INTRODUCTION :

Soit le système linéaire $AX=B$ (1) où A est une matrice carrée et

$X={}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$B={}^t(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux vecteurs colonnes .

Si $\det A \neq 0$, (1) admet une solution unique X car

A^{-1} existe et $A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$.

PRINCIPE DE LA METHODE .

En utilisant les formules de CRAMER: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ (où Δ_i est le déterminant du système dont la $i^{ème}$ colonne a été remplacé par $B={}^t(b_1, b_2, \ldots b_n)$, le calcul sera long pour n assez élévé: $(n^3+n)n!$ opérations élémentaires (additions, soustractions, multiplications, divisions,...).

La résolution sera aisée si A^{-1} peut être trouvée facilement notament si:

A est une matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix},$$

A est une matrice orthogonale

${}^tAA=D$ (avec D matrice diagonale)

dans ce cas-là $AX=B$ ${}^tAAX={}^tAB \Leftrightarrow DX={}^tAB$

$$\Leftrightarrow \boxed{X = D^{-1}\,{}^tAB}$$

A est une matrice triangulaire supérieure :

Par exemple $n=4$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{22}x_2 \quad a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{33}x_3 \quad a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

Le déterminant $\prod_{i=1}^{4} a_{ii}$ n'est pas nul si a_{ii} ne l'est pas pour $i = 1, 2, 3, 4$.

De la dernière équation, on tire $x_4 = \dfrac{b_4}{a_{44}}$ et on remonte pour calculer x_3 ensuite x_2 et enfin x_1 .

METHODE DE GAUSS

<u>exemple</u> :

$1^{ère}$ $\boxed{2x + 3y + z = 5}$

$2^{ème}$ $5x - y + z = 9$

$3^{ème}$ $\dfrac{1}{2} x + 4y + 3z = -1$

(a) On élimine x dans les $2^{ème}$ et $3^{ème}$ Equation par combinaison linéaire avec le $1^{ère}$ équation .

$2^{ème} - \dfrac{5}{2} 1^{ère}$: $(-1- \dfrac{15}{2})y + (1- \dfrac{5}{2})z = 9 - \dfrac{25}{2}$

(2') $\boxed{-\dfrac{17}{2} y - \dfrac{3}{2} z = - \dfrac{7}{2}}$.

$3^{ème}$ $\dfrac{\frac{1}{2}}{2}$ $1^{ère}$: $(4- \dfrac{3}{4})y + (3- \dfrac{1}{4})z = (-1- \dfrac{5}{4})$

(3') $\boxed{\dfrac{13}{4} y + \dfrac{11}{4} z = - \dfrac{9}{4}}$.

(b) On élimine maintenant y entre les (2') et (3') equations

$(3') - (-1) \cdot \dfrac{2}{17} \cdot \dfrac{13}{4}$ (2')

$(\dfrac{11}{4} - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{17} \cdot \dfrac{13}{4}) z = - \dfrac{9}{4} - \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{17} \cdot \dfrac{13}{4}$

$\longleftrightarrow$ $(\dfrac{11}{4} - \dfrac{39}{68})z = - \dfrac{9}{4} - \dfrac{91}{68}$

$\longleftrightarrow$ $(\dfrac{148}{68} z = - \dfrac{244}{68} \Rightarrow z = - \dfrac{61}{37}$.

(c) (2') donne alors y et (1) donne x .

DESCRIPTION DE LA METHODE DE GAUSS :

Soit à résoudre le système d'équations linéaires :

(1) $AX=B$ où $A\in \mathcal{M}_{n,n}$, X et $B \in IR^n$

Il ya deux étapes: la première(les pts (a) et (b) de l'exemple et la triangulation du système) la deuxième, le pt (c) de l'exemple et la résolution du système triangulaire .

TRIANGULATION :

Reprenons le système (1) et effectuons les opérations suivantes :

$$\left.\left\{\begin{array}{ll} m_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} & \\ a^{2}_{ij} = a_{ij} - m_{i1}.a_{1j} & j=2,3\ ,\ \ldots,\ n \\ b^{2}_{i} = b_i - m_{i1}.b_1 & \end{array}\right.\right\}\ i=2,3\ ,\ldots,\ n$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \quad + a^{(2)}_{22}x_2 + \cdots\cdots + a^{(2)}_{2n}x_n = b^{(2)}_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 \qquad a^{(2)}_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a^{(2)}_{nn}x_n = b^{(2)}_n \end{array}\right.$$

