$1, x, x^2, \ldots\ldots, x^n$

$\sin x, \sin 2x, \ldots\ldots$

ou bien $1, e^x, e^{2x}, \ldots\ldots, e^{nx}$.

Remarque :

Il peut arriver que Φ soit une fraction rationnelle .

INTERPOLATION PAR FAMILLE LINEAIRE .

Considérons n+1 fonction $\Phi_o, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ de $\mathcal{C}[a,b]$ (l'ensemble des fonctions continnues sur $[a,b]$) linéairement indépendantes .

Soit alors Φ telle que :

$$\Phi = \sum_{k=o}^{n} a_k \Phi_k \quad \text{où les } a_k \in \mathbb{R}, \text{pour } k=o,..,n .$$

On écrit alors

$$\begin{cases} \Phi(x_i) = f(x_i) = \sum_{k=o}^{n} a_k \Phi_k (x_i) \\ i=o,..,n \end{cases}$$

Les a_k sont alors solutions d'un système linéaire de (n+1) équation à(n+1) inconnues . Cette solution existe si et seulement si le déterminant Δ de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \Phi_o(x_o) & \Phi_1(x_o) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Phi_n(x_o) \\ \Phi_o(x_1) & \Phi_1(x_1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Phi_o(x_n) & \Phi_1(x_n) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

est différent de zéro .

On peut prendre $\Phi_o(x) = x^o = 1$

$\Phi_1(x) = x^1 = x$

$\Phi_2(x) = x^2 = x^2$

$\vdots$

$\Phi_n(x) = x^n = x^n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & \cdots\cdots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix}$$

c'est le déterminant de VAN-DER MONDE .

La valeur de Δ est égale à $\prod_{i>j}(x_i - x_j)$

$\Delta \neq o$ si $x_i \neq x_j$.

Si on veut faire apparaitre les $f(x_i)$ $i=o,\ldots\ldots,n$,

on écrit

$$\Phi(x) = \sum_{i=o}^{n} A_i(x).\, f(x_i), \text{ où les } A_i \text{ sont indépendants de } f(x_i)$$

Alors on doit avoir

$$\Phi(x) = A_o(x)f\,(x_o) + A_1(x).\, f(x_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n(x)\, f(x_n);$$

ou encore

$$\begin{cases} \Phi(x_o) = A_o(x_o)\; f(x_o) + A_1(x_o)\; f(x_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n(x_o)\; f(x_n) \\ \Phi(x_1) = A_o(x_1)\; f(x_o) + A_1(x_1)\; f(x_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n(x_1)\; f(x_n) \\ \vdots \\ \Phi(x_n) = A_o(x_n)\; f(x_o) + A_1(x_n)\; f(x_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n(x_n)\; f(x_n) \end{cases}$$

Ce n'est possible que si :

$$\begin{cases} A_i(x_i) = 1 & \forall_i = o,\ldots,n \\ A_i(x_j) = 0 & \forall_i \neq j \;, j=o,\ldots,n \end{cases}$$

DIFFERENCE FINIE :

Définition :

Si Δ_x est un accroissement fini de x tel que $x+\Delta x$ soit **dans** $[a,b]$;

on appelle différence finie d'ordre 1 la fonction ,

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \;.$$

De même, on appelle différence finie d'ordre 2 ,

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x) = f(x+\Delta x+\Delta x) - f(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) + f(x)$$

$$= f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$$

Plus généralement $\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+\Delta x) - \Delta^{n-1} f(x)$.

Exemple :

Construire les différences finies de la fonction : $f(x) = x^3$ en considerant le pas $\Delta x = 1$

Solution :

$$\Delta f(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \ .$$

$$\Delta^2 f(x) = 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 - (3x^2 + 3x + 1) = 6x+6$$

$$\Delta^3 f(x) = 6(x+1) + 6 - (6x+6) = 6$$

$$\Delta^4 f(x) = 0$$

$$\Delta^n f(x) = 0 \qquad n > 3 \ .$$

Proposition :

Δ est un opérateur linéaire sur l'espace $\mathcal{C}[a,b]$

ie $\begin{cases} \Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g \ . \\ \Delta(\lambda f) = \lambda \Delta f \quad , \ \forall \lambda \text{ réel} \end{cases}$

Preuve :

Soit $x \in [a,b]$

$$\Delta(f+g)(x) = (f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)$$

$$= f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)$$

$$= f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)$$

$$= \Delta f(x) + \Delta g(x) \ .$$

Soit λ un réel

$$\Delta(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x+\Delta x) - (\lambda f)(x)$$

$$= \lambda f(x+\Delta x) - \lambda f(x)$$

$$= \lambda \Delta f(x).$$

Par définition on a $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$.

