**Équations Di"érentielles du 1er Ordre**

Philippe Briand

https:[//w](http://www.lama.univ-savoie.fr/)ww[.lama.univ-savoie.fr/˜b](http://www.lama.univ-savoie.fr/)riand/ DUT Génie Civil 1re année



IUT de Chambéry, 1er semestre 2017

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe". constants

Séance no 1 du 07/02/2017

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équations Di"érentielles

Sommaire

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Objectifs de la séance

1. Comprendre ce qu’est une équation di"érentielle

2. Acquérir le vocabulaire associé

3. Résolution des équa. di". linéaires du 1er ordre à coe". constants

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Résoudre une équation di"érentielle

* C’est trouver **l’ensemble** des fonctions solutions de cette équation
* Par exemple, résoudre sur R l’équation di"érentielle

*y ÕÕ*(*x* ) *≠* 2*y Õ*(*x* )+ 5*y* (*x* )= cos(3*x* + 2)*.*

c’est trouver toutes les fonctions *y* : R *≠æ* R deux fois dérivables t.q.

*’x œ* R*, y ÕÕ*(*x* ) *≠* 2*y Õ*(*x* )+ 5*y* (*x* )= cos(3*x* + 2)*.*

* Attention, la variable de la fonction — dans les exemples précédents *x*
* est souvent omise
	+ On écrit en général : Résoudre sur R l’équation di"érentielle

*y ÕÕ ≠* 2*y Õ* + 5*y* = cos(3*x* + 2)

* Si l’équation di"érentielle décrit un phénomène physique évoluant dans

le temps, la variable de la fonction *y* est notée *t* plutôt que *x*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Qu’est-ce qu’une équation di"érentielle ?

* Une équation di"érentielle est :
* une équation fonctionnelle : l’inconnue est une fonction notée

traditionnellement *y*

* on résout cette équation sur un intervalle de R
* Exemples :
	1. Trouver les fonctions *y* : R *≠æ* R vérifiant
* faisant intervenir les dérivées de la fonction *y*

*’x œ* R*, y Õ*(*x* ) *≠* 2 *y* (*x* )= 3;

2. Trouver les fonctions *y* : R+ *≠æ* R vérifiant

*’x Ø* 0*,*

*y* (*x* )*y Õ*(*x* )= *e≠x ,*

*y* (0)= 1;

3. Résoudre sur R l’équation di"érentielle

*y ÕÕ*(*x* ) *≠* 2*y Õ*(*x* )+ 5*y* (*x* )= cos(3*x* + 2)*.*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. Di". du 1er Ordre

Définition

Une équation di"érentielle du 1er ordre est une équation di"érentielle dans laquelle interviennent seulement : la fonction *y* , sa dérivée *y Õ* et la variable de la fonction *x*

* *y Õ*(*x* ) *≠* 2*xy* (*x* )= 3, *y* (*x* )*y Õ*(*x* )= 3*x* 2 sont du 1er ordre
* *y ÕÕ*(*x* ) *≠* 2*y Õ*(*x* )+ 5*y* (*x* )= cos(3*x* + 2) n’est pas du 1er ordre mais du 2e

Notations : on considère dans la suite

* un intervalle *I* de R ; par exemple *I* = R, *I* = [0*,* +*Œ*[, *I* =]0*,* +*Œ*[, . . .
* deux fonctions *a* : *I ≠æ* R et *f* : *I ≠æ* R continues sur *I* ;
* un point *x*0 appartenant à l’intervalle *I*.

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équations Di"érentielles

Sommaire

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. Di". Linéaire du 1er ordre

Exemple(s)

Dans l’exemple *xy Õ*(*x* ) *≠ y* (*x* )= 2, il faut réécrire l’équation :

*y* (*x* ) *≠*

*Õ*

*y* (*x* ) 2

*x*

= *,*

*x*

*a*(*x* )= 1 *, f* (*x* )= 2

*x*

*x*

On résout sur *I≠* =] *≠ Œ,* 0[ puis sur *I*+ =]0*,* +*Œ*[ car R*ú* n’est pas un

intervalle !

Définition

Une solution de (L) est une fonction *y* : *I ≠æ* R, dérivable sur *I* telle que

*’x œ I, y Õ*(*x* ) *≠ a*(*x* ) *y* (*x* )= *f* (*x* )*.*

Résoudre ou intégrer l’équation (L) c’est trouver l’ensemble des fonctions qui sont solutions de (L).