On repète l'opération précédente sur le système des (n-1)dernières équations pour éliminer x_2

$$\left.\left\{\begin{array}{ll} m_{i2} = \dfrac{a^{(2)}_{i2}}{a^{(2)}_{22}} & \\ a^{(3)}_{ij} = a^{(2)}_{ij} - m_{i2}a^{(2)}_{2j} & j=3,\ \ldots,\ n \\ b^{(3)}_{i} = b^{(2)}_{i} - m_{i2}\,b^{(2)}_{2} & \end{array}\right.\right\}\ i=3,4\ldots,\ n$$

Ce qui remplace (2) par le système équivalent .

$$
(3)\left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
0 \quad + a_{22}^{(2)} x_2 + \dots\dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(3)} \\
\vdots \\
\vdots \qquad 0 \quad + a_{33}^{(3)} x_3 \dots + a_{3n}^{(3)} x_n = b_3^{(3)} \\
\vdots \\
0 \qquad 0 \qquad a_{n3}^{(3)} x_3 \dots\dots + a_{nn}^{(3)} x_n = b_n^{(3)}
\end{array}\right.
$$

Il est maintenant facile d'écrire la suite des opérations

$$
\left\{\begin{array}{l}
m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\
a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)} \quad \text{pour } j=k+1, \dots, n, \ i=k+1, \dots, n \text{ et } k=1, \dots n-1 . \\
b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} \, b_k^{(k)}
\end{array}\right.
$$

RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE :

On est donc amené à resoudre :

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots \\
\qquad\qquad a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = b_{n-1} \\
\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{array}\right.
$$

ce qui fait en "remontant",

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \ , \ x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1\,n-1}x_n)\frac{1}{a_{n-1\,n-1}}, \text{etc}$$

On peut écrire ces équations sous la forme :

$$\boxed{x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right) \Big/ a_{ii}} \qquad i=n, n-1, \dots\dots, 1$$

(avec la convention $\sum_{n+1}^{n} = 0$)

CAS DU PIVOT NUL :

L'algorithme n'est éxecutable que si le pivot $a_{kk}^{(k)}$ est non nul ; plus éxactement, l'algorithme reste éxecutable si, parmi tous les $a_{ik}^{(k)}$, i=k, ..., n, il y en a un non nul qui puisse servir de pivot aprés échange de l'ordre des équations restantes .

exemple :

$$x+y+z+t = \ldots\ldots\ldots$$

$$x+y+2z-4t = \ldots\ldots\ldots$$

$$x-y-\frac{1}{2}z + 2t = \ldots\ldots\ldots$$

$$2x+y \qquad -\frac{1}{2}t = \ldots\ldots\ldots$$

$a_{11} \neq 0$. La première étape donne

$$\begin{cases} \boxed{0} + z - 5t = \ldots\ldots\ldots \\ -2y - \frac{3}{2} z - t = \ldots\ldots \\ -y - 2z - \frac{5}{2} t = \ldots\ldots \end{cases}$$

$a_{22}^{(2)} = 0$, mais $a_{32}^{(2)} = 2 \neq 0$; on peut éliminer y de la dernière équation et permuter la $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$, ce qui ramène à la forme cherchée.

Soit :

$$\begin{cases} x+y+z+t = \ldots\ldots\ldots \\ -2y - \frac{3}{2}z - t = \ldots\ldots\ldots \\ -y - 2z - \frac{5}{2}t = \ldots\ldots \\ -z - 5t = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Retranchons de la troisième équation la deuxième multipliée par $\frac{1}{2}$:

$$0y + \left(-2 + \frac{3}{4}\right)z + \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)t = \ldots\ldots\ldots$$

ou bien $-\frac{5}{4}z - 2t = \ldots\ldots\ldots$

Le nouveau système équivalent sera :

$$\begin{cases} x+y+z+t = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -2y - \frac{3}{2}z - t = \ldots\ldots\ldots \\ -\frac{5}{4}z - 2t = \ldots\ldots \\ -z - 5t = \ldots\ldots \end{cases}$$

etc .....

Il est évident, puisque les systèmes construits à chaque étape sont équivalents au système (1), que l'on ne peut avoir

$a_{i_k}^{(k)} = 0$, $\forall$ i= k, ...,n que si et seulement si det A=0

comme, dans la pratique on ne connait pas det A, on prévoira dans le programe une sortie pour ce cas .

Méthode de Jordan :

On procède comme pour la méthode de Gauss mais on fait apparaitre des zéros dans toute la colonne (sauf sur la diagonale !)

