**Définition 2.4. (Intégrabilité au sens de Riemann)** *Une fonction réelle f* : [*a, b*] R *est dite intégrable sur* [*a, b*]*, si*

∀*g >* 0*,* ∃ *f*1*, f*2 : [*a, b*] R *fonctions en escaliers telles que:*

*1. f*1 ≤ *f* ≤ *f*2 *(i.e.* ∀*x* ∈ [*a, b*]*, f*1(*x*) ≤ *f* (*x*) ≤ *f*2(*x*)*)*

.

∫

.

.

*2.* .

b ∫ b .

.

*f*2(*x*)dx − 1

.

. a a

*f* (*x*)dx. *< g*

.

**Théorème 2.5. (Intégrale définie)** *On suppose que la fonction réelle f* : [*a, b*] R *est intégrable sur*

[*a, b*]*. Considérons alors une subdivision régulière a* = *x*0 *< x*1 *< < x*n−1 *< x*n = *b* (*n* ≥ 2) *de pas h* =

*b* − *a* = *x*i − *x*i−1 *(* 1 ≤ *i* ≤ *n*) *et posons I*n =

*n*

Σn

i=1

*f* (*x*i−1) (*x*i − *x*i−1)*.*

*Alors la suite réelle de terme générale I*n *converge dans* R *et sa limite, notée*

∫

b

*f* (*x*)dx *est appelée intégrale définie de f sur* [*a, b*]*.*

a

Dans ce cours nous nous intéresserons essentiellement aux fonctions continues et aux fonctions conti- nues par morceaux, définies sur un intervalle fermé borné [*a, b*] de R.

**Définition 2.6.** *On dit que la fonction f* : [*a, b*] R *est continue par morceaux si f est bornée et l’ensemble des points de discontinuité de f est de cardinal fini.*

Nous admettrons et utiliserons souvent le théorème suivant:

**Théorème 2.7.** *Soit* [*a, b*] *un intervalle fermé borné de* R*. Alors toute fonction continue f* : [*a, b*] R

*est intégrable sur* [*a, b*]*.*

**Note 2.8.** Dans l’expression

∫ b

*f* (*x*)dx, *a* et *b* sont les bornes d’intégration, *x* est la variable d’inté-

a

gration; c’est une variable muette. Elle peut donc être remplacée par toute autre variable, à l’exception

de celles des bornes d’intégration et bien sûr de la variable utilisée pour nommée la fonction. Ainsi, si *f* : [*a, b*] R est intégrable sur [*a, b*], on a les égalités suivantes:

∫ b

*f* (*x*)dx =

a

∫ b ∫ b

*f* (*t*)dt =

a a

*f* (*u*)du =

∫ b ∫ b

*f* (*v*)dv =

a a

*f* (*y*)dy.

# Quelques propriétés des intégrales définies

On suppose dans la liste des propriétés ci-dessous que [*a, b*] est un intervalle fermé borné de R, *f* et *g*

sont des fonctions intégrables sur [*a, b*].

∫ *a*

*f*(*x*)dx =0

*a*

* + 1. Quand les bornes d’intégration sont confondues:
    2. La relation de Chasles:

∫ *c*

∫ *b*

∫ *b*

∀*c* ∈ [*a, b*]*, f* (*x*)dx + *f*(*x*)dx = *f*(*x*)dx

*a c a*

* + 1. Quand on permute les bornes d’intégration:

∫ *a* ∫ *b*

*f*(*x*)dx = − *f*(*x*)dx

*b a*

* + 1. La linéarité: i.

∫ *b*

∫ *b*

∫ *b*

(*f* + *g*)(*x*)dx = *f*(*x*)dx + *g*(*x*)dx

*a a a*

ii.