donc $f(x+\Delta x) = \Delta f(x) + f(x) = (\Delta+1)f(x)$ (en considérant Δ comme un facteur symbolique)

$$f(x+2\Delta x) = \Delta^2 f(x) + 2(1+\Delta)f(x) - f(x)$$
$$= (\Delta^2 + 2\Delta + 1)\, f(x) = (1+\Delta)^2\, f(x)$$
$$\vdots$$
$$f(x+n\Delta x) = (1+\Delta)^n\, f(x)\ .$$

Puissance généralisée :

Définition :

On appelle puissance généralisée n-ième du nombre x le produit de n facteurs dont le premier est égal à x et chaque facteur suivant est plus petit de h que le précédent .

on note

$$x^{[n]} = x\,(x-h)(x-2h)\ldots\ldots\ldots\ldots(x-(n-1)h).$$

h étant une constante fixée .

On pose $x^{[o]} = 1$;

remarque :

si $h=o$ alors $x^{[n]} = x^n$.

Proposition :

Quel que soit l'entier n.

$\boxed{\Delta x^{[n]} = nh\, x^{[n-1]}}$ où h est un pas fixé .

En effet :

$$\Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]}$$
$$= (x+h)x(x-h)(x-2h)\ldots\ldots(x-(n-2)h) - x(x-h)\ldots\ldots(x-(n-1)h)$$
$$= x(x-h)(x-2h)\ldots\ldots(x-(n-2)h)\ [(x+h) - (x-(n-1)h]$$
$$= x(x-h)(x-2h)\ldots.(x-(n-2)h(nh)$$
$$= nh\, x^{[n-1]}\ .\ ||||$$

Corollaire :

$$\Delta^2 x^{[n]} = n(n-1)h^2 \; x^{[n-1]} \qquad (A)$$

En effet :

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta(nh \; x^{[n-1]})$$

$= nh\Delta x^{[n-1]}$ (puisque Δ est un opérateur linéaire).

$$= (nh)(n-1)h \; x^{[n-2]}$$

$$= n(n-1)h^2 \; x^{[n-2]} \quad . \; ||||$$

Plus généralement :

$$\boxed{\Delta^k x^{[n]} = n\,(n-1)(n-2)\;\ldots\ldots\ldots(n-(k-1)h^k \; x^{[n-k]}}$$

$k=o,1,2,\ldots\ldots\ldots,n$.

La démonstration par récurrence sur k est laissée en exercice .

Finalement :

$$\forall\, n, \quad \Delta^n x^{[n]} = n!\; h^n \; x^{[o]} = n!\; h^n \qquad (A')$$

Si $k>n$ $\Delta^k (x)^{[n]} = o$ (car $x^{[n]}$ est un polynôme de degré n, Δ^k pour k=n est une constante donc la différence pour $k>n$ est nulle) .

FORMULE D'INTERPOLATION DE NEWTON (OU POLYNÔME DE NEWTON)

Soit $y_i = f(x_i)$ les valeurs d'une fonction $y=f(x)$

Pour $x_i = x_o + ih$ $(i=o,1,2,\ldots\ldots,n)$ (h étant le pas d'interpolation)

il s'agit de choisir un polynôme $P_n(x)$ de degré inférieur on égal à n tel que $P_n(x_i) = y_i$ $(i=0,1,2,\ldots\ldots,n)$,

ce qui est équivalent à $\Delta^m P_n(x_o) = \Delta^m y_o$, $m=0,1,2,\ldots,n$.

Le polynôme cherché est de la forme .

$$P_n(x) = a_o + a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)(x-x_1) + a_3(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots\ldots\ldots + a_n(x-x_o)\ldots\ldots(x-x_{n-1}) \quad (1) .$$

En utilisant la notation de puissance généralisée , il vient

$$P_n(x) = a_o+a_1(x-x_o)^{[1]} + a_2\,(x-x_o)^{[2]} \ldots\ldots + a_n(x-x_o)^{[n]} \qquad (1').$$

Essayons d'identifier les a_i $i=0,1,\ldots\ldots,n.$

$P_n(x_o) = y_o = a_o$ (cela vient de (1) ou de (1'))

$$\Delta P_n\,(x) = \Delta(a_o+a_1(x-x_o)^{[1]} + a_2(x-x_o)^{[2]} \ldots\ldots + a_n(x-x_o)^{[n]})$$

$$= \Delta a_o + a_1\,\Delta(x-x_o)^{[1]} + a_2\,\Delta(x-x_o)^{[2]} + \ldots + a_n\,\Delta(x-x_o)^{[n]}$$

