Cours de Mécanique Des Matériaux (MDM)

Introduction :

La mécanique étudie la réponse d'un corps solide à des forces ou moments appliqués.

La MDM a pour but d'étudier le comportement mécanique des matériaux et de connaître leur réponse à une sollicitation donnée. Les variables mises en jeu sont :

- Le tenseur de contrainte σ
- Le tenseur de déformation ε

L'objectif de ce cours est de donner un aperçu général du comportement mécanique des matériaux, et de sa modélisation. Le cours s'articule sur les cinq chapitres suivants :

Chapitre 1 : Description des essais mécanique couramment utilisés pour caractériser le comportement mécanique des matériaux ;
Présentation de quelques lois phénoménologiques utilisées dans les calculs simples

Chapitre 2 : Nous donnerons le cadre thermodynamique dans lequel s'inscrivent les lois de comportement des matériaux

Chapitre 3 : nous nous intéressons ensuite au comportement élastique et viscoélastique et

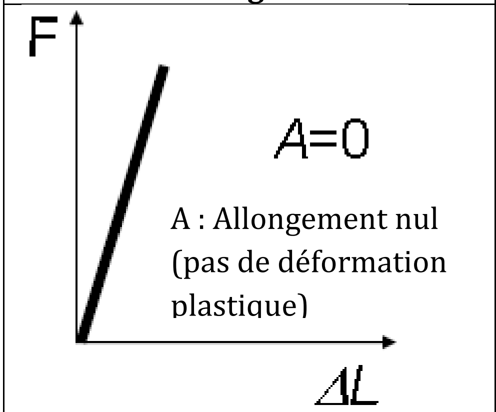
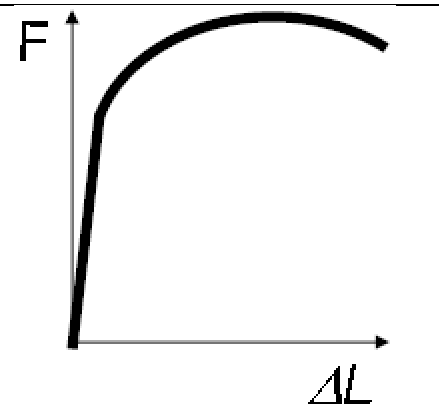
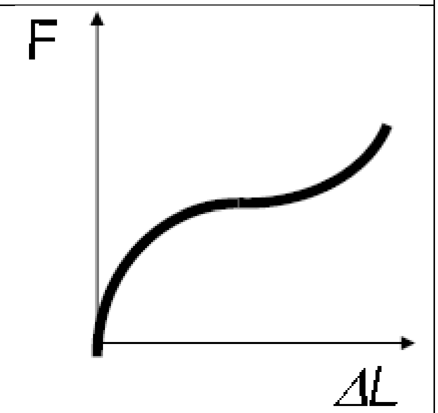
Chapitre 4 : comportement plastique et viscoplastique

Chapitre 5 : est consacré aux principaux modèles d'endommagement et de rupture

Rappel sur les PROPRIETES MECANIQUES DES MATERIAUX

CLASSIFICATION DES MATERIAUX

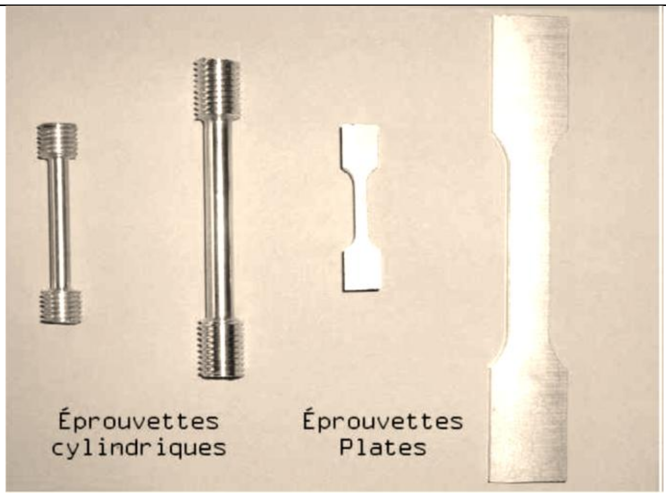
Trois comportements possibles

Fragile	Ductile	Non linéaire
		
•verre •céramique •béton •polymères thermodurcissables	•métaux •alliages •polymères thermoplastiques	•caoutchouc •élastomères