Remarque :

En faisant apparaitre des 1 sur la diagonale (la colonne constante n'étant pas comprise) on aura

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

et donc $x_1 = \alpha_1$; $x_2 = \alpha_2$, ...; $x_n = \alpha_n$.

Exemple : Resoudre le système suivant .

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t = \dots\dots\dots\dots \\ -2y - \frac{3}{2}z - t = \dots\dots \\ \quad - \frac{5}{4}z - 2t = \dots\dots \\ \quad -z - 5t = \dots\dots \end{cases}$$

etc .....

Il est évident, puisque les systèmes construits à chaque étape sont équivalents au système (1), que l'on ne peut avoir

$a_{i_k}^{(k)} = 0$, $\forall$ i= k, ...,n que si et seulement si det A=0

comme, dans la pratique on ne connait pas det A, on prévoira dans le programe une sortie pour ce cas .

Méthode de Jordan :

On procède comme pour la méthode de Gauss mais on fait apparaitre des zéros dans toute la colonne (sauf sur la diagonale !)

Remarque :

En faisant apparaitre des 1 sur la diagonale (la colonne constante n'étant pas comprise) on aura

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

et donc $x_1 = \alpha_1$; $x_2 = \alpha_2$, ...; $x_n = \alpha_n$.

Exemple : Resoudre le système suivant .

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$T_o = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 5 & -6 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

On pivote autour de $a_{11} = 3$. On traite la nouvelle colonne absolument comme les autres, aprés transformation, on obtient

$$T_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 1/3 & 10/3 \\ 0 & -28/3 & -2/3 & -62/3 \\ 0 & 14/3 & 7/3 & 49/3 \end{array}\right]$$

on pivote alors autour de $a_{22} = -\dfrac{28}{3}$

$$T_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 15/7 \\ 0 & 1 & 1/14 & 31/14 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

on pivote autour de 2 .

$$T_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

La solution sera donc $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Application :

CALCUL D'UN DETERMINANT .

Examen

$\det A^\circ = a^\circ_{11} . \det (A^1)$

A° étant la matrice à l'état initial et

A^1 la matrice du système à l'état suivant ,

$\det A^1 = a^{(1)}_{22} \det (A^2)$

on a

$$\det A^\circ = \prod_{k=o}^{n-1} a^{(k)}_{(k+1)(k+1)} \det A^n$$

où A^n est la matrice du système à l'état final

or $A^n = I \Rightarrow \det A^n = \det I = 1$.

Donc le déterminant du système A° est de la forme

$$\boxed{\det A^\circ = \prod_{k=o}^{n-1} a^{(k)}_{(k+1)(k+1)}}$$

C'est le produit des pivots , ce qui montre que, si à une étape on ne peut trouver de pivot non nul, la matrice du système est non inversible .

exercice :

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7,4 & 2,2 & -3,1 & 0,7 \\ 1,6 & 4,8 & -8,5 & 4,5 \\ 4,7 & 7,0 & -6,0 & 6,6 \\ 5,9 & 2,7 & 4,9 & -5,3 \end{vmatrix}$$

RESOLUTION SIMULTANEE DE P-SYSTEMES LINEAIRES :

Soit à résoudre les 3 système linéaires suivants :

$$\begin{cases} AX = B \\ AY = B \\ AZ = B \end{cases} \qquad A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} ; Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -28 \\ -61 \end{bmatrix} ; B_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -12 \\ -27 \end{bmatrix} ; B_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 23 \\ 57 \end{bmatrix} .$$

on écrit le tableau initial sous cette forme .

$$\begin{array}{c} \\ T_0 = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:c:c:c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & -28 & -12 & 23 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & -61 & -27 & 57 \end{array}\right] \end{array}$$

On utilise donc la méthode de Gauss-Jordan .

On pivote autour de $a_{11} = 1$: on obtient

$$T_1 = \left[\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & -9 & -6 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & -28 & -17 & 31 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & -61 & -32 & 65 \end{array}\right]$$

On pivote autour du 1 encadré ; on obtient :

$$T_2 = \left[\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & -1 & -2 & +9 & +11 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -9 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -10 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & -34 & -14 & 35 \end{array}\right]$$

On pivote maintenant autour du 1 encadré; on obtient

$$T_3 = \left[\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & +6 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & +11 & +4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -10 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & +1 & 2 \end{array}\right]$$

Enfin on pivote pour une dérnière fois autour du dernier élement de la diagonale à savoir $a_{44} = 1$; nous obtiendrons

$$T_4 = \left[\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & +3 & +5 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & +5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & +2 & 2 \end{array}\right]$$