En utilisant les résultats (A) et la proposition il vient

$$\Delta P_n(x) = 0 + a_1h + 2a_2h\,(x-x_o)^{[1]} + 3a_3h(x-x_o)^{[2]} + \ldots + na_n\,h(x-x_o)^{[n-1]}.$$

Par suite :

$$\Delta P_n(x_o) = a_1\,h = \Delta y_o\,.$$

Ainsi $\boxed{a_1 = \dfrac{\Delta y_o}{1!h}}$

De même :

$$\Delta^2 P_n\,(x) = \Delta^2(a_o + a_1(x-x_o)^{[1]} + a_2(x-x_o)^{[2]} + \ldots + a_n(x-x_o)^{[n]})$$

$$= \Delta^2 a_o + a_1\Delta^2(x-x_o)^{[1]} + a_2\Delta^2(x-x_o)^{[2]} + \ldots\ldots a_n\Delta^2(x-x_o)^{[n]}$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 2!\;a_2\;h^2 + 3.2h^2a_3(x-x_o)^{[1]} + \ldots + n(n-1)a_nh^2(x-x_o)^{[n-2]}$$

donc $\Delta^2 P_n\,(x_o) = \Delta^2\,y_o = 2!\;h^2a_2$

et $\boxed{a_2 = \dfrac{\Delta^2 yo}{2!\;h^2}}$

On trouve ainsi que

$$\boxed{a_i = \frac{\Delta^i y_o}{i!h^i}} \qquad (i=0,1,2,\ldots\ldots,n)$$

où l'on a posé $0!=1$ et $\Delta^o y_o = y_o$.

En reportant ces valeurs dans (1'), nous aurons :

$$P_n(x) = y_o + \frac{\Delta y_o}{1!h}\,(x-x_o)^{[1]} + \frac{\Delta^2 yo}{2!h^2}(x-x_o)^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}\,(x-x_o)^{[n]} \qquad (2)$$

On peut écrire

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i y_o}{i!h^i} (x-x_o)^{[i]}$$

$$P_n(x_k) = y_o + \frac{\Delta y_o}{1!h}(x_k-x_o) + \frac{\Delta^2 y_o}{2!h^2}(x_k-x_o)(x_k-x_1)+\dots \frac{\Delta^k y_o}{k!h^k}(x_k-x_o)\dots(x_k-x_{k-1})$$

$$P_n(x_k) = y_o + k\Delta y_o + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots\dots 1}{k!}\Delta^k y_o$$

Car :

$$\begin{cases} x_k = x_o + kh \\ x_k - x_1 = x_o + kh - x_1 = kh-h = (k-1)h. \\ \vdots \end{cases}$$

En faisant le changement de variable suivant

$$q = \frac{x-xo}{h}$$

il vient

$$\frac{(x-xo)^{[i]}}{h^{(i)}} = \frac{(x-xo)}{h} \cdot \frac{(x-xo-h)}{h} \dots\dots \frac{(x-xo-(i-1)h}{h}$$

$$= q(q-1)\dots\dots\dots(q-(i-1)) .$$

En reportant dans (2)

$P_n(t)$ //

$$\boxed{P_n(x) = y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \dots + \frac{1}{n!}q(q-1)\dots(q-(n-1))\Delta^n y_o} \quad (2')$$

Ainsi l'on retiendra LA PREMIERE FORMULE D'INTERPOLATION DE NEWTON .

ex : Construire le polynôme d'interpolation de Newton pour la fonction $f(x)=e^x$

x	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
f(x)	33,115	34,813	36,598	38,475	40,477

$h = 0,05$

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
3,50	33,115	* 1,698	** 0,087	0,005	0,002
3,55	34,813	1,785	0,092	0,003	
3,60	36,598	1,857	0,095		
3,65	38,475	1,972			
3,70	40,447				

* 34,813
33,115
1,698

**$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$
$= \Delta(f(x+h) - f(x))$
$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$

69,713
69,626
** 0,087

36,598
33,115
69,713

Les différences d'ordre 3 étant pratiquement constantes on pose dans la formule (2') $n=3$.

$x_o = 3{,}50 \qquad y_o = 33{,}115$.

$$P_3(x) = 33{,}115 + 1{,}698q + \frac{0{,}087}{2} q.(q-1) + \frac{1}{3!}\, 0{,}005(q(q-1).(q-2).$$

Ou

$$P_3(x) = 33{,}115 + 1{,}698q + 0{,}0435q(q-1) + 0{,}00083\; q(q-1)(q-2) \quad = P_3(q)$$

avec $q = \dfrac{x-3{,}50}{0{,}050} = \dfrac{x-3{,}50}{5\times10^{-2}}$.

Si on veut calculer par exemple .