∫ *b*

∫ *b*

∀λ ∈ R*,* (λ*f* )(*x*)dx = λ *f*(*x*)dx

*a a*

* + 1. Quand le graphe d’une des fonctions est toujours au dessus de l’autre:

∫ *b*

∫ *b*

Si *f* ≤ *g* sur [*a, b*], alors *f*(*x*)dx ≤ *g*(*x*)dx

*a a*

* + 1. de l’intégrale et de l’intégrale de la valeur absolue:

. ∫ *b*

.

.

∫ *b*

. .

*f*(*x*)dx. ≤

|*f*(*x*)|dx

*a a*

C.omparaison d.e la valeur absolue

# Primitives: calcul d’intégrales définies

Souvent, dans la pratique, calculer une intégrale définie se ramènera pour nous, à chercher une primitive pour la fonction à intégrer.

**Définition 2.9.** *Soit f* : [*a, b*] R *une fonction réelle. On appelle primitive de f, toute fonction déri- vable F définie sur* [*a, b*] *et vérifiant F* j = *f.*

##### Exemple 2.10.

* Sur l’intervalle [ − 2*,* 3], la fonction *F* définie par *F* (*x*)= − cos(*x*) est une primitive de la fonction

*f* définie sur [ − 2*,* 3] par *f* (*x*)= sin(*x*).

1 2 1 2

* Sur R, la fonction *x* − 2 *x*

une autre.

est une primitive de *f* : *x* − *x*; la fonction *x* − 2 *x*

+7 en est

**Théorème 2.11.** *Si la fonction f* : [*a, b*] R *admet une primitive F, alors les primitives de f sont toutes les fonctions G de la forme G* = *F* + *λ pour λ parcourant* R*.*

**Corollaire 2.12.** *Soient f* : [*a, b*] R *une fonction réelle supposée admettre une primitive F, x*0 ∈ [*a, b*]

*et y*0 ∈ R*. Alors il existe une et une seule primitive de f prenant la valeur y*0 *en x*0*.*

**Exemple 2.13.** Soit *f* : [ − 2*,* 2] R définie par *f* (*x*)= − *x*. *f* admet une unique primitive *F* , prenant la valeur 3 en 1. Pour déterminer *F* , on écrit que toute primitive de *f* est de la forme *F* (*x*)= 1 *x*2 + *λ*

−

2

où *λ* est une constante réelle. La condition *F* (1) = 3 fixe la valeur de la constante *λ*. *F* (1) = 3 si et seule- ment si *λ* = 7. Conclusion: *F* (*x*)= 1( − *x*2 + 7).

2

2

**Note 2.14.** ∫Une primitive (quelle qu’elle soit) de *f* : [*a, b*] R est aussi appelée intégrale indéfinie de *f*

et est notée

*f*(*x*)dx (noter l’absence de bornes).

##### Remarque 2.15. (conséquence de la linéarité de la dérivation)

* + 1. Pour deux fonctions *f, g*: [*a, b*] R, si *F* et *G* sont des primitives respectives de *f* et *g*, alors la somme (*F* + *G*) est une primitive de (*f* + *g*).
    2. Si *f* est une primitive de *f* , alors pour tout réel *λ*, (*λF* ) est une primitive de (*λf* ).

**Théorème 2.16. (théorème de la moyenne)** *Soit f* : [*a, b*] R *une fonction réelle continue sur*

∫ *b*

[*a, b*]*. Il existe un point c* [*a, b*] *tel que f* (*c*)=

∈

1 ∫ *b*

1

*b* − *a*

*f*(*x*)dx*.*

*a*

#### (Le nombre réel *b* − *a*

*f* (*x*)dx est la moyenne de la fonction *f* sur l’intervalle [*a, b*])*.*

*a*

En utilisant le théorème de la moyenne on peut prouver le théorème fondamental suivant:

**Théorème 2.17.** *Soit f* : [*a, b*] R *une fonction ré*∫*ellex continue sur* [*a, b*]*. Etant donné un point x*0 ∈

[*a, b*]*, l’application F* : [*a, b*] R *définie par F* (*x*)=

*s’annule en x*0*.*

*f*(*t*)dt *est une primitive de f. Cette primitive*

*x*0

Dans la pratique, c’est le corollaire suivant que l’on applique pour calculer l’intégrale définie d’une fonction dont on connaît une primitive.