Chapitre 1 : Essais mécaniques et quelques lois simples

1.1. Essais de traction

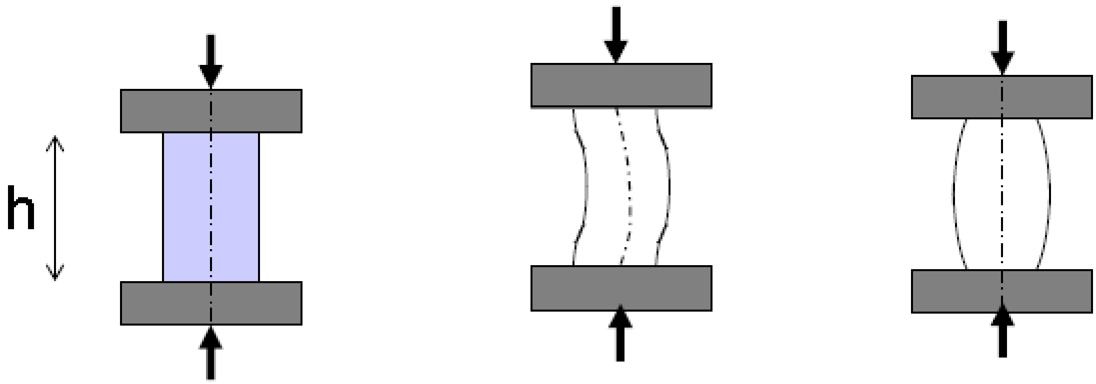
C'est l'essai le plus simple et le plus courant.



Exemples d'éprouvettes de traction

1.2. Essais de compression

Utilisé pour déterminer les contraintes de rupture des matériaux fragiles (béton, céramique…)



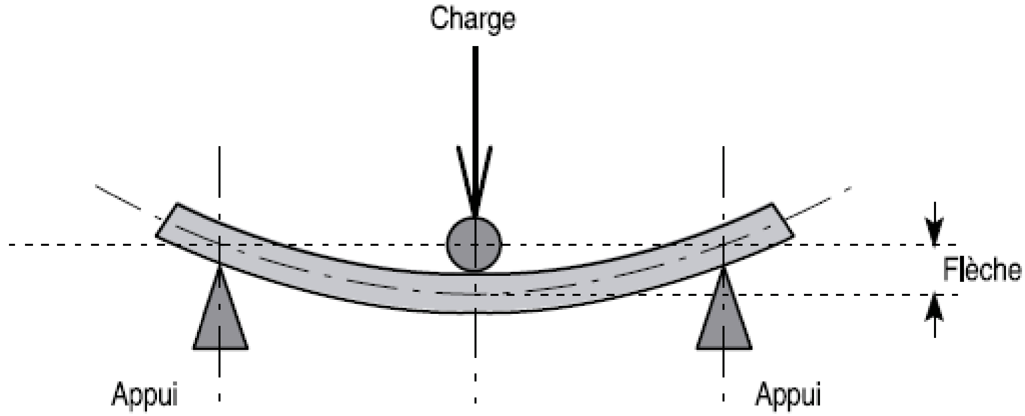
Flambage

Barillet

Exemple d'essai de compression d'une poutre de béton

1.3. Essais de flexion

Il présente la même utilité que les essais de compression, il est peu utilisé pour les matériaux ductiles.