$f(3{,}52)$?

$$q = \frac{3{,}52-3{,}50}{0{,}05} = 0{,}4 \ .$$

Comme $f(3{,}52) = P_3(q) = P_3(0{,}4)$

$f(3{,}52) = 33{,}115 + 1{,}698(0{,}4) + 0{,}0435(0{,}4)(0{,}4-1)+0{,}000839(0{,}4)(0{,}4-1)(0{,}4-2)$

$\simeq 33{,}780$

INTERPOLATION INVERSE POUR CAS DES POINTS EQUIDISTANTS .

Soit la fonction $y=f.(x)$ donnée par le tableau .

L'interpolation inverse consiste à calculer d'aprés la valeur donnée de la fonction y la valeur correspondante de l'argument x .

Supposons que la fonction $y=f.(x)$ soit monotone et y donnée entre $y_o = f(x_o)$ et $y_1 = f(x_1)$.

le premier polynôme de NEWTON s'écrit :

$$y = y_o + q\Delta y_o + q(q-1)\frac{1}{2!}\Delta^2 y_o + \dots\dots + q(q-1)\dots(q-(n-1))\Delta^n y_o \cdot \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow q = \frac{y-y_o}{\Delta y_o} - \frac{\Delta^2 y_o\, q(q-1)}{2!\Delta y_o} - \dots\dots - \frac{\Delta^n y_o}{n!\Delta y_o} \cdot q(q-1)(q-2)\dots(q-(n-1))$$

ie $q = \varphi(q)$. On utilisera donc la méthode des approximations successives .

$\boxed{q_o = \dfrac{y-y_o}{\Delta y_o}}$ sera l'approximation initiale .

Si $f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$,où $[a,b]$ contient les points d'interpolation et que le pas h soit suffisamment petit, ce processus converge .

Aprés avoir trouvé q on détermine x par :

$$\frac{x - xo}{h} = q \Rightarrow x = x_o + qh .$$

exemple : Utiliser les valeurs de la fonction y = log x donnée par le tableau .

x	20	25	30
y	1,3010	1,3979	1,4771

pour trouver la valeur de x telle que y= log x = 1,35

Solution :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
20	1,3010	0,0969	-0,0177
25	1,3979	0,0792	
30	1,4771		

Si on prend $y_o = 1,3010$

$$q_o = \frac{y-yo}{\Delta y_o} = \frac{1,35-1,3010}{0,0969} = \frac{490}{969} = 0,506 ,$$

$$q_1 = 0,506 - \frac{(-0,0177)}{2x0,0969}(0,506)(0,506-1) = 0,506-0,023 = 0,483 ,$$

on pose $q = 0,483$

d'où $x = x_o + 0,483.h = 20+0,483x5 = 22,42$.

La première formule d'interpolation de Newton (2') est pratiquement incommode pour l'interpolation de la fonction dans la partie finale du tableau .

Pour cela en recourt à la deuxième formule d'interpolation de Newton .

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)\Delta^2 y_{n-2}}{2!} + \ldots\ldots\ldots \frac{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)\Delta^n y_o}{n!}$$

avec $q = \frac{x-xn}{h}$

INTERPOLATION DANS LE CAS DES POINTS NON EQUIDISTANTS.

POLYNOME DE LAGRANGE .

Les formules d'interpolation déja étudiées dans ce cours (1^{ere} et $2^{ème}$ de Newton) ne sont applicables que pour des points équidistants . Pour des points arbitraire, on utilise une formule plus générale appelée formule d'interpolation de LAGRANGE ou polynome de LAGRANGE , ce polynôme est de la forme .

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

et vérifie

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 & , \forall\ i=1,n \\ L_i(x_j) = 0 & , \forall\ i \neq j \end{cases}$$

La formule d'interpolation est donc .

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

|||

Remarques:

1°) Si on écrit $\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots\ldots(x-x_n)$

$$\Pi'(x_i) = (x_i-x_0)\ldots\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots\ldots(x_i-x_n)$$

Par suite

$$L_i(x) = \frac{1}{x-x_i} \cdot \frac{\Pi(x)}{\Pi'(x_i)}$$

et donc

$$\boxed{P_n(x) = \Pi(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\Pi'(x_i)}} \qquad (C)$$

2°) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.