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. Di". Linéaire du 1er ordre

Définition

Une équation di"érentielle linéaire du 1er ordre est une équation di"érentielle du type

*’x œ I,*

*y Õ*(*x* )*≠a*(*x* ) *y* (*x* )= *f* (*x* )

(L)

Exemple(s)

1. L’équation di"érentielle *y Õ*(*x* ) *≠* 3*y* (*x* )= 0 correspond à *a ©* 3 et *f ©* 0;

on prend *I* = R

2. Dans l’exemple *y Õ*(*x* ) *≠ x* 2 *y* (*x* )= ln(*x* ), *a*(*x* )= *x* 2 et *f* (*x* )= ln(*x* ) ; on

prend *I* =]0*,* +*Œ*[.

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Définition

Définition

Il s’agit d’une équa. di". du type

*’x œ I,*

*y Õ*(*x* ) *≠ a y* (*x* )= *f* (*x* )

(LC)

* La fonction *f* n’est pas constante.

Remarque(s)

On résout une telle équa. di". sur un intervalle *I* sur lequel *f* est continue

* *f* (*x* )= cos(*x* ), *I* = R
* *f* (*x* )= ln(*x* ), *I* =]0*,* +*Œ*[

Définition

L’équation homogène — ou sans second membre — associée à (LC) est

*y Õ*(*x* ) *≠ a y* (*x* )= 0*.*

* La fonction *a*(*x* ) est constante égale à *a*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équations Di"érentielles

Sommaire

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Solution générale de l’équation complète

Théorème

*La solution générale de y Õ*(*x* ) *≠ a y* (*x* )= *f* (*x* ) *est :*

*y* (*x* )= *yh*(*x* )+ *yp*(*x* )= *C eax* + *yp*(*x* )*, C œ* R*,*

*avec*

* *yh solution générale de l’équation homogène*
* *yp une solution particulière de l’équation complète c’est à dire une*

*fonction vérifiant*

*’x œ I, ypÕ* (*x* ) *≠ a yp*(*x* )= *f* (*x* )

* Pour résoudre l’équation complète, il faut savoir comment trouver une

solution particulière

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Théorème

Résolution de *y Õ ≠ ay* = 0

*Les solutions de l’équation homogène y Õ*(*x* ) *≠ a y* (*x* )= 0 *sont les fonctions*

*y* (*x* )= *C eax , C œ* R

* Pour toute valeur de la constante *C* , on obtient une solution

solutions de cette équation ; on note *yh*(*x* )= *C eax* , *C œ* R.

Exemple(s)

1. *y Õ*(*x* ) *≠* 2 *y* (*x* )= 0 : *yh*(*x* )= *C e*2*x* , *C œ* R
2. *y Õ*(*x* )= 0 : *yh*(*x* )= *C* , *C œ* R

3. *y Õ*(*x* )+ 3 *y* (*x* )= 0 : *yh*(*x* )= *C e≠*3*x* , *C œ* R

4. 2 *y Õx* ) *≠ y* (*x* )= 0 : *yh*(*x* )= *C ex/*2, *C œ* R

* La solution générale de l’équation homogène désigne l’ensemble des
* Il y a donc une infinité de solutions

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Solution particulière : cas particuliers

* *f* (*x* )= *k*
* *a* = 0, *yp* (*x* )= *kx* ;
* *f* (*x* )= *P*(*x* ) où *P* polynôme de degré *n*
* *a ”*= 0, *yp* (*x* )= *≠k/a* ;
* Si *a ”*= 0, on cherche une sol. part. du type *yp* (*x* )= *Q*(*x* ) avec *Q*
* *a* = 0, on cherche une sol. part. du type *yp* (*x* )= *x Q*(*x* ) avec *Q*

polynôme de degré *n* = deg *P* ;

polynôme de degré *n* = deg *P* ;

* *y Õ* (*x* ) *≠ y* (*x* )= 2*x* + 3 : *yp* du type *yp* (*x* )= *a*1*x* + *a*0 ;
* *f* (*x* )= *–* cos(*Êx* + *Ï*)+ *—* sin(*Êx* + *Ï*) : *yp* du type
* *y Õ* (*x* )= 2*x* + 3 : *yp* du type *yp* (*x* )= *x* (*a*1*x* + *a*0)= *a*1*x* 2 + *a*0*x* .

