Logique et calcul propositionnel

Introduction

Les phrases du calcul propositionnel sont construites à partir de ”propositions” composées à l'aide des connecteurs $\wedge, \neg, \vee, \Rightarrow$. Une proposition est un énoncé simple, ne pouvant prendre que les valeurs ”vrai” ou ”faux ”, et ce de façon non ambiguë. C'est une construction syntaxique pour laquelle il fait sens de parler de vérité.

Syntaxe du calcul propositionnel

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

– symboles propositionnels (ou variables propositionnelles ou propositions ou atomes) $\textsc{Prop} = \{p_1, p_2, \ldots\}$;
– connecteurs logiques $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$;
– symboles auxiliaires : parenthèses et espace.

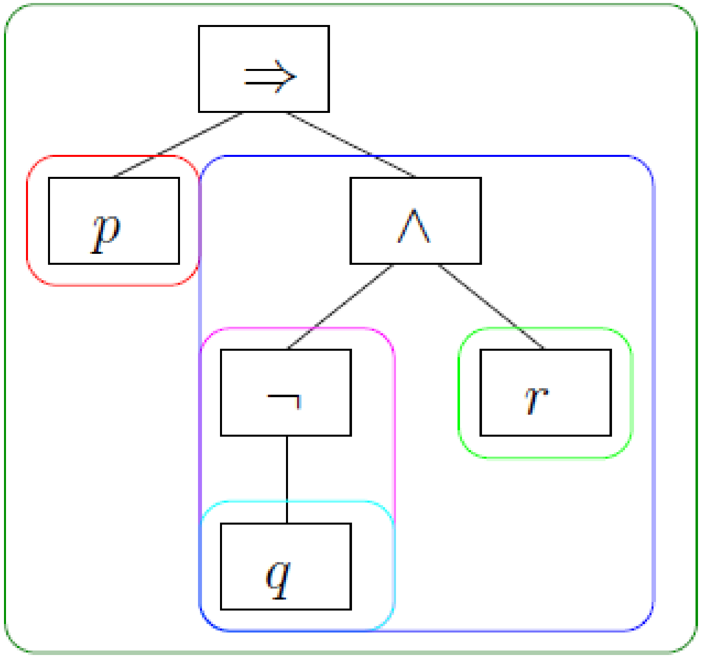
L'ensemble $\mathcal{F}_{\mathrm{cp}}$ des formules du calcul propositionnel est le plus petit ensemble tel que :

– tout symbole propositionnel est une formule
– si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est une formule
– si φ, ψ sont des formules alors $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ et $\varphi \Rightarrow \psi$ sont des formules.

Définition **(Sous-formule)** *L'ensemble $SF(\varphi)$ des sous-formules d'une formules φ est défini par induction de la façon suivante.*

- $SF(p) = \{p\}$;
- $SF(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SF(\varphi)$;
- $SF(\varphi \circ \psi) = \{\varphi \circ \psi\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$ *(où $\circ$ désigne un des symboles $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$).*

Par exemple, $SF(p \Rightarrow (q \wedge r)) = \{p, q, r, q \wedge r, p \Rightarrow (q \wedge r)\}$. Quand on voit une formule comme un arbre, une sous-formule est simplement un sous-arbre (voir Figure 1.2).



Sémantique du calcul propositionnel

Il faut un moyen de déterminer si une formule est vraie ou fausse. La première étape est de donner une valeur de vérité aux propositions. L'evaluation d'une formule, dépend donc des valeurs choisies pour les symboles propositionnels. Ces valeurs sont données par une **valuation**.

Définition (Valuation)

Une valuation est une application de Prop dans {0; 1}. La valeur 0 désigne le "faux" et la valeur 1 désigne le "vrai".

Une valuation sera souvent donnée sous forme d'un tableau. Par exemple, si Prop = {p; q} alors la valuation v : p -> 1, q -> 0

Une fois la valuation v choisie, la valeur de la formule se détermine de façon naturelle, par extension de la valuation v aux formules de la façon suivante :

Définition **(Valeur d'une formule)**

- $v(\neg\varphi) = 1$ *ssi* $v(\varphi) = 0$
- $v(\varphi \vee \psi) = 1$ *ssi* $v(\varphi) = 1$ *ou* $v(\psi) = 1$
- $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ *ssi* $v(\varphi) = 1$ *et* $v(\psi) = 1$
- $v(\varphi \Rightarrow \psi) = 0$ *ssi* $v(\varphi) = 1$ *et* $v(\psi) = 0$

