Centre Universitaire de Relizane Année Universitaire : 2021/2022
Spécialité : LMD SM " 2 ème année physique & chimie"
Module :Méthodes Numériques et Programmation

TD/TP N°6: Résolution Numérique des équations différentielles

On appelle équation différentielle une équation reliant une fonction et ses dérivées successives. Lorsque les conditions initiales sont précisées, on obtient un problème de condition initiale (p.c.i) encore appelé problème de Cauchy

- **Problème de Cauchy**

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

$Y(t_0) = Y_0$

$Y'(t)= f(t, y(t))$

$Y(t_0) = Y_0$(condition initiale ou condition de Cauchy).

Théorème

Soit f : $[t_0, T] \times R \to R$ une fonction telle que
1. f est continue sur $[t_0,T] \times R$.
2. f est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est à dire il existe une constante L > 0 telle que pour tout $t \in [t_0, T]$ et y1, y2 $\in$ R, on ait :
$|f(t, y1) - f(t, y2)| \leq L|y1 - y2|$. Alors, le problème de Cauchy admet une unique solution y 2.

- **Algorithme d'Euler**

Etant donné un pas h une condition initiale (T_0,Y_0) et d'un nombre maximale d'itérations N

$Y_{n+1}=Y_n+h*F(T_n,Y_n)$ $0 \leq n \leq N-1$

$T_{n+1}=T_n+h$

- **Algorithme Runge kutta d'ordre 2**

$T_{n+1}=T_n +h$ $0 \leq n \leq N-1$

$P_{n,1}= F(T_n, Y_n)$

$P_{n,2}= F(T_{n+1}, Y_n+ (h* P_{n,1}))$

$Y_{n+1}=Y_n+(\frac{h}{2}*(P_{n,1}+(h* P_{n,2}))$

- **Algorithme Runge kutta d'ordre 4**

$T_{n+1}=T_n +h$ $0 \leq n \leq N-1$

$P_{n,1}= F(T_n, Y_n)$

$P_{n,2}= F(T_n+\frac{h}{2} , Y_n+(\frac{h}{2}* P_{n,1}))$

$P_{n,3}= F(T_n+\frac{h}{2} , Y_n+(\frac{h}{2}* P_{n,2}))$

$P_{n,4}= F(T_{n+1}, Y_n+(h* P_{n,3}))$

$Y_{n+1}=Y_n+(\frac{h}{6}*(P_{n,1}+ 2* P_{n,2}+ 2* P_{n,3}+ P_{n,4}))$

Exercice1

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \mathbf{Y'(t)=Y(t)+t} & \mathbf{t \in [0,1]} \\ \mathbf{Y(0)=1} \end{cases}$$

Appliquer la méthode d'Euler a ce problème, avec h=0.1 puis évaluer la solution en t=1.

Exercice 2

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \mathbf{Y' = \boldsymbol{Y} - \frac{2t}{Y}} \\ \mathbf{Y(0)=1} \end{cases}$$

Approcher la solution de l'équation différentielle ci-dessous en t=0.2 en utilisant La méthode de Runge Kutta d'ordre 2 et4, avec un pas h=0.2

Exercice 3

Écrire un programme en fortran 77 permettant d'approcher la solution d'une équation différentielle via la méthode uler

Y'(t)=-Y(t)+t+1

Y(0)=1

Appliquer la méthode d'Euler avec h=0.25 et n=4(prendre 4 chiffres âpres la virgule)