# Variable aléatoire discrète

# Notion de variable aléatoire discrète

**Définition 1**

Une grandeur numérique $X$ prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ est une **variable aléatoire discrète**.

**Exemple 1**

Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.

On appelle $X$ le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l’ensemble des issues possibles est = {1; 2; 3; 4; 5; 6},
- on a défini avec $X$ une variable aléatoire réelle telle que :

$X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

**Définition 1'**

On appelle variable aléatoire discrète une application $X$ de $\Omega$ dans $E$ telle que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et, pour tout $x \in E$, $X^{-1}(\{x\}) \in$ T. On dit que $X$ est une variable aléatoire discrète réelle si $E$=R.

# Loi d'une variable aléatoire

**Définition 2**

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire $X$ est la fonction $f$ qui a chaque valeur associe sa probabilité.

**Définition 2'**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega)=\{xn;\ n\in I\}$ où $I$ est fini ou dénombrable. La loi de probabilité de $X$ est la suite $(pn)n\in I$, où pour tout $n\in I$, $pn=P(X=xn)$.

## Remarque 1

En général, on présente la loi d'une variable aléatoire $X$ sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par $X$ ainsi que les probabilités associées.

| Valeurs de $X$ : $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité : $p(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

**Exemple 2**

On reprend l'énoncé de l'exemple précédent. La loi de *X* est donnée par :

| $x_i$ | $-10$ | $-6$ | $-2$ | $4$ | $8$ | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

# Espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète, on appelle espérance de la variable aléatoire X le réel noté E(X) qui vaut:

$$E(X) = p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$$

## Exemple 4

On reprend le jeu de cartes étudié précédemment.

On rappelle que la loi de *X* est donnée par :

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

D'où le calcul de l'espérance :

- $E(X) = 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8}$
- $E(X) = \frac{8}{8} = 1.$
- Concretement, cela signifie "qu'en moyenne", le joueur gagne 1 point.

# Variance et écart-type d'une variable aléatoire

**Définition**

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance E(X),

On appelle variance de la variable aléatoire X le réel V(X) qui vaut:

$V(X)= p_1[x_1-E(X)]^2+p_2[x_2-E(X)]^2+\ldots+p_n[x_n-E(X)]^2= \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - E(X)]^2$

On appelle ecart-type le réel noté $\sigma(X)$ ou $\sigma x$ définit par: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

**Exemple 5**

Calcul de la variance pour le jeu de cartes :

- $V(X) = \frac{5}{8}[0-1]^2 + \frac{1}{8}[1-1]^2 + \frac{1}{8}[3-1]^2 + \frac{1}{8}[4-1]^2$
- $V(X) = \frac{5}{8} + 0 + \frac{4}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4} = 2,25.$

D'où l'écart-type :

- $\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sigma_x = \frac{3}{2} = 1,5.$

Théorème 1 (De Kœnig)

$$V(X) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + ... + p_n x_n^2 - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = E(X^2) - E^2(X).$$

**Propriété 1**

- La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle *X* sont des nombres positifs.
- L'écart-type mesure la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.
- Si *X* est exprimé dans une certaine unité, $\sigma X$ l'est dans la même unité.

# II Couples de variables aléatoires

**Définition**

Certaines situations sont naturellement décrites par la donnée d’un couple de variables aléatoires. Par exemple, en météorologie, on peut s’intéresser au couple formé par la donnée de la température ($T$) et de la pression ($P$) atmosphériques. On est ainsi amené à étudié les deux paramètres simultanément, donc à regarder le couple ($T$; $P$), qui est un **couple de variables aléatoires**

# Exemple

On considère dans le plan les points de coordonnées entières situés dans la zone $B$, définie par

$$B = \{(x; y) \text{ tel que } x; y \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 \leq y \leq 3\}.$$

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir l'un de ces points au hasard (tous les choix de points dans $B$ étant équiprobables). On définit la variable aléatoire discrète $Z$ qui est formée du couple de coordonnées du point choisi.

- Détermination de la loi de $Z$ :

| Valeurs de $Z$ | $(1;1)$ | $(1;2)$ | $(1;3)$ | $(2;1)$ | $(2;2)$ | $(2;3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilités | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

- La variable aléatoire $Z$ est appelée couple des variables aléatoires $X$ et $Y$.
  On peut présenter sa loi de manière à faire apparaître les rôles joués par $X$ et $Y$ plus clairement :

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

# Indépendance de deux variables aléatoires

**Définition**

Soient X et Y deux variables aléatoires de valeurs respectives $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $(y_1,y_2,\ldots,y_p)$, les valeurs aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tous i et j tels que:

$1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)\, P(X=x_j)$

# Somme de variables aléatoires

## Propriétés

On considère deux variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ admettant une espérance, alors

- $X+Y$ admet l'espérance $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
- $X-Y$ admet l'espérance $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$.