Une définition équivalente est la suivante :

Définition **(Valeur d'une formule (bis))**

- $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$
- $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \Rightarrow \psi) = v(\neg\varphi \vee \psi)$

Modèle d'une formule

Définition *L'ensemble des* **valuations** *d'un ensemble de variables propositionnelles* $\textsc{Prop}$ *est noté* $\mathsf{Val}(\textsc{Prop})$ *(ou juste* Val *lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur* $\textsc{Prop}$*).* $\mathsf{Val}(\textsc{Prop})$ *est donc l'ensemble des fonctions de* $\textsc{Prop}$ *dans* $\{0,1\}$.

Modèle d'une formule

Définition (Modèle d'une formule) *Un* modèle *de* φ *est une valuation* v *telle que* $v(\varphi) = 1$. *On note* $\mathit{mod}(\varphi)$ *l'ensemble des modèles de* φ.

Exemple *Si* $\textsc{Prop} = \{p, q, r\}$ *et* $\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$ *alors l'ensemble des modèles de* φ *est*

$\mathit{mod}(\varphi) =$

p	q	r
1	0	0
1	1	1
1	1	0

Définition **(Satisfaisabilité)** *Une formule* φ *est* **satisfaisable** *si elle admet un modèle (i.e., si il existe une valuation* v *telle que* $v \models \varphi$*, i.e. si* $\mathsf{mod}(\varphi) \neq \varnothing$*)*

Définition **(Insatisfaisabilité)** *Une formule* φ *est insatisfaisable si elle n'admet aucun modèle (i.e., si pour toute une valuation* v*,* $v(\varphi) = 0$*, i.e., si* $\mathsf{mod}(\varphi) = \varnothing$*)*

Définition (Tautologie) *Une* **tautologie** *(ou formule valide) est une formule vraie pour toute valuation (i.e., $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{Val}$). On note $\models \varphi$ pour dire que φ est une tautologie.*

Définition (Equivalence) *On dit que φ est équivalente à ψ si les deux formules ont les mêmes modèles (i.e. si $\mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{mod}(\psi)$). On note alors $\varphi \equiv \psi$.*

Définition (Conséquence logique) *Une formule ψ est* **conséquence logique** *d'une formule φ si tout modèle de φ est un modèle de ψ (i.e., si $\mathsf{mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{mod}(\psi)$). On note alors $\varphi \models \psi$.*

traitement de la conséquence logique

Les formules propositionnelles peuvent être vues comme un ensemble de contraintes sur les propositions. Ainsi, p ^ q contraint p et q a être vraies. Il est donc très courant de considérer des ensembles de formules propositionnelles pour modéliser des problèmes de satisfaction de contraintes.

Définition (Modèle) *Un* **modèle** *d'un ensemble de formules* Γ *est une valuation* v *telle que* $v(\varphi) = 1$ *pour tout* $\varphi \in \Gamma$*. On note* $\mathsf{mod}(\Gamma)$ *l'ensemble des modèles de* Γ.

Cet ensemble de modèles est donc l'ensemble des valuations qu'on peut attribuer aux variables si on veut respecter toutes les contraintes de Γ.

Définition ' (Satisfaisabilité/Consistance) *Un ensemble de formules* Γ *est* **satisfaisable** *ou* **consistant** *si il admet au moins un modèle (i.e., si* $\mathsf{mod}(\Gamma) \neq \varnothing$*)*

Définition **(Insatisfaisabilité/Contradiction)** *Un ensemble de formules* Γ *est insatisfaisable ou* **contradictoire** *si il n'admet aucun modèle (i.e., si* $\mathsf{mod}(\Gamma) = \varnothing$*), on note alors* $\Gamma \models \perp$.

Un ensemble Γ contradictoire ne peut être satisfait : par exemple l'ensemble $\Gamma = \{p, \neg p\}$ est insatisfaisable.

Définition **(Conséquence logique)** *Une formule* φ *est conséquence logique de* Γ *si et seulement si toute valuation qui donne 1 à toutes les formules de* Γ *donne 1 à* φ *(i.e., si* $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\varphi)$*), on note alors* $\Gamma \models \varphi$. *On note* $cons(\Gamma)$ *l'ensemble des conséquences logiques de* Γ.