Et les solutions sont alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = +2 \\ x_4 = -4 \end{array}} \; ; \; \boxed{\begin{array}{l} y_1 = 5 \\ y_2 = 7 \\ y_3 = -8 \\ y_4 = +1 \end{array}} \; ; \; \boxed{\begin{array}{l} z_1 = -9 \\ z_2 = -6 \\ z_3 = +5 \\ z_4 = 2 \end{array}}$$

APPLICATION :

INVERSION DE MATRICES

Si A est inversible, A^{-1} éxiste et on a

$$AA^{-1} = I \quad .$$

D'où la résolution du système linéaire suivant :

$AX_i = E_i \quad ; E_i \in IR^n$, base canonique de IR^n

$E_i = (0,0,\ldots\ldots,1,0,0,\ldots\ldots,0)$

i.eme position

$X_i = A^{-1}.\,E_i = A_i^{-1}$ (colonne n° i de A^{-1})

Exemple :

Trouver la matrice inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc:c:c} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

on pivote autour de $\boxed{1}$

$$\left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 1 \end{array}\right]$$

on pivote autour de $\boxed{-2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{+3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ est bien entendu

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

METHODE DES RACINES CARREES : (ou méthode de Cholesky)

Rappels d'algèbre linéaire : Soit A une Matrice $\in \mathcal{M}_{n,n}$ (IR)

En posant ;

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{vmatrix} = D(A_k)$$

A_k est le $k^{\text{ième}}$ mineur principal de A .

Théorème 1 :

Si une matrice symétrique A est définie positive, elle admet tous ses déterminants mineurs $D_1, \ldots, D_n$ strictement positifs,

Théorème 2 :

Pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ (IR), Symétrique, non Singulière, soit le produit $A = B.{}^tB$, d'une matrice B triangulaire inférieure par sa transposée il faut et il suffit que A soit définie positive.

Méthode de Cholesky :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique, définie positive, cherchons une matrice R triangulaire inférieure telle que $A = R.{}^tR$, par identification posons $R = (r_{ij})$ avec $r_{ij} = 0$ si $i < j$.

On doit donc avoir $a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} r_{ik} . {}^tr_{kj} = \sum_{k=1}^{k=n} r_{ik}. r_{jk}$ où $i \leq j$

Alors : $$\boxed{a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=i} r_{ik}. r_{jk} \quad , \quad i \leq j} \qquad (A)$$

Identifions le terme a_{11} ,

cela donne $a_{11} = r_{11} . r_{11} = r_{11}^2$, $r_{11} = \pm\sqrt{a_{11}} \neq 0$

on choisira la determination positive

$a_{1j} = r_{11} . r_{j1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{r_{j1} = \frac{a_{1j}}{r_{11}} = \frac{a_{j1}}{r_{11}}}$ ($j = 2, 3$, ...,n)

d'où la $1^{\text{ère}}$ colonne de R.

La i^{eme} colonne de R sera déterminée par :

$a_{ii} = \sum_{k=1}^{k=i-1} r_{ik} . r_{ik} + r_{ii}\, r_{ii}$. (formule encadrée A pour $j = i$)

donc $a_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik}^2 + r_{ii}^2$

Ainsi :

$$\boxed{r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik}^2}}$$ on choisit la determination positive,

Puis

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=i-1} r_{ik}\, r_{jk} + r_{ii}\, r_{ji} \quad (\text{ formule A pour } i \leqslant j \text{ })$$

Ainsi

$$\boxed{r_{ji} = \frac{1}{r_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} r_{ik}\, r_{jk} \right].}$$

Une fois que R est trouvé le système s'écrit

$R^tR.\,X=B$, on pose ${}^tR\ X=Y$

et l'on résoud les deux systèmes .

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ RY = B \\ (2)\ {}^tR.X=Y \end{array}\right\}$$ qui sont tous les deux triangulaires avec R inférieure et ${}^tR$ supérieure .

Cela revient à écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} r_{11}\, y_1 = b_1 \\ r_{12}\, y_1 + r_{22}\, y_2 = b_2 \\ r_{13}\, y_1 + r_{23}\, y_2 + r_{33}\, y_3 = b_3 \\ \vdots \\ r_{1n} y_1 + r_{2n}\, y_2 + r_{3n}\, y_3 + \cdots\cdots + r_{nn} y_n = b_n \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} r_{11} x_1 + r_{12} x_2 + r_{13} x_3 + \cdots\cdots + r_{1n} x_n = y_1 \\ \qquad r_{22} x_2 + r_{23} x_3 + \cdots\cdots + r_{2n} x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad r_{nn}\, x_n = y_n \end{array}\right.$$

de (1) on déduira

$$y_1 = \frac{b}{r_{11}} \quad \text{et} \quad y_i = \frac{bi - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} y_k}{r_{ii}} \qquad i > 1$$

et de (2)

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}} \quad \text{et} \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} x_k}{r_{ii}} \qquad i < n$$

exemple :

Mettre $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ sous la forme $T\,{}^tT$ où T est une matrice triangulaire inférieure .

