éléments de H orthogonaux à A

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp y, \forall y \in A\}.$$

- Le complément orthogonal de tout sous ensemble est un sous espace vectoriel fermé.
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \cap A^\perp = \{0_H\}$.
- $A \subset (A^\perp)^\perp$.
- $\overline{A} = (A^\perp)^\perp$.
- $(\overline{A})^\perp = A^\perp$.

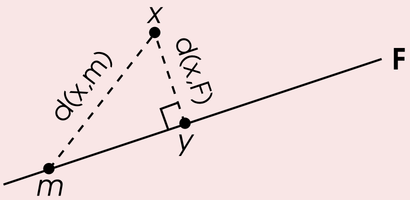
Projection orthogonale

Théorème

Soit F un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Alors,

1. pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in F$ tel que
$$\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\| = d(x, F).$$
2. Le point y est l'unique élément de F qui vérifie $(x - y) \perp F$.

On note y par $P_F(x)$.



Propriétés de l'application projection

Remarque

- Le théorème précédent affirme que pour tout sous espace vectoriel fermé F d'un espace de Hilbert H, l'application projection $P_F : H \longrightarrow F$ est bien définie.
- Le théorème de la projection orthogonale reste vrai si l'on remplace le sous espace vectoriel fermé par un sous ensemble convexe fermé.

▷ P_F est une application linéaire.

▷ $\forall x \in H : \|P_F x\| \leq \|x\|$.

▷ $\forall x \in H : P_F(P_F x) = P_F x$.

▷ $\forall x, y \in H : \langle P_F x, y\rangle = \langle x, P_F y\rangle$.

Décomposition orthogonale

Proposition

Soit F un sous espace fermé d'un espace de Hilbert H. Alors

1. $F = \{x \in H; P_F(x) = x\}$.
2. $F^\perp = Ker(P_F)$.
3. $H = F \oplus F^\perp$.
4. $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 = \|x - P_{F^\perp}(x)\|^2 + \|P_{F^\perp}(x)\|^2$, pour tout $x \in H$.

- ▷ D'une façon générale : $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.
- ▷ F est dense dans H si et seulment si $F^\perp = \{0_H\}$.

Théorème

Soit H un espace de Hilbert.

1. Pour tout $l \in H^*$ (le dual topologique de H), il existe un unique $a \in H$ tel que
$$\forall x \in H, l(x) = \langle x, a \rangle \text{ et } \|l\|_* = \|a\|.$$
2. Inversement, tout élément $a \in H$ définit une forme linéaire l_a continue sur H déterminée par : $\forall x \in H, l_a(x) = \langle x, a \rangle$.

Dualité et Théorème de Riesz

Remarque

- Un espace de Hilbert est isométriquement isomorphe à son dual topologique.
- Tous les espaces de Hilbert sont des espaces réflexifs $(H \sim H^{**})$.
- Il ne faut pas identifier simultanément les duaux de deux espaces de Hilbert dont l'un est contenu dans l'autre.