

TD/TP2: INTEGRATION NUMERIQUE

1. PROBLEME

Certaines fonctions qu'on doit intégrer $\int_a^b f(x)dx$ sont trop difficiles à calculer (à la main) leur calcul est long et peut nécessiter l'appel à d'autres fonctions elles-mêmes longues à évaluer

2. SOLUTION

Trouver des méthodes qui permettent de calculer rapidement une valeur approchée de l'intégrale à calculer. La fonction à intégrer est remplacée par un polynôme. Il existe plusieurs méthodes d'intégration numériques, nous allons nous intéresser aux méthodes des trapèzes et de Simpson

3. MÉTHODES DES TRAPÈZES

- **Principe**

On veut estimer $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide de la méthode numérique des trapèzes on commence par subdiviser l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n sous-intervalles

Posez $h = \frac{b-a}{n}$ tel que h est le pas de découpage et n le nombre de sous intervalles

Considérer les points $x_0 = a, x_1 = a + h, x_i = a + ih, x_n = a + nh = b$
 $f(x_i) = f_i ; i = 0, 1, 2, \dots, n.$

- **La formule des trapèzes :**

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

- **Evaluation de l'erreur :**

$$E(h) \leq \frac{h^2}{12} (b-a) \max |(f''(\xi))|, \quad \xi \in [a, b].$$

4. MÉTHODE DES SIMPSON

- **Principe**

on veut estimer $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide de la méthode numérique Simpson on commence par subdiviser l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en un nombre **pair** de sous-intervalles

poser $h = \frac{b-a}{n}$ et considérer les points $x_0 = a, x_1 = a + h, x_i = a + ih, x_n = a + nh = b$

- **La formule de Simpson:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

- **Evaluation de l'erreur**

$$E(h) \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \max |(f^{(4)}(\xi))|, \quad \xi \in [a, b].$$

Exercice 1

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération :

T(en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ (en m/s^2)	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

-Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$, par la méthode des trapèzes puis par Simpson.

Exercice 2

Calculer $f(x) = \int_{-1}^1 e^x dx$ pour $n = 6$

1. Selon la méthode des trapèzes
2. Selon la méthode de SIMPSON
3. Estimer les résultats obtenus

Exercice 3

Trouver le nombre n de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à $0.5 \cdot 10^{-3}$ près grâce à la méthode de Simpson et des trapèzes, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx$$

Exercice 4

Elaborer un programme Fortran77 qui par la méthode des trapèzes et de Simpson permet de calculer l'intégrale d'une fonction