

Probabilités

Objectif

Ce cours représente un premier contact avec les probabilités et aborde les outils essentiels à leur utilisation en informatique. Les étudiants étudieront des notions élémentaires telles que les variables aléatoires, etc. À l'issue de ce cours, les étudiants seront à même de formuler des solutions probabilistes à des problèmes concrets, ce qui leur permettra de maîtriser l'utilisation des probabilités dans des cours plus avancés (algorithmes randomisés, machine learning, etc.).

Espaces probabilisés

Expérience aléatoire

- **Introduction**

Deux approches s'imposent et se complètent : L'observation et la modélisation. Mais un traitement qui ne s'appuie pas sur un modèle solide atteint vite ses limites et peut conduire à des résultats incohérents appelés paradoxes. La modélisation fournit un cadre d'étude fondé sur une théorie cohérente qui possède et permet de développer des outils efficaces et rationnels. L'objet fondamental de cette modélisation est l'espace probabilisé qui est un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ dont les termes sont présentés dans ce chapitre. Par ailleurs, l'utilisation d'aléa permet la réalisation d'algorithmes parfois plus efficaces ou l'obtention plus aisée d'algorithmes efficaces. On proposera donc la simulation de la plupart des objets introduits en utilisant un générateur de nombres aléatoires comme point de départ.

Modéliser une expérience aléatoire

En théorie des probabilités, le terme **modéliser** désigne l'opération qui consiste à associer à $\mathcal{E}$ trois objets mathématiques, notés et appelés généralement Ω , l'univers, F , l'ensemble des événements et $\mathbb{P}$, la probabilité.

Modéliser une expérience aléatoire

- **Univers**

Nous appelons **univers** associé à $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les résultats possibles de $\mathcal{E}$. Généralement, l'univers est noté Ω .

- **Événement**

Pour représenter les événements, il est d'usage d'utiliser la théorie des ensembles. Un **événement** est donc associé à un sous-ensemble de l'univers, l'ensemble des résultats pour lesquels l'événement est réalisé.

Modéliser une expérience aléatoire

Écriture logique	Écriture ensembliste
le contraire de A s'est réalisé	A^c
A et B se sont réalisés	$A \cap B$
A ou B s'est réalisé	$A \cup B$
B s'est réalisé mais pas A	$B \setminus A$

Modéliser une expérience aléatoire

- Terminologie des événements :
 - $\emptyset$ est appelé **événement impossible**.
 - Ω est appelé **événement certain**.
 - Tout singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, est appelé **événement élémentaire**

Modéliser une expérience aléatoire

- **Ensemble des événements**

Nous appelons **ensemble des événements** associés à E tout sous-ensemble F de $P(\Omega)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $\emptyset$ et $\Omega \in F$;
2. si $A \in F$, alors $A^c \in F$;
3. soit I une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une suite d'événements de F , alors

Un ensemble d'événements vérifiant les trois propriétés ci-dessous est appelé une σ -**algèbre** ou une **tribu**.

Modéliser une expérience aléatoire

- **Espace probabilisable**

Nous appelons **espace probabilisable** lié à $\mathcal{E}$ le couple (Ω, F) , où Ω est l'ensemble des résultats possibles de $\mathcal{E}$ et F un ensemble des événements liés à $\mathcal{E}$.

- **Événements incompatibles**

Nous appelons **événements incompatibles** ou **disjoints** deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire qu'il est impossible que A et B se réalisent simultanément.

Modéliser une expérience aléatoire

- **Probabilité**

Nous appelons **probabilité** sur $(_, F)$ une application P de F dans $[0,1]$ vérifiant les deux propriétés suivantes (axiomes de Kolmogorov)

1. $P(\Omega) = 1$;
2. pour toute suite $(A_i)_{i \in I}$ finie ou infinie dénombrable d'événements de F deux à deux incompatibles, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

c'est-à-dire que la probabilité d'un événement qui est la réunion disjointe d'événements est égale à la somme des probabilités de ces événements (σ -additivité).

Modéliser une expérience aléatoire

- **Etude de cas**

1. Nous lançons une pièce de monnaie.

a) Décrivez les résultats possibles.

b) Décrivez l'univers Ω associé au lancer d'une pièce de monnaie.

c) Donnez deux événements associés à cette expérience aléatoire.

2. Nous lançons un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

a) Décrivez les résultats possibles.

b) Décrivez l'univers Ω associé au lancer d'un dé cubique.

c) Donnez trois événements associés à cette expérience aléatoire.

3. Nous jetons trois fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Décrivez l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.

Modéliser une expérience aléatoire

- **Solution**

1. a) Dans le cas du lancer d'une pièce de monnaie, les résultats possibles sont « face » **OU** « pile ».

b) Dans le cas du lancer d'une pièce de monnaie, l'univers Ω est égal à {« face », « pile »}.

c) « Nous avons obtenu face » et « nous avons obtenu pile » sont deux événements associés à cette expérience aléatoire.

2. a) Un résultat possible est l'un des chiffres inscrit sur la face supérieure du dé, ou encore 1 **OU** 2 **OU** 3 **OU** 4 **OU** 5 **OU** 6.

b) Dans le cas du lancer d'un dé cubique, l'univers Ω est égal à {1,2,3,4,5,6}.

c) « Le résultat du lancer est divisible par 2 », « le résultat du lancer est divisible par 3 », « le résultat du lancer est un nombre impair » sont trois événements associés à cette expérience.

3. L'univers Ω est égal à {1,2,3,4,5,6}.

Espace probabilisé

I. Espace probabilisé fini

Nous appelons **espace probabilisé fini** associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ le triplet $(\Omega, P(\Omega), \mathbb{P})$, lorsque l'univers Ω est fini.

Espace probabilisé

- Propriétés

Pour tous événements A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$, nous avons

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, d'où $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

2. $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

3. si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;

4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

5. si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Plus généralement : si $A_1, \dots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Espace probabilisé

- **Équiprobabilité et probabilité uniforme**

Nous disons qu'il y a **équiprobabilité** lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. Dans ce cas, $\mathbb{P}$ **est la probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Conséquence : S'il y a équiprobabilité, pour tout événement A , nous avons alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Espace probabilisé

2. Espace probabilisé quelconque

Espace probabilisé

Nous appelons **espace probabilisé** associé à une expérience aléatoire E le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Propriétés

Pour tous événements A et B de $\mathcal{F}$, nous avons encore les propriétés 1., 2., 3., 4 précédentes, et

5. si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Si I est une partie finie ou infinie de N ou de Z et si $(A_i)_{i \in I}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors nous avons

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Probabilités conditionnelles

La probabilité qu'un événement se réalise peut être influencée si on connaît des informations concernant la réalisation d'un ou plusieurs autres événements. La donnée de la réalisation ou non d'un événement va ainsi réduire l'univers des issues possibles.

Probabilités conditionnelles

Exemple

On lance un dé équilibré et on regarde le résultat.

Notons A l'événement : "on obtient un nombre inférieur ou égal à 5".

Notons B l'événement : "on obtient un nombre supérieur ou égal à 3".

A priori, sans aucune information supplémentaire, on a :

$$P(A) = \frac{5}{6} ; P(B) = \frac{4}{6}$$

Cependant, supposons que l'on sache que A s'est réalisé, alors les résultats désormais possibles sont $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ et B est réalisé si ce résultat appartient à $\{3; 4; 5\}$. Il a donc 3 cas favorables sur 5. La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est alors de $\frac{3}{5}$

On vérifie en réalité que $\frac{3}{5} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement B , on définit la **probabilité de B sachant A** par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Alors la fonction $P_A : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On note parfois $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A)$.

Probabilités conditionnelles

Grandes formules probabilistes

Remarque

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$, alors par définition, on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

Cette formule peut être généralisée de la façon suivante :

Probabilités conditionnelles

Soient A, B, C trois événements tels que $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_{A \cap B}(C)$$

Soient $A_1, \dots, A_n$ une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Probabilités conditionnelles

Exemple

Dans un chapeau il y a 10 tickets numérotés de 1 à 10.

On tire successivement trois tickets du chapeau.

Quelle est la probabilité de ne tirer que des numéros pairs ?

Notons A_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ ticket tiré est pair ».

L'événement dont on cherche la probabilité est donc : $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Alors : $P(A_1) = \frac{1}{2}$

De même : $P(A_2) = \frac{4}{9}$, qui correspond à tirer un deuxième ticket pair sachant que le premier l'est.

Enfin : $P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{3}{8}$, qui correspond à tirer un troisième ticket pair sachant que les deux premiers sont pairs.

Finalement, la probabilité cherchée est :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot P(A_1 \cap A_2) = P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

Probabilités conditionnelles

Indépendance d'événements

Définition

On dit que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Théorème caractérisation de l'indépendance de deux événements.

Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et soit : $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$.

Si : $P(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si : $P_B(A) = P(A)$

Probabilités conditionnelles

Propriétés

Soient A et B deux événements indépendants, alors :

- 1. A et $\overline{B}$ sont indépendants,*
- 2. $\overline{A}$ et B sont indépendants,*
- 3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Probabilités conditionnelles

Remarque

Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

- Des événements incompatibles sont très rarement indépendants.

En effet, deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si on a : $A \cap B = \emptyset$.

Ils ne peuvent alors être indépendants que si : $P(A) = 0$, ou : $P(B) = 0$.

- Par exemple dans le lancer d'une pièce (équilibrée), obtenir Pile ou Face sont deux événements incompatibles mais pas indépendants.

En effet : $P(\{Face\}) = \frac{1}{2} = P(\{Pile\})$, alors que : $P(\{Face\} \cap \{Pile\}) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Intuitivement, si on n'obtient pas Pile on a de fortes chances (!) d'obtenir Face.

Probabilités conditionnelles

Exemple

On reprend l'exemple 3.1 (un chapeau et 10 tickets numérotés de 1 à 10).

Si on tire deux tickets successivement avec remise, obtenir un ticket numéroté pair au 2^{ème} tirage ne dépend pas de ce qu'on a obtenu au premier tirage.

En effet, en notant A_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ ticket tiré porte un numéro pair », alors :

$$P(A_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = P(A_2), \text{ et : } P(A_1 \cap A_2) = \frac{5 \cdot 5}{10 \cdot 10} = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

La deuxième probabilité est obtenue avec une probabilité uniforme sur l'ensemble des couples de nombres de 1 à 10, modélisant ainsi les deux tirages successifs (avec remise).

Il y a bien indépendance « mathématique » des événements, confirmant l'indépendance « intuitive » qu'on peut imaginer.