Car si $f_k(x) = x^k$ $k=0,1,\ldots\ldots,n.$

$$x^k = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, x_i^k$$

pour $k=0$, nous aurons $1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(x)$

Considérons la formule (C) dans le cas où n=1 et n=2 .

$$P_1(x) = \cancel{P_2(x)} \quad \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x-x_o)(x_o-x_1)} \cdot f(x_o) + \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x-x_1)(x_1-x_o)} \cdot f(x_1)$$

$$P_1(x) = \cancel{P_2(x)} \quad \frac{x-x_1}{x_o-x_1} \cdot f(x_o) + \frac{x-x_o}{x_1-x_o} \cdot f(x_1) \;,\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{c'est l'équation d'une} \\ \text{droite qui passe par } x_o \text{ et } x_1 \\ \text{données.} \end{array} \right.$$

de même

$$P_2(x) = \cancel{P_3(x)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)}\, y_o + \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}\, y_2$$

avec $y_i = f(x_i) \quad i=0,1,2$

$P_2(x)$ est l'équation d'une parabole qui passe par trois points x_o, x_1, x_2 .

ex 1

Construire le polynôme de Lagrange de la fonction $y = \sin \pi x$ pour les pts $x_o = o$; $x_1 = \frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{1}{2}$

réponse :

dans ce cas n=2 et nous devons chercher un polynôme de degré inférieure ou égal à 2 ($P_2(x)$) de la forme .

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} \cdot y_o + \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)}\, y_1 + \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}\, y_2 .$$

$y_o = \sin \pi\, o = o$

$y_1 = \sin \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ d'où $P_2(x) = \dfrac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{6})(-\frac{1}{2})} \cdot o + \dfrac{(x)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6})(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}\, y_1 + \dfrac{(x)(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}\, y_2$

$y_2 = \sin \pi \cdot \frac{1}{2} = 1$

$$P_2(x) = \frac{x(x-1/2)}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}\, \frac{1}{2} + \frac{x(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}\; 1 = \boxed{-3x^2 + \frac{7}{2}\, x}$$

DETERMINATION PRATIQUE DES POLYNOMES DE LAGRANGE .

Dans le cas où les calculs sont effectués sur machine, la détermination des (n+1) polynômes $L_i(x)$ peut être conduite de la façon suivante .

Considérons le tableau carré :

$$\begin{array}{ccccc}
x-x_o & x_o-x_1 & x_o-x_2 & \cdots\cdots\cdots & x_o-x_n \\
x_1-x_o & x-x_1 & x_1-x_2 & \cdots\cdots\cdots & x_1-x_n \\
x_2-x_o & x_2-x_1 & x-x_2 & \cdots\cdots\cdots & x_2-x_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_n-x_o & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \cdots\cdots\cdots & x-x_n
\end{array}$$

Le polynôme $L_i(x)$ est le quotient de la diagonale pricincipale par la $(i+1)$-ième ligne de ce tableau .

Soit par exemple, à determiner les 5 polynômes $L_i(x)$ attachés aux valeurs:

$x_o = o$, $x_1 = 4$, $x_2 = -4$; $x_3 = 2$; $x_4 = 1$.

On a ce tableau .

(x)	-4	+4	-2	-1
4	(x-4)	8	2	3
-4	-8	(x+4)	-6	-5
2	-2	6	(x-2)	1
1	-3	5	-1	(x-1)

$$L_o(x) = \frac{x(x-4)(x+4)(x-2)(x-1)}{x(-4)(+4)(-2)(-1)} = \frac{(x-4)(x+4)(x-2)(x-1)}{(-4)(+4)(-2)(-1)}$$

$$L_o(x) = \frac{32}{32} - \frac{48}{32}.x + \frac{14}{32}.x^2 + \frac{3}{32}.x^3 - \frac{1}{32}x^4 ,$$

on obtiendrait, de la même façon .

$$L_1(x) = \frac{x(x-4)(x+4)(x-2)(x-1)}{4(x-4)(8)(2)(3)} = \frac{8}{192}x - \frac{10}{192}x^2 + \frac{1}{192}x^3 + \frac{1}{192}x^4$$

$$L_2(x) = -\frac{8}{960}x + \frac{14}{960}x^2 - \frac{7}{960}x^3 + \frac{1}{960}x^4$$

$$L_3(x) = -\frac{16}{24}x + \frac{16}{24}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{24}x^4$$

$$L_4(x) = \frac{32}{15}x - \frac{16}{15}x^2 - \frac{2}{15}x^3 + \frac{1}{15}x^4 .$$

Si nous reprenons l'exemple 1, on a le tableau suivant :

$$\begin{Bmatrix} x - o & x_o - x_1 & x_o - x_2 \\ x_1 - x_o & x - \frac{1}{6} & x_1 - x_2 \\ x_2 - x_o & x_2 - x_1 & x - \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & x - \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{6} & x - \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$L_o(x) = \frac{(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2})}{(-\frac{1}{6})(-\frac{1}{2})} = \frac{x^2 - \frac{4}{6}x + \frac{1}{12}}{+1/12}$$

$$L_1(x) = \frac{x(x - \frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})} = \frac{x^2 - \frac{x}{2}}{1/18}$$

$$L_2(x) = \frac{x(x - \frac{1}{6})}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{6})} = \frac{x^2 - \frac{x}{6}}{1/6}$$

bien sûr $P_2(x) = L_o\, y_o + L_1 y_1 + L_2\, y_2$

$= -3x^2 + \frac{7}{2}x$.