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}$$

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$t_{12} = \frac{a_{12}}{t_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t_{13} = \frac{a_{13}}{t_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{k=1}^{1} t_{2k}^2} = \sqrt{a_{22} - t_{21}^2} = \sqrt{a_{22} - t_{12}^2} = \sqrt{8-(2)^2} = 2$$

$$t_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^{2} t_{k3}^2} = \sqrt{a_{33} - (t_{13}^2 + t_{23}^2)} = \sqrt{10 - (1+t_{23}^2)}$$

calculons t_{23}

$$t_{23} = \frac{1}{t_{22}} \left[a_{23} - \sum_{k=}^{1} t_{2k} \cdot t_{k3} \right]$$

$$= \frac{1}{t_{22}} \left[a_{23} - t_{21}\, t_{13} \right] = \frac{1}{2} \left[2 - (2)(1) \right] = 0 \,.$$

Ainsi

$$t_{33} = \sqrt{10-1} = 3$$

d'où la matrice T

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^tT = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

Remarque :

A étant symétrique, il aurait été prudent de vérifier, qu'elle est définie positive, et ceci grace au théorème 1 de ce chapitre

$$a_{11} = 1 > 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad ; \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} > 0$$

Application :

Résoudre le système AX=B avec $X = {}^t(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ )$ et $B = {}^t(10,\ -5,\ 1)$.

On pose puisque $A = T^tT$; ${}^tTX = \ ;Y = {}^t(y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ )$

il vient

$$\left\{\begin{array}{l} 1y_1 \qquad\qquad = 10 \\ 2y_1 + 2y_2 + \quad = -5 \\ y_1 + \quad + 3y_3 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = 10 \\ y_2 = -25/2 \\ y_3 = -3 \end{array}$$

et puisque

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ \qquad 2x_2 + 0x_3 = y_2 \\ \qquad\qquad + 3x_3 = y_3 \end{array}\right.$$

on tire :

$$x_3 = \frac{y_3}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$x_2 = \frac{y_2}{2} = \frac{-25/2}{2} = \frac{-25}{4}$$

$$x_3 = 10 + 1 + \frac{25}{2} = \frac{46}{2} = 23 \quad .$$

exercice :

Résoudre par la méthode des racines carrées la système d'équation suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad - 2x_5 = 0,5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 5,4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5,0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 7,5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3,3 \end{array}\right.$$

Chap IV : METHODES INDIRECTES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES.

INTRODUCTION :

"Les méthodes directes sont utilisables actuellement sur des ordinateurs pour $n \leqslant 100$ au dela, l'influence des érreurs et considérable.

De plus, les systèmes linéaires à n=1000 sont trés courants, ce sont, les systèmes obtenus dans une résolution déquations aux différences données par des systèmes différentiels."

"Il s'agit de savoir si une méthode qui consisterait à s'approcher pas à pas de la solution ne serait pas plus "éfficace" qu'une méthode directe (comme celle déja vue au chapitre précédent)."

Rappels sur les normes matricielles .

Soit E un éspace vectoriel sur IR (ou $\mathbb{C}$).

Une norme de E est une application

$$N : E \longrightarrow IR^+$$

$$x \longmapsto N(x) \text{ telle que}$$

i) $N(x) = o \Leftrightarrow x=o$

ii) $N(\lambda x) = |\lambda|\ N(x),\ \forall\ x \in E,\ \forall \lambda \in IR.$

iii) $N(x+y) \leqslant N(x)+N(y),\ \forall\ (x,y) \in E^2$

Norme de vecteurs:

Exemples:

$$E = IR^n \text{ (ou } \mathbb{C}^n)$$

Soit x un vecteur de IR^n

$$x = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

Alors $N(x) = \underset{i=1,n}{\text{Max}} |x_i|$ est une norme (verifier i,ii,iii)

$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ est aussi une norme

$N_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)1/p$, norme de Hölder

$$N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$, norme Euclidiènne.