**Théorème 2.18.** *Soit f* : [*a, b*] R *une fonction réelle continue sur* [*a, b*]*. Si F est une primitive de f,*

∫

*b*

*alors on a*

*f* (*x*)dx = *F* (*b*) − *F* (*a*)*.*

*a*

# Techniques d’intégration

Dans ce paragraphe, on décrit les techniques de base à maîtriser pour mener à bien le calcul d’une inté- grale définie.

## Primitives de fonctions usuelles

La liste de primitives de fonctions usuelles à connaître:

|  |
| --- |
| **Primitives de quelques fon**∫**ctions usuelles (**λ **est une constante réelle)** |
| α *x*α+1  1) pour *α* ∈ R, *α* − 1, on a *x* dx = α +1 + λ  ∫ |
| 1  2) *x*dx = ln|*x*| + λ  ∫ |
| α*x* 1 α*x*  3) pour *α* ∈ R*, α* 0, on a *e* dx = α *e* + λ  ∫  *ax* |
| 4) pour un réel *a* strictement positif et différent de 1, *ax*dx = + λ  ∫ ln(*a*) |
| 5) sin(*x*)dx = − cos(*x*)+ λ  ∫ |
| 6) cos(*x*)dx = sin(*x*)+ λ |

## Technique d’intégration par parties

La technique d’intégration par parties est fondée sur la formule de dérivation d’un produit de fonctions

dérivables: .

(*u* × *v*)j = *u*j × *v* + *u* × *v*j

**Théorème 2.19.** *Soient u et v deux fonctions réelles continûment dérivables (i.e. des fonctions dériva- bles et dont les dérivées sont continues) sur un intervalle I.*

s

*Alors la fonction réelle produit* u

### ∫

(*u*j × *v*)(*x*)dx = (*u* × *v*)(*x*) − (*u* × *v*j)(*x*)dx

× v *admet une primitive sur I et on a:*

### ∫

*1.*

*2. si a et b sont deux points de I,*

∫ *b*

∫ *b*

(*u*j × *v*)(*x*)dx = [(*u* × *v*)(*x*)]*b* − (*u* × *v*j)(*x*)dx

*a*

*a a*

(dans cette formule, [(*u* × *v*)(*x*)]b désigne (*u*(*b*) × *v*(*b*) − *u*(*a*) × *v*(*a*))

a

##### Exemple 2.20.

1. Calculer une primitive de la fonction *f* : R R définie par *f* (*x*)= *xeα*x où *α* est un nombre réel non nul.

Solution:

* 1. On pose *u*j(*x*)= *eα*x et *v*(*x*)= *x*, ce qui donne par exemple *u*(*x*)= 1 *eα*x en utilisant les for-

*α*

mules des primitives des fonctions usuelles. On a *v*j(*x*)= 1.

* 1. E∫n utilisant le a) et la tec∫hnique $d’intégra%tion par parties, on obtient:

α*x* 1 α*x* 1 α*x*

*xe* dx = *xe* −

α

### ∫

1 × α *e*

dx.

α*x* 1 α*x* 1 α*x*

On en déduit

2.

*xe* dx= α *xe* − α2 *e*

+ λ, où *λ* est une constante réelle quelconque.

Calculer une primitive de la fonction *f* : ]0*,* + ∞[ R, *f* (*x*)= ln(*x*).

j j 1

S∫olution: on pose *u* (*x*) =∫1, *v*(*x*)= ln(*x*), d’où *u*∫(*x*)= *x*, *v* (*x*)= *x* et alors

ln(*x*)dx = *x* ln(*x*) −

### ∫

1

*x* × *x*dx = *x* ln(*x*) −

dx, ce qui donne

ln(*x*)dx = *x* ln(*x*) − *x* + λ où *λ* est une constante réelle quelconque.