Evaluation de l'erreur de la formule de Lagrange .

Si le polynôme $P_n(x)$ de Lagrange est tel que

$P_n(x_o) = f(x_o)$; $P_n(x_1) = f(x_1)$; ....; $P_n(x_n) = f(x_n)$

où f est la fonction connue en certains points $x_o, x_1, \ldots, x_n$.

Quelle est la grandeur du reste ?

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$; on sait que $R_n(x_i) = o$, $i = o, 1, \ldots, n$.

developpt limité def.

En Supposons que la fonction $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$; $[a,b]$ contenant les pts d'interpolation; $f'(x)$, $f''(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$ existent jusqu'a l'ordre (u+1) y compris,

on établit que

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\Pi(x)} \quad (D)$$

Où ξ dépend de x et repose ∈ à l'intérieur de segment $[a,b]$

$\Pi(x) = (x-x_o)(x-x_1) \ldots\ldots\ldots.(x-x_n)$.

En posant

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

on a la majoration suivante

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi(x)|} \qquad (D')$$

exemple :

Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide de la formule de Lagrange pour la fonction $y = \sqrt{x}$ si l'on prend les points d'interpolation $x_o = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$?

réponse :

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ y'' &= \frac{-1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \\ y''' &= \frac{3}{8} x^{-5/2} \end{aligned}\right\}$$

$M_3 = \mathrm{Max}|y'''| = \frac{3}{8}(100)^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8} 10^{-5}$

(bien sur le Maximum de y''' est obtenu pour la plus petite valeur de x sur $[100,144]$)

En utilisant la formule (D') il vient

$$|R_n(x)| = |R_2(x)| \leq \frac{3}{8 \times 3!} 10^{-5} |(115-100)(115-121)(115-144)| \simeq 1{,}6 \times 10^{-3} .$$

Evaluation de l'erreur de la formule de NEWTON :

Si $x_o, x_1, \ldots, x_n$ sont équidistants et si

$x_{i+1} - x_i = h$, $(i=o,1,\ldots,n-1)$,

en posant $\frac{x - xo}{h} = q$ et en utilisant la formule (D), on obtient

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_o)(x-x_1) \ldots (x-x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (qh)(q-1)h \ldots (q-(+n))h$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} q(q-1)\ldots(q-n)h^{n+1}$$

donc

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} q(q-1) \ldots (q-n)h^{n+1}} \qquad (E)$$

(E) est l'erreur de la première formule de NEWTON .

De la même façon on posant $q = \frac{x - x_n}{h}$

On obtient le reste de la deuxième formule de NEWTON .

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} q\,(q+1)\,\ldots\ldots(q+n)h^{n+1}} \quad (E')$$

Où ξ est une valeur intermediaire entre les pts d'interpolation $x_o, x_1, \ldots\ldots, x_n$ et le pt x .

En supposant que $\Delta^{n+1} y$ soient quasi-constantes pour la fonction $y = f(x)$ et h suffisament petit et en tenant compte du fait que

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{h \to o} \frac{\Delta^{n+1} y}{h^{n+1}} .$$

On peut poser approximativement :

$$f^{(n+1)}(\xi) \simeq \frac{\Delta^{n+1} y_o}{h^{n+1}}$$

La formule (E) devient

$$\boxed{R_n(x) = \frac{q(q-1)(q-2)\ldots\ldots\ldots(q+n)}{(n+1)!} . \Delta^{n+1} y_o} \quad (1)$$

et la formule (E')

$$\boxed{R_n(x) = \frac{q(q+1)(q+2)\ldots\ldots\ldots(q+n)}{n+1\ !} \Delta^{n+1} y_o} \quad (2)$$

Chap VI : METHODES DE CALCUL D'INTEGRALES SIMPLES

INTRODUCTION :

Trés souvent on ne connait pas une primitive F de f, pour pouvoir lui applique la relation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Même si la primitive F est connue, si son expression est assez compliquée, il peut-être préférable d'utiliser une méthode approchée.