*yp*(*x* )= *A* cos(*Êx* + *Ï*)+ *B* sin(*Êx* + *Ï*)

* *y Õ* (*x* ) *≠ y* (*x* )= 2 sin(*x* + 3) *≠* 4 cos(*x* + 3) ; *Ê* = 1, *Ï* = 3 : *yp* du type
* Si *f* (*x* )= *–* cos(*Êx* + *Ï*), *yp* (*x* )= *A* cos(*Êx* + *Ï*)+ *B* sin(*Êx* + *Ï*) ;

*yp* (*x* )= *A* sin(*x* + 3)+ *B* cos(*x* + 3) ;

* *y Õ* (*x* ) *≠ y* (*x* )= 2 sin(*x* + 3) : *yp* du type

*yp* (*x* )= *A* sin(*x* + 3)+ *B* cos(*x* + 3).

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Exemple : *y Õ*(*x* ) *≠* 2*y* (*x* ) = 3

* La solution générale de l’équation homogène est

*yh*(*x* )= *C e*2*x , C œ* R

* On remarque que *yp*(*x* )= *≠*3*/*2 est solution de l’eq. complète
* La solution générale de l’équation complète est

*yg* (*x* )= *C e*2*x ≠* 3*/*2*, C œ* R

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Exemples

1. Résoudre l’équation di"érentielle

*y Õ*(*x* )+ 2*y* (*x* )= 2*x* + 1

 To be continued

1. Résoudre
2. Résoudre

*y Õ*(*t*) *≠* 4*y* (*t*)= cos(3*t*)

2*y Õ*(*t*)+ 4*y* (*t*)= (*t*2 + *t* + 1)*e≠t*

4. Résoudre

*y Õ*(*x* )+ *y* (*x* )= (*x* + 1)*e≠x*

5. Résoudre

*y Õ*(*x* )+ *y* (*x* )= *e≠x*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Solution particulière : cas particuliers

* *f* (*x* )= *esx P*(*x* ) où *P* est un polynôme de degré *n*
* *a* = *s*, *yp* (*x* )= *esx xQ*(*x* ) avec *Q* polynôme de degré *n* = deg *P*.
* *y Õ* (*x* ) *≠ y* (*x* )= *e≠x* (2*x* + 3) : *yp* du type

*yp* (*x* )= *e≠x* (*a*1*x* + *a*0) *.*

* *y Õ* (*x* )+ *y* (*x* )= *e≠x* (2*x* + 3) : *yp* du type

*yp* (*x* )= *x* (*a*1*x* + *a*0) *e≠x* = !*a*1*x* 2 + *a*0*x* " *e≠x .*

* Si *f* = *f*1 + *f*2, *yp* = *yp*1 + *yp*2
* *a ”*= *s*, *yp* (*x* )= *esx Q*(*x* ) avec *Q* polynôme de degré *n* = deg *P* ;

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Objectifs de la séance

1. Pratique des EDL1D à coe". constants

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. di". linéaires du 1er ordre

Séance no 2 du 10/02/2017

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Solution particulière : cas particuliers

* *f* (*x* )= *–* cos(*Êx* + *Ï*)+ *—* sin(*Êx* + *Ï*) : *yp* du type

*yp*(*x* )= *A* cos(*Êx* + *Ï*)+ *B* sin(*Êx* + *Ï*)

* Attention si *f* (*x* )= *–* cos(*Êx* + *Ï*),

*yp* (*x* )= *A* cos(*Êx* + *Ï*)+ *B* sin(*Êx* + *Ï*)

* *f* (*x* )= *esx P*(*x* ) où *P* est un polynôme de degré *n*
* *a* = *s*, *yp* (*x* )= *esx xQ*(*x* ) avec *Q* polynôme de degré *n* = deg *P*.
* *y Õ* (*x* ) *≠ y* (*x* )= *e≠x* (2*x* + 3) : *yp* du type