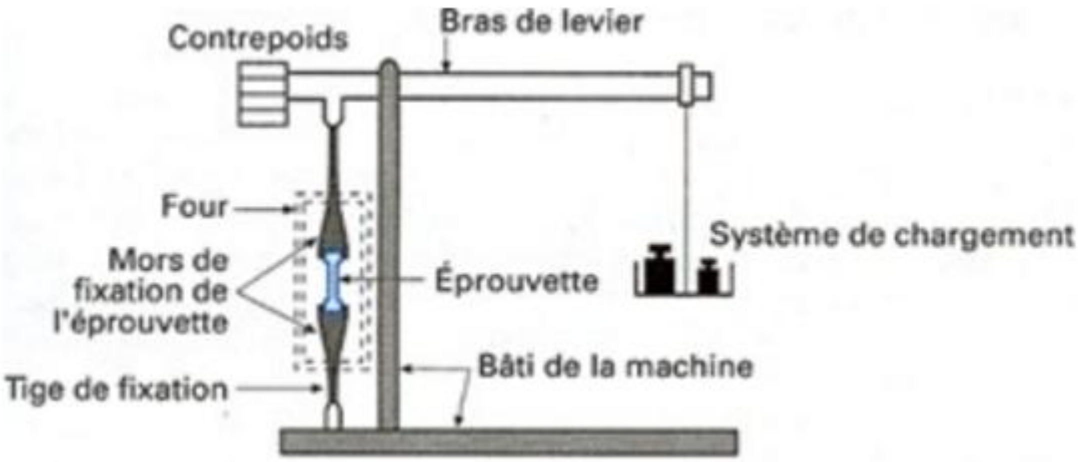
1.4. Essai de torsion

Réalisé sur éprouvette pleine, cet essai est essentiellement utilisé à haute température pour connaître l'aptitude à la mise en forme des métaux. Il permet d'obtenir le module de Coulomb G (ou module de cisaillement).

1.5. Essai de fluage

Le fluage est une déformation plastique qui évolue avec le temps dans un matériau qui est soumis à une contrainte (ou une force) constante et à température constante (rupture possible). C'est le même principe qu'un essai de traction mais au lieu appliquer une vitesse de déformation on applique une charge fixe.

Exemple : lorsqu'on dépasse le tiers de la température de fusion dans les alliages métalliques, on observe au contraire des déformations liées au caractère visqueux du comportement.



1.6. Essai de relaxation

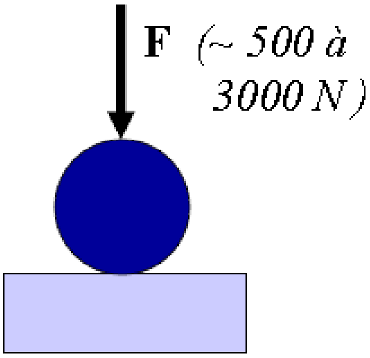
Une autre manière de caractériser la viscosité d'un matériau est de le soumettre à un essai de relaxation, dans lequel la déformation de l'éprouvette est maintenue constante après une prédéformation intitiale. Plus le comportement du matériau présente une composante visqueuse importante, et plus la contrainte chute rapidement, pour atteindre éventuellement une valeur nulle. Cet essai est essentiellement réalisé sur les métaux et les polymères.

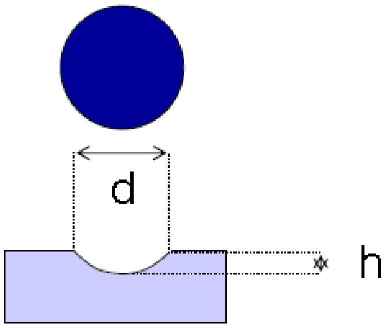
1.7. Essais de dureté

La dureté quantifie <u>la résistance d'un matériau à la pénétration</u> sous une certaine charge F.
Elle est fonction de :

- déformations élastiques et plastiques
- forces de frottements sur la surface du matériau
- géométrie du pénétrateur
- force appliquée