Dans le cas où f résulte de mesures plysiques et n'est connue que ponctuellement on ne peut avoir F; dans cette situation, on remplace la fonction f(x) par un polynôme d'interpolation $\varphi(x)$ sur le segment [a,b], et on admet que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ est peu different de } \int_a^b \varphi(x)dx .$$

A. INTEGRATION A L'AIDE DU POLYNOME DE LAGRANGE .

Supposons que, pour la fonction $y=f(x)$, on connait les valeurs correspondantes

$f(x_i) = y_i \quad (i=0,1,2,\dots\dots,n)$

en $(n+1)$ points $x_o, x_1, \dots\dots\dots, x_n$ du segment [a,b],

on demande de trouver approximativement

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f est de la forme

$$P_n(x) = \sum_{i=o}^{n} \frac{\Pi(x)\, y_i}{(x-x_i)\Pi'(x_i)}$$

où $\Pi(x) = (x-x_o)(x-x_1)\dots\dots\dots(x-x_n)$

et $\Pi'(x_i) = (x_i-x_o)(x_i-x_1)\dots\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots\dots(x_i-x_n)$.

Donc

$$f(x) = P_n(x) + \mathcal{E}(x) \quad \text{où} \quad \mathcal{E}(x_i) = o \quad i=o,\ldots\ldots,n\,.$$

Par suite

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (P_n(x) + \mathcal{E}(x))dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b \mathcal{E}(x)dx.$$

Ou encore

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + E_L(f)\,,$$

où $E_L(f)$ est une erreur de <u>quadrature</u>.

Et on a :

> la formule de quadrature approchée
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=o}^{n} A_i\, y_i + E_L(f)$$
>
> avec $A_i = \displaystyle\int_a^b \frac{\Pi(x)}{(x-x_i)\Pi'(x_i)}dx \qquad i=o,1,2,\ldots\ldots\ldots,$

<u>exercice 1:</u>

Calculer en utilisant le polynôme d'interpolation de lagrange

$\int_1^6 f(x)dx$ où f est donnée par

x	1	3	4	6
f(x)	-7	5	8	14

(réponse $P_n(x) = \frac{1}{5}(x^3-13x^2+69x-92)$ et $\int_1^6 f(x)dx \approx \int_1^6 P_3(x)dx \simeq 33,20$)

<u>exercice 2:</u>

Calculer en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange

$\int_{1,10}^{1,30} g(x)dx$ où g est donnée par

x	1,10	1,20	1,35
g(x)	0,90	0,93	0,97

<u>Réponse :</u>

On sait que les polynômes de Lagrange sont invariants par un changement de variables linéaire .

Posons $x = x_o + zh$ avec $x_o = 1,20$ et $h = 0,1$, donc $1,30 = 1,20 + 0,1\,z$

$x_0 = 1,20$
$h = 0,1$

d'où $z = 1$.

$1,20 = 1,20 + 0,1z \Rightarrow z = o$ et $1,35 = 1,20 + 0,1z \Rightarrow z = 1,5$.

On complete le tableau de la manière suivante :

x	1,10	1,20	1,35
g(x)	0,90	0,93	0,97
z	-1	0	+1,5
	z_o	z_1	z_2

$x = x_0 + zh$
$= 1,20 + 0,1z$

$x = 1,10$
$1,10 = 1,20 + 0,1\,z$
$z_0 = -1$

$x = 1,20$
$z_1 = 0$

$x = 1,35$
$z = 1,5$

$x = 1,30$
$z = 1$

Puisque $x = x_o + z\,0,1$,on a : $dx = 0,1\, dz$

$1,10 \leqslant x \leqslant 1,30 \Rightarrow -1 \leqslant z \leqslant +1$

et donc $\displaystyle\int_{1,10}^{1,30} g(x)dx = 0,1 \int_{-1}^{+1} g(1,20+0,1z).\, dz$

où $\displaystyle g(1,20+0,1z) = \sum_{i=o}^{2} \frac{\Pi(z)}{(z-z_i)\Pi'(z_i)} g(1,20+0,1z_i)$

On peut écrire

$$\int_{-1}^{+1} g(1,20+0,1z)dz = \sum_{i=o}^{2} A_i g(x_i)$$

avec $\displaystyle A_i = \int_{-1}^{+1} \frac{\Pi(z)}{(z-z_i)(\Pi' z_i)}\, dz \quad i = 0,1,2$

$$A_o = \int_{-1}^{+1} \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_o-z_1)(z_o-z_2)}\, dz = \int_{-1}^{+1} \frac{z(z-1)}{(-1)(-2,5)}\, dz \simeq 0,466$$

$$A_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{(z-z_o)(z-z_2)}{(z_1-z_o)(z_1-z_2)}\, dz = \int_{-1}^{+1} \frac{(z+1)(z-1,5)}{(+1)(-1,5)}\, dz \simeq 1,55$$

$$A_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{(z+1(z)}{(2,5)(1,5)}\, dz \simeq 0,177$$

Finalement $\displaystyle\int_{1,10}^{1,30} g(x)dx = 0,1\left[(0,466)(0,90)+(1,55)(0,93)+(0,177)(0,97)\right]$

$= 0,187$.