*yp* (*x* )= *e≠x* (*a*1*x* + *a*0) *.*

* *y Õ* (*x* )+ *y* (*x* )= *e≠x* (2*x* + 3) : *yp* du type

*yp* (*x* )= *x* (*a*1*x* + *a*0) *e≠x* = !*a*1*x* 2 + *a*0*x* " *e≠x .*

* Si *f* = *f*1 + *f*2, *yp* = *yp*1 + *yp*2
* *a* =*” s*, *yp* (*x* )= *esx Q*(*x* ) avec *Q* polynôme de degré *n* = deg *P* ;

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Rappels

* La solution générale de l’équation *y Õ*(*x* )*≠ay* (*x* )= 0 est

*yh*(*x* )= *C eax , C œ* R

* La solution générale de l’équation *y Õ*(*x* ) *≠ ay* (*x* )= *f* (*x* ) est

*yg* (*x* )= *C eax* + *yp*(*x* )*, C œ* R

où *yp* est une solution particulière de l’équation.

* *f* (*x* )= *k*
* *a* = 0, *yp* (*x* )= *kx* ;
* *f* (*x* )= *P*(*x* ) où *P* polynôme de degré *n*
* *a ”*= 0, *yp* (*x* )= *≠k/a* ;
* Si *a ”*= 0, on cherche une sol. part. du type *yp* (*x* )= *Q*(*x* ) avec *Q*
* *a* = 0, on cherche une sol. part. du type *yp* (*x* )= *x Q*(*x* ) avec *Q*

polynôme de degré *n* = deg *P* ;

polynôme de degré *n* = deg *P* ;

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. di". linéaires du 1er ordre

Séance no 3 du 14/02/2017

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Exemples

1. Résoudre l’équation di"érentielle

*y Õ*(*x* )+ 2*y* (*x* )= 2*x* + 1

 To be continued

1. Résoudre
2. Résoudre

*y Õ*(*t*) *≠* 4*y* (*t*)= cos(3*t*)

Non traité en 2017

2*y Õ*(*t*)+ 4*y* (*t*)= (*t*2 + *t* + 1)*e≠t*

4. Résoudre

*y Õ*(*x* )+ *y* (*x* )= (*x* + 1)*e≠x*

5. Résoudre

*y Õ*(*x* )+ *y* (*x* )= *e≠x*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. di". linéaires du 1er ordre

Séance no 4 du 14/02/2017

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Exercice 1 — Fiche 1

1. Résoudre sur R

*y Õ*(*x* )+ 3 *y* (*x* )= *x* + 1

1. Intégrer l’équation di"érentielle

*y Õ ≠* 4*y* = (2*x* + 3)*ex*

1. Intégrer l’équation di"érentielle

*y Õ ≠* 4*y* = *ex*

1. Résoudre sur R

*y Õ ≠* 5*y* = cos(4*t*)

5. Idem pour

6. Résoudre

Non traité en 2017

*y Õ ≠* 5*y* = cos(4*t*)+ sin(2*t*)

*dx ≠ u* = *e* (*x* + 1)

*du*

*x* 2

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équations Di"érentielles

Sommaire

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Objectifs de la séance

1. Équa. di". linéaires du 1er ordre homogènes

2. Méthode de la variation de la constante

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Exemples

1. Trouver les solutions sur ] *≠* 1*,* +*Œ*[ de

*y Õ*(*x* ) *≠ x* + 1 = 0*.*

1. Trouver les solutions sur ] *≠* 1*,* +*Œ*[ de

 *y* (*x* )

*x* + 1

3. Trouver les solutions sur ]0*,* +*Œ*[ de

*x y Õ*(*x* )+ (*x* + 1)*y* (*x* )= 0*.*

*y Õ*(*x* )+ 2 *y* (*x* ) = 0*.*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équation homogène

* *a* : *I ≠æ* R, *f* : *I ≠æ* R deux fonctions continues
* On cherche les solutions de l’équa. di". (L)

*’x œ I, y Õ*(*x* ) *≠ a*(*x* )*y* (*x* )= *f* (*x* )*.*

* On commence par l’équation sans second membre

Théorème

*La solution générale de l’équation*

*’x œ I, y Õ*(*x* ) *≠ a*(*x* )*y* (*x* )= 0

*est :*

*yh*(*x* )= *C eA*(*x* )*,*

*où A est une primitive de a sur I.*

* Primitive : pour *x œ I*, *AÕ*(*x* )= *a*(*x* )