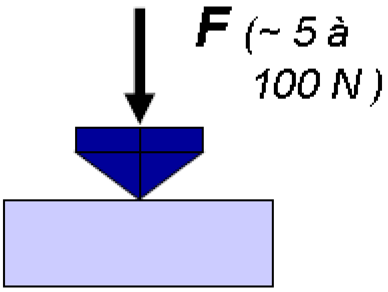
• essai Brinell



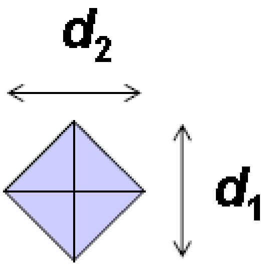


La dureté Brinell (HB) est un nombre proportionnel à *F / S*

• essai Vickers



Diamant de forme pyramidale à base carrée



forme de l'empreinte

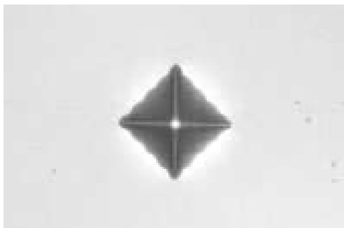
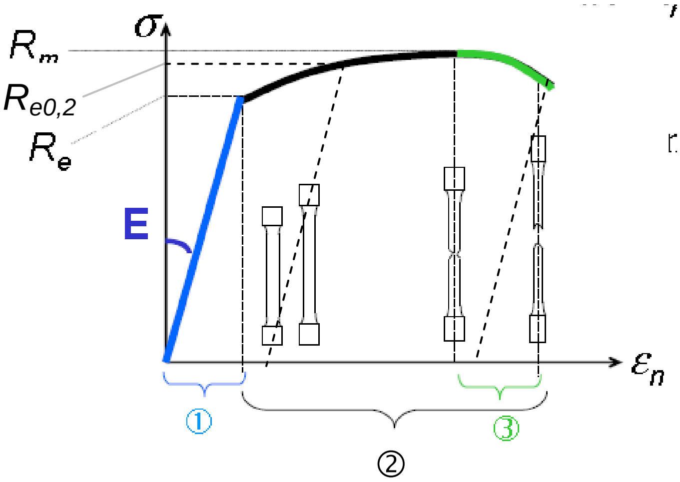


Photo d'une Empreinte Vickers

On mesure la moyenne *d* des deux diagonales de l'empreinte. On en déduit la dureté Vickers :
***Hv* = 1,854 *F* / *d*2**

1.8. *Courbe force-déplacement ou contrainte-déformation*

Nous prenons l'exemple d'un essai de traction d'un matériau ductile.



① domaine élastique (déformation réversible)

② domaine plastique (déformation irréversible)

③ striction puis rupture (déformation irrémédiable)

Exploitation de la courbe

E : module de Young. C'est une caractéristique intrinsèque du matériau

R_e *:* limite d'élasticité (la limite entre zones élastique et plastique)

$R_{e0.2}$ *:* limite d'élasticité conventionnelle (contrainte correspondant à 0,2 % de déformation plastique)

R_m **:** résistance à la traction (contrainte maximale atteinte durant l'essai de traction)

A : allongement à la rupture $A = (L_f - L_0)/L_0 = \Delta L / L_0$

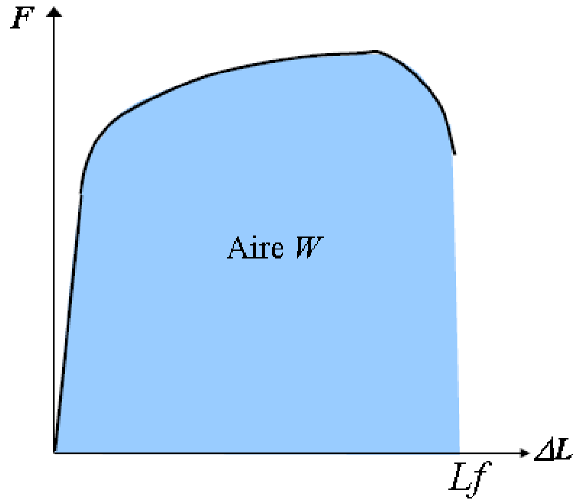
z : striction correspondant à la variation de section à l'endroit où la rupture s'est produite

$z = (S_0 - S_f) / S_0$

Autres caractéristiques

• **Ductilité :** propriété grâce à laquelle un matériau peut se déformer de façon permanente avant de se rompre *(aptitude des matériaux à la déformation plastique).* C'est un atout important pour la mise en forme des matériaux.