Norme de matrices :

Une norme matricielle est une application de l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,n}(IR)$ dans IR^+ qui satisfait aux axiomes (i,ii,iii)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(IR)$; $A = (a_{ij})$ $i = 1,\dots,n$; $j = 1,\dots,n$

$$N_p(A) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{1/p}$$

exemple :

$$N(A) = \underset{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}{\mathrm{Max}} |a_{ij}| \quad ; \quad N_1(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} N(A) = \mathrm{Max}\,(1,2,3,4,5,\dots,9) = 9 \\ N_1(A) = 1+2+3+|-4|+5+6+7+|-8|+9 = 45 \end{array}$$

Normes multiplicatives :

définition : Soit φ une norme sur $\mathcal{M}_{n,n}(IR)$. Si pour tout A,B appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(IR)$, on a :

$$\varphi(AB) \leq \varphi(A).\varphi(B)$$

alors φ est dite multiplicative.

Théorème :

Sur IR^n (ou $\mathbb{C}^n$) toute norme de la forme, $S_{\varphi\varphi}$ telle que

$$S_{\varphi\varphi}(A) = \underset{\substack{x \in IR^n \\ x \neq 0}}{\mathrm{Sup}} \left(\frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)}\right)$$ est multiplicative,

Preuve :

$S_{\varphi\varphi}$ est d'abord une norme. (exercice)

Montrons qu'elle est multiplicative ie, $\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}^2_{n,n}$ (IR)

$$\varphi(AB) \leq \varphi(A).\varphi(B).$$

En effet :

$$\frac{\varphi(ABx)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(ABx)}{\varphi(Bx)} \times \frac{\varphi(Bx)}{\varphi(x)} \quad \text{si } Bx \neq o$$

on pose alors $Bx = y$

et donc $\displaystyle \operatorname*{Sup}_{x \neq o} \frac{\varphi(ABx)}{\varphi(x)} = \operatorname*{Sup}_{\substack{y \neq o \\ x \neq o}} \frac{\varphi(Ay)}{\varphi(y)} \cdot \frac{\varphi(Bx)}{\varphi(x)} \leq \operatorname*{Sup}_{y \neq o} \frac{\varphi(Ay)}{\varphi(y)} \cdot \operatorname*{Sup}_{x \neq o} \frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)}$.

Ainsi :

$$S_{\varphi\varphi}(AB) \leq S_{\varphi\varphi}(A).\ S_{\varphi\varphi}(B).$$

Exemple de normes multiplicatives :

$$S_{\varphi\varphi}(A) = \operatorname*{Max}_{i=1} \sum_{j=1}^{n} |aij|$$

$$S_{\varphi_1\varphi_1}(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |aij|$$

Rayon spéctral

Definition: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ (IR), on appelle rayon spéctral de A et on note

$\rho(A) = \operatorname*{Max}_{i=1,n} |\lambda i|$, où les λi sont les valeurs propres de la matrice A.

Théorème :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$(IR), pour toute norme φ sur IR^n.

$$\rho(A) \leq S_{\varphi\varphi}(A).$$

Preuve:

Soit v un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ de plus grand module

$\rho(A) = \operatorname*{Max}_{i=1,..n} |\lambda i| = \lambda$ $\quad v \neq o$ bien sûr ....

$Av = \lambda v \Rightarrow \varphi(Av) = \varphi(\lambda v) = |\lambda|\ \varphi(v) = \rho(A)\varphi(v)$ (φ étant une norme)

d'où $\displaystyle \rho(A) = \frac{\varphi(Av)}{\varphi(v)} \leq \operatorname*{Sup}_{x \neq o} \frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)} = S_{\varphi\varphi}(A).$

ie $\rho(A) \leq S_{\varphi\varphi}(A).$

SERIE MATRICIELLE GEOMETRIQUE :

Théorème :

La série matricielle $I+D+D + \ldots\ldots + D^k + \ldots\ldots$ converge si et seulement si le rayon spectral $\rho(D)$ de la matrice D est inferieur à 1 .

ie $\rho(D) = \underset{i}{\mathrm{Max}}\, |\lambda i| < 1$.

Preuve :

(La démonstration fait appel à la théorie de la réduction des matrices).

Supposons pour simplifier que D soit diagonalisable

$D^{-1} = S^{-1}[\lambda i]S$, où $[\lambda i]$ représente la matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{m} D^k = S^{-1}\left[\sum_{k=0}^{m} \lambda_i^{\,k}\right]S$$

Si tous les λi, vérifient $|\lambda i| < 1$, les séries $\sum_{k=0}^{m} \lambda_i^{\,k}$ convergent

et donc $\sum_{k=0}^{m} D^k$ converge .

s'il existe un $i \in 1,n$ tq $|\lambda i| > 1$, la série $\sum_{k=0}^{m} \lambda_i^{\,k}$ n'a pas de limite

et $\sum_{k=0}^{m} D^k$ diverge

donc il y'a convergence si le $\underset{i}{\mathrm{Max}}\, |\lambda i| < 1$.

