

TD/TP 4: Résolution d'un système linéaire $Ax=b$

1. Problème :

Soit un système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice carrée ($n \times n$) et x et b des vecteurs à n composantes. Résoudre le système $Ax=b$ consiste à trouver les vecteurs x vérifiant le système. Les méthodes classiques (Cramer deviennent très lentes en temps d'exécution dès que n dépasse 4 (exp pour $n=10$ méthode Cramer exige 3×10^9 opérations)).

2. Solution

Utilisation des méthodes numériques peuvent être directes comme la méthode de Gauss

3. Méthode De Gauss (Stratégie sans pivotation)

Pour résoudre le système linéaire, on le transforme en un système triangulaire supérieur équivalent. La matrice d'origine A est transformée en une matrice triangulaire supérieure comme suit : $[A, b] \rightarrow [A', b']$. Où A' : est une matrice triangulaire supérieure.

Etape 1 : élimination de Gauss

En supposant que $a_{kk} \neq 0$, on pose $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ $i=k+1 \dots n$, puis on remplace la ligne L_i par la ligne $L_i' = L_i - m_{ik} * L_k$

Etape 2 : remontée

C'est la phase de détermination de la solution du nouveau système **triangulaire supérieur**, et qui est très simple à résoudre.

- **Calcul déterminant (stratégie sans pivotation)**

$$\text{Det}(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

4. Méthode De Gauss (Stratégie avec pivotation)

La méthode **Gauss (sans pivotation)** s'applique lorsque tous les pivots ne sont pas nuls. Or il peut s'avérer que ce ne soit pas le cas ou même que le pivot soit trop petit ce qui peut entraîner des erreurs d'arrondi importantes dans le calcul

Afin de diminuer les risques d'incidents numériques, le pivot choisi est le plus grand en valeur absolue. Lorsque ce pivot est trouvé, on effectue les permutations nécessaires pour faire apparaître ce nouveau pivot à la place de l'ancien pivot.

- ✓ **Pivot partiel** : on choisit comme pivot l'élément a_{rk} tel que $a_{rk} = \max |a_{ik}|$ ($k \leq n$) et on permute les lignes r et k
- ✓ **Pivot total** : on choisit comme pivot l'élément a_{rm} tel que $a_{rm} = \max |a_{ij}|$ ($k \leq i ; j \leq n$) et on permute les lignes r et k puis les colonnes m et k

Remarque : à chaque permutation des colonnes les inconnues changent de place

Calcul déterminant (stratégie avec pivotation)

$$\text{Det}(A) = (-1)^p \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

ou p désigne le nombre de permutation (lignes et colonnes)

Exercice 1

- Résoudre par la méthode de GAUSS (stratégie sans pivotation) le système linéaire suivant

$$6X + 1Y + 1Z = 12$$

$$2X + 4Y = 0$$

$$1X + 2Y + 6Z = 6$$

Exercice 2

Utiliser l'algorithme de GAUSS (avec pivotation partielle, puis totale) pour résoudre le système linéaire suivant (le mettre sous la forme $Ax=b$) :

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 1$$

$$2X_1 + 4X_2 + 4X_3 = 2$$

$$X_1 + 5X_2 + 6X_3 = -6$$

- Calculer le déterminant de la matrice A .