• **Ténacité :** la ténacité : capacité d'un matériau à emmagasiner de l'énergie avant sa rupture. Elle caractérise la résistance du matériau à la propagation brutale de fissures. L'aire sous la courbe de traction *F(*D*L)* représente l'énergie nécessaire pour rompre l'éprouvette.



$$W = \int_0^{L_f} F(\Delta L).dL$$

• **La rigidité** : fonction de l'intensité des liaisons entre atomes ou molécules (module d'Young)

• **La résistance** : caractérise la contrainte maximale que peut supporter un matériau avant de se rompre

• **La résilience** : capacité à emmagasiner de l'énergie au cours d'une déformation élastique

1.9. Essai de choc

Chapitre 3 : Élasticité – Viscoélasticité

3.1. Élasticité linéaire

3.1.1. Loi de Hooke généralisée

Faire un rappel sur le ressort

On définit la contrainte et la déformation localement par un tenseur 3×3, le tenseur des contraintes [σ_{ij}] et le tenseur des déformations [ε_{ij}].

Le comportement élastique du matériau est modélisé par un tenseur d'ordre 4 [C_{ijkl}] contenant 81 coefficients élastiques. Le nombre de coefficients indépendants est réduit à 21 en tenant compte de la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, et de la stabilité énergétique du tenseur. On a :

$$\boldsymbol{\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

où [C_{ijkl}] est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité, avec la condition $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{jilk}$.

Pour simplifier l'écriture, les composantes de la matrice présente dans la relation précédente sont souvent notées C_{IJ} , avec I et J variant de 1 `a 6. Cette notation de 1 à 6, appelée notation de Voigt, avec les axes de compression/traction notés de 1 à 3 et les axes de cisaillement notés de 4 à 6.

Remarque : De même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\boldsymbol{\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}}$$

où [S_{ijkl}] est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des compliances ou tenseur des complaisances élastiques du matériau.

3.1.2. Énergie de déformation élastique

L'énergie interne (de) = **l'énergie fournie pour déformée le matériau (dw)** + l'énergie thermique dissipée
C'est l'énergie dw qui nous intéresse maintenant.

Nous avons : $dw = \sigma_{ij} : d\varepsilon_{ij}$

Ceci implique que : $\sigma_{ij} = \dfrac{dw}{d\varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

D'où : $C_{ijkl} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}$

Ce qui implique : $C_{ijkl} = C_{klij}$

Ceci veut dire que le tenseur des rigidités est symétrique et possède par conséquent 21 composantes indépendantes. ***C'est le cas le plus général.***

L'énergie de déformation par unité de volume est définie :

$$w = \frac{1}{2} C : \varepsilon : \varepsilon$$

3.1.3. Relations de symétrie

En pratique, les matériaux possèdent des symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités. Les principaux cas rencontrés sont :
L'orthotropie : lorsqu'il y a une symétrie par rapport à trois plans orthogonaux, ceci réduit le nombre de composantes à 9 (c'est le cas par exemple du bois et des cristaux orthorhombiques) ;
La symétrie cubique (orthotropie avec des propriétés identiques dans les trois directions orthogonales aux plans de symétrie), dans ce cas le nombre de composantes réduit à 3 (c'est le cas de la structure de nombreux métaux). Les trois composantes indépendantes de C sont souvent notées $C_{11}(= C_{1111})$, $C_{12}(= C_{1122})$ et $C_{44}(= C_{2323})$.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

L'isotropie (mêmes propriétés dans toutes les directions), qui réduit le nombre de composantes à 2 par la relation $C_{44} = 1/2\ (C_{11} - C_{12})$. Cette hypothèse est largement utilisée en mécanique des milieux continus, pour les matériaux courants.

3.2. Viscoélasticité

(pour les milieux viscoélastiques, on parle de rhéologie : leur réponse à des forces / moments / pressions appliqués)

$\underbrace{\text{Visco}}\underbrace{\text{élasticité}}$

Viscosité
↳ Pouvoir amortissant
↳ Capacité d'un matériau à conserver et restituer de l'énergie après déformation

Élasticité idéale
↳ Effet ressort
↳ Capacité d'un matériau à dissiper de l'énergie

3.1.1. Modèle de Kelvin-Voigt
3.1.2. Modèle de Maxwell