*C œ* R*,*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Variation de la constante

* On cherche une solution particulière sous la forme

*yp*(*x* )= *u*(*x* ) *eA*(*x* )

* *yp* est solution particulière si et seulement si

*uÕ*(*x* )*eA*(*x* ) = *f* (*x* ) c’est à dire *uÕ*(*x* )= *f* (*x* )*e≠A*(*x* )

solution particulière

Théorème

*Soient A une primitive de a sur I et u une primitive de f* (*x* )*e≠A*(*x* ) *sur I. La solution générale de y Õ*(*x* ) *≠ a*(*x* )*y* (*x* )= *f* (*x* )*, pour x œ I, est*

* Il su‰t de trouver une primitive *u*(*x* ) de *f* (*x* )*e≠A*(*x* ) pour obtenir une

*yg* (*x* )= (*C* + *u*(*x* )) *eA*(*x* )*, C œ* R*.*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équation complète

Théorème

*La solution générale de l’équation*

*’x œ I, y Õ*(*x* ) *≠ a*(*x* )*y* (*x* )= *f* (*x* )

*est yg* (*x* )= *yh*(*x* )+ *yp*(*x* ) *où*

1. *yh est la solution générale de l’équation homogène associée*
2. *yp est une solution particulière de l’équation*
* Si *yp* est une solution particulière, la solution générale est

*yg* (*x* )= *C eA*(*x* ) + *yp*(*x* )*,*

*C œ* R*,*

*A* primitive de *a*

* Il faut donc savoir trouver des solutions particulières

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Problème de Cauchy

* Soient *x*0 un point de *I*, *y*0 *œ* R.

Théorème

*L’équation diflérentielle*

*’x œ I, y Õ*(*x* ) *≠ a*(*x* )*y* (*x* )= *f* (*x* )

*possède une unique solution vérifiant : y* (*x*0)= *y*0*.*

* La condition *y* (*x*0)= *y*0 fixe la valeur de la constante *C* de la solution

générale de l’équation

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Exemples

1. Trouver les solutions sur ] *≠* 1*,* +*Œ*[ de

*y Õ*(*x* ) *≠ x* + 1 = *x* + 2*.*

1. Trouver les solutions sur ] *≠* 1*,* +*Œ*[ de

 *y* (*x* )

*y Õ*(*x* )+ 2 *y* (*x* ) =

*x* + 1 *x* + 1 *.*

*e*2*x*

3. Trouver les solutions sur ]0*,* +*Œ*[ de

*x y Õ*(*x* )+ (*x* + 1)*y* (*x* )= cos(*x* )*e≠x .*

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. di". linéaires du 1er ordre

Séance no 5 du 27/02/2017

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Exemples

1. Trouver la solution sur ] *≠* 1*,* +*Œ*[ de

*y Õ*(*x* ) *≠ x* + 1 = *x* + 2

vérifiant *y* (0)= 3.

1. Trouver la solution sur ] *≠* 1*,* +*Œ*[ de

 *y* (*x* )

*y Õ*(*x* )+ 2 *y* (*x* ) =

*e*2*x*

*x* + 1 *x* + 1

vérifiant *y* (0)= 0.

3. Trouver les solutions sur ]0*,* +*Œ*[ de

Non traité en 2017

*x y Õ*(*x* )+ (*x* + 1)*y* (*x* )= cos(*x* )*e≠x*

vérifiant lim*xæ*0 *y* (*x* )= 1. Idem pour lim*xæ*0 *y* (*x* )= 2.

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Équa. di". linéaires du 1er ordre

Séance no 6 du 28/02/2017

Généralités sur les équations di"érentielles

Équations di"érentielles linéaires du 1er ordre

Équa. di". linéaires du 1er ordre à coe‰cients constants Équa. di". linéaires du 1er ordre : cas général

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Séance de TD

1. Fiche 1 — Exercice 3
2. Fiche 1 — Exercice 4 — Questions 1 et 3

Généralités sur les équations di"érentielles

EDL1D

Séance de TD

* Fiche 1 : Exercice 4 — Question 4 + Exercice 5

300

En bleu, la température du bain d’huile x

250

En rouge, la température de la pièce métallique y

200

150

100

50

0

80

160

240

320

400

480

560