Corollaire :

La série matricielle $\sum_{k=0}^{\infty} D^k$ converge si $S_{\varphi\varphi}(D) < 1$ pour une norme multiplicative $S_{\varphi\varphi}$ quelconque .

En effet :

$\rho(D) = \underset{i}{\mathrm{Max}}|\lambda i| \leq S_{\varphi\varphi}(D) < 1$

donc $\rho(D) < 1$.

Remarque :

Si A est une matrice inversible, φ une norme, considérons l'application

$\varphi_A : x \longmapsto \varphi(Ax) = \varphi_A(x) \in IR_+$.

1°) $\varphi_A(x) = \varphi(Ax) = o$ est équivalente à $x=o$

2°) $\varphi_A(\lambda x) = \varphi(A\lambda x) = |\lambda| \cdot \varphi(Ax) = |\lambda| \cdot \varphi_A(x)$.

3°) $\varphi_A(x+y) = \varphi(A(x+y)) = \varphi(Ax+Ay) \leqslant \varphi(Ax) + \varphi(Ay) \leqslant \varphi_A(x) + \varphi_A(y)$.

Donc φ_A est norme de vecteurs sur IR^n (ou $\mathbb{C}^n$).

Définition :

Pour A matrice $\in \mathcal{M}_{n,n}$ sur IR^n (ou $\mathbb{C}^n$) normé par φ.

On appelle "Conditionnement" de A, relatif à la norme φ, le rapport des bornes de $r(x) = \dfrac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)}$

$$\gamma_\varphi(A) = \frac{1}{S_{\varphi\varphi}(A^{-1}) S_{\varphi\varphi}(A)} \qquad \text{Si A est non Singuliere}$$

Remarquons que :

****** $\quad 0 < \gamma_\varphi(A) \leqslant 1$

****** Si $\gamma_\varphi(A)$ est proche de 0; on dira que c'est un mauvais conditionnement

****** Si $\gamma_\varphi(A)$ est proche de 1; on dira que c'est un bon conditionnement

****** $\gamma_\varphi(\lambda A) = \gamma_\varphi(A)$ pour tout scalaire λ $(\neq o)$.

exercice :

- Montrer que si A est non singulière $\gamma_\varphi(A^{-1}) = \gamma_\varphi(A)$
- Montrer que si A et B sont inversibles, $S_{\varphi\varphi}(A^{-1}-B^{-1})|S_{\varphi\varphi}(B^{-1}) \leqslant \gamma_\varphi(A) S_{\varphi\varphi}(A-B)|S_{\varphi\varphi}(A)$.

ITERATION ET RELAXATION

Principe :

Sur IR^n (ou $\mathbb{C}^n$), normé par une norme φ.

Soit le système $AX=b$, ou $AX-b=o$, soit Xo une solution quelconque.

Posons :

$r_o = AXo - b$ (La colonne ro est dite le résidu relatif au système pour Xo)

Itération :

$Xo \dashrightarrow ro = AXo-b$

on cherche un moyen de modifier X_o en X_1

puis X_1 en X_2 .

$$X_1 \dashrightarrow r_1 = AX_1 - b$$

et ainsi nous obtenons 2 suites de vecteurs de IR^n

$$\{X_o, X_1, X_2, \ldots\ldots X_p, \ldots\ldots\} \text{ et } \{r_o, r_1, \ldots\ldots, r_p, \ldots\ldots\} .$$

Définition :

Si le moyen de passer de X_p à X_{p+1} n'altère qu'une composante de X_p (pour obtenir X_{p+1}), on dit que le moyen en question et une relaxation sinon on dit que c'est une itération .

Théorème :

Si A est non singulière (det $A \neq o$), une condition nécéssaire et suffisante pour que la suite (X_p) converge vers la solution Ω de $AX=b$ est que la suite r_p des résidus converge vers le vecteur nul de IR^n (ou $\mathbb{C}^n$).