$x = 1,3 \Rightarrow z = 2$

$x_0 = 1,1$, $h = 0,1$

$z_0 = 0$

$x_1 = 1,20$

$z_1 = \dfrac{(1,20 - 1,10)}{0,1} = 1$

$\int_0^2$

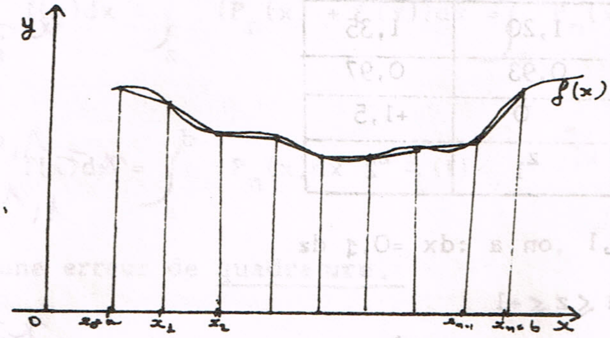
$x_2 = 1,35$

$z_2 = 2,5$

B. FORMULE DES TRAPEZES

On considère une subdivision de l'intervalle [a,b] en n intervalles égaux $x_i = a+ih$ i= 0,1........,n

$h=\frac{b-a}{n}$



Sur l'intervalle (x_i, x_{i+1}), on remplace la fonction f(x) par le segment de droite d'Equation $y-f(x_i) = (x-x_i)\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$.

Puisque chaque trapèze a pour aire

$$\left[\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\right](x_{i+1}-x_i) = \frac{1}{2}(f(x_{i+1})+f(x_i)) . h$$

L'aire totale sera

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{1}{2} f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots\dots+\frac{1}{2} f(x_n)\right]h$$

(donc la courbe est remplacée par une ligne brisée).

Posons : $T_h = \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n)\right] h$.

$I = \int_a^b f(x)dx$

et évaluons l'erreur commise $|E_h| = |I-T_h|$.

C. EVALUATION DE L'ERREUR.

Lemme : Soit $f \in C^2 [\alpha,\beta]$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$

$\exists \xi_x \in [\alpha,\beta]$ tel que

(1) $f(x) = f(x) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{1}{2}(x-\alpha)(\beta-x) f''(\xi_x)$.

De plus l'application $x \longmapsto f''(\xi_x)$ est continue sur $[\alpha,\beta]$.

Preuve :

posons :

$$\varphi(x) = f(x)-f(\alpha)-(x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} - c(x-\alpha)(\beta-x)$$

Soit $x_o \in [\alpha,\beta]$

On peut choisir c tel que $\varphi(x_o) = o$

$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = o$.

Comme $f \in C^2[\alpha,\beta]$ alors $\varphi \in C^2[\alpha,\beta]$

d'aprés le thèoreme de Rolle, $\exists\, \alpha_1$ et $\beta_1 \in]\alpha,\beta[$ tels que

$$\varphi'(\alpha_1) = \varphi'(\beta_1) = o$$

De même φ' est dérivable et continue, en appliquant le thèoreme de Rolle encore une fois

$$\exists\, \xi_{x_o} \text{ tq } \varphi''(\xi_{x_o}) = o \quad \text{or } \varphi''(x) = f''(x)+2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}f''(\xi_{x_o})$$

donc $\varphi''(x_o) = o$ et $C = -\frac{1}{2}f''(\xi_{x_o})$

$\Rightarrow \forall\, x \in [\alpha,\beta]$

$$O = f(x)-f(\alpha)-(x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x-\alpha)(\beta-x)$$

ie $f(x) = f(\alpha)+(x-\alpha)\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} - \dfrac{1}{2}f''(\xi_x)(x-\alpha)(\beta-x)$

d'où la relation (1).

Il reste à montrer que l'application $x \longrightarrow f''(\xi_x)$ est continue.

Il est évident que pour $x \neq \alpha$ et $x \neq \beta$, l'application $x \longrightarrow f''(\xi_x)$ est continue.

On peut prolonger par continuité pour x tendant vers α^+ et x tendant vers β^-.

En effet pour x tendant vers α^+ par exemple

$$\lim_{x \to \alpha^+} -\frac{1}{2}f''(\xi_x) = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)-(x-\alpha)\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}}{(x-\alpha)(\beta-x)}$$

Comme f et $(x-\alpha)(\beta-x)$ sont continues et dérivables et que $f(\alpha^+) = (x-\alpha)(\beta-x) = o$,

d'aprés l'Hôpital (règle de l'Hopital)