Et dans le cas où $X$ et $Y$ sont indépendantes :

- $X+Y$ admet la variance $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.
- $X-Y$ admet la variance $V(X-Y)=V(X)-V(Y)$.

# Lois fondamentales

## 1 Loi de bernouilli

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire ayant deux issues contraires de probabilités respectives p et q=1-p .

**Définition :** On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, ce que l'on note si :

1. $X(\Omega)= \{0,1\}$
2. $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$

# Exemple

Si on lance un dé et qu'on nomme « succès » l'apparition de la face $6$, on obtient la loi de Bernouilli suivante :

| $x_i$ | $1$ | $0$ |
|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |

# Propriété

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$, alors :

- L'espérance de $X$ vaut $E(X) = p$.
- La variance de $X$ vaut $V(X) = pq$.

**2 loi binomiale**

On réalise un schéma de Bernoulli composé de n expériences identiques et indépendantes. La variable aléatoire X associé au schéma compte le nombre de succès obtenus. On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque: n et p sont les paramètres de la loi binomiale

# Propriétés

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors :

- L'espérance de $X$ vaut $E(X) = np$.
- La variance de $X$ vaut $V(X) = npq$.

**3 loi de Poisson**

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'intéresse au nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :

- Nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en $x$ minutes,
- nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,
- nombre de défauts de peinture par $m2$ sur la carrosserie d'un véhicule . . .

**Définition**

La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de parametres $\lambda$, notée P($\lambda$) avec $\lambda$>0 lorsque sa loi de probabilité vérifie:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

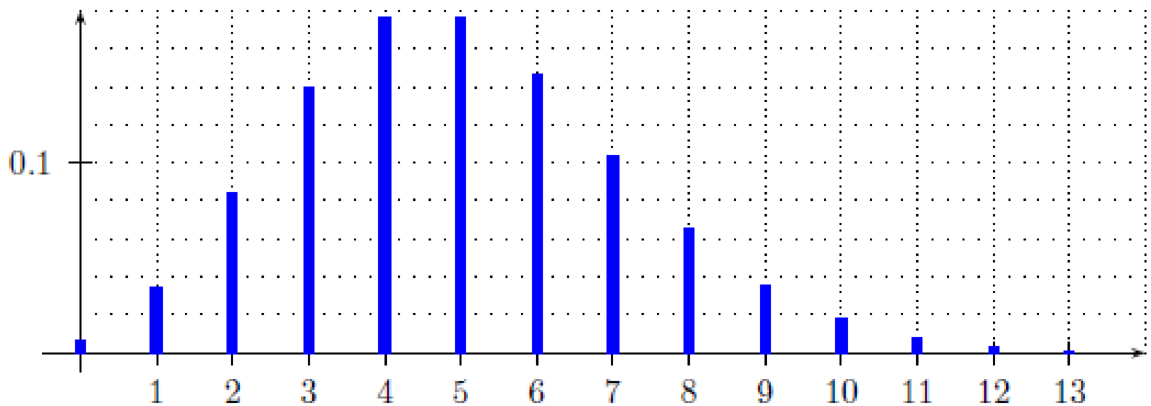
**Exemple**

On considère la variable aléatoire $X$ mesurant le nimbre de clients se présentant au guichet 1 d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes entre 14h30 et 16h30.
On suppose que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

- Pour $\lambda = 5$, la table de la loi de poisson nous donne :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | $0,007$ | $0,034$ | $0,084$ | $0,140$ | $0,176$ | $0,176$ | $0,146$ | $0,104$ | $0,065$ | $0,036$ | $0,018$ | $0,008$ | $0,003$ | $0,001$ | $0,000$ |

- On peut aussi représenter graphiquement la loi $\mathcal{P}(5)$ :




- La porbabilité qu'entre 14h30 et 14h40, 10 personnes exactement se présentent à ce guichet vaut : $P(X = 10) = 0,018$.
- La porbabilité qu'entre 15h20 et 15h30, au maximum 3 personnes se présentent à ce guichet vaut : $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,265$.
- La porbabilité qu'entre 16h00 et 16h10, 8 personnes au moins se présentent à ce guichet vaut : $P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 8)] = 1 - 0,867 = 0,133$.

# Propriété

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, alors l'espérance et la variance sont égales et valent $E(X) = V(X) = \lambda$.