Preuve :

Posons $Ep = Xp - \Omega$ c'est "l'erreur" au $p^{\text{ième}}$ "pas ",

$A\Omega = b$;

$$r_p = AXp - b = AXp - A\Omega + A(Xp - \Omega) = AEp.$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{c} r_p = AEp \\ \text{et } Ep = A^{-1} r_p \end{array}} \qquad (1)$$

Si φ est la norme utilisée

$$(\alpha) \qquad \varphi(r_p) \leqslant S_{\varphi\varphi}(A).\varphi(Ep)$$

(car $\varphi(AEp) = \dfrac{\varphi(AEp)}{\varphi(Ep)} . \varphi(Ep) \leqslant S_{\varphi\varphi}(A). \varphi(Ep)$

et

$$(\beta) \qquad \varphi(Ep) \leqslant S_{\varphi\varphi}(A^{-1}) . \varphi(r_p)$$

(car $\varphi(Ep) = \varphi(A^{-1} r_p) = \dfrac{\varphi(A^{-1} r_p)}{\varphi(r_p)} . \varphi(r_p) \leqslant S_{\varphi\varphi}(A^{-1}) . \varphi(r_p)$.

Si on suppose maintenant que $Xp \xrightarrow[p \to \infty]{} \Omega$, alors $\varphi(Ep) \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$

et d'aprés (α) $\varphi(rp) \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$, d'où l'implication dans un sens.

Si $r_p \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$; $\varphi(r_p) \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$ et d'aprés (β), nous aurons :

$\varphi(Ep) \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$ donc $Xp \xrightarrow[p \to \infty]{} \Omega$.

Remarque :

L'inégalité (β) indique (puisque r_p est connu dés que Xp l'est) une majoration absolue de la norme de l'erreur à laquelle on préfère une majoration basée sur la considération du rapport $\dfrac{\varphi(r_p)}{\varphi(Xp)}$, " AFFAIBLISSEMENT RELATIF " des residus en norme φ; et du rapport $\dfrac{\varphi(Ep)}{\varphi(Xp)}$ " ERREUR RELATIVE " en norme φ .

Théorème :

Pour un affaiblissement relatif donné $\eta = \dfrac{\varphi(r_p)}{\varphi(Xp)}$, le rapport des érreurs relatives extrèmes est égal au conditionnement $\gamma_\varphi(A)$ de la matrice A .

Preuve :

$$\eta = \frac{\varphi(r_p)}{\varphi(Xp)} = \frac{\varphi(AEp)}{\varphi(Ep)} \quad \frac{\varphi(Ep)}{\varphi(Xp)} \qquad \text{puisque } r_p = AEp$$

donc

$$\frac{\varphi(Ep)}{\varphi(Xp)} = \eta \Big/ \frac{\varphi(AEp)}{\varphi(Ep)}$$

Mais $\dfrac{1}{S_{\varphi\varphi}(A^{-1})} \leqslant \dfrac{\varphi(AX)}{\varphi(X)} \leqslant S_{\varphi\varphi}(A)$ $\forall x \neq o$ (cf exercice en fin de paragraphe)

Nous aurons par analogie

$$\frac{1}{S_{\varphi\varphi}(A^{-1})} \leqslant \frac{\varphi(AEp)}{\varphi(Ep)} \leqslant S_{\varphi\varphi}(A)$$

par suite

$$\frac{1}{S_{\varphi\varphi}(A)} \leqslant \frac{1}{\dfrac{\varphi(AEp)}{\varphi(Ep)}} \leqslant S_{\varphi\varphi}(A^{-1})$$

En multipliant par η, il vient

$$\frac{\eta}{S_{\varphi\varphi}(A)} \leqslant \frac{\eta}{\dfrac{\varphi(AEp)}{\varphi(Ep)}} \leqslant \eta\, S_{\varphi\varphi}(A^{-1})$$

c'èst à dire

$$\frac{\eta}{S_{\varphi\varphi}(A)} \leqslant \frac{\varphi(Ep)}{\varphi(Xp)} \leqslant \eta\, S_{\varphi\varphi}(A^{-1}),$$

autrement dit :

erreur relative minimum $\leqslant$ Erreur relative $\leqslant$ Erreur relative maximum ;

$$\text{d'où} \qquad \gamma_{\varphi}(A) = \frac{\text{erreur relative minimum}}{\text{erreur relative maximum}} = \frac{1}{S_{\varphi\varphi}(A).S_{\varphi\varphi}(A^{-1})}$$

Remarque :

$$\gamma_{\varphi}(A) \leqslant 1 \;, \quad \text{Car } 1 = S_{\varphi\varphi}(I) = S_{\varphi\varphi}(AA^{-1}) \leqslant S_{\varphi\varphi}(A).S_{\varphi\varphi}(A^{-1})$$

donc

$$\frac{1}{S_{\varphi\varphi}(A)S_{\varphi\varphi}(A^{-1})} \leqslant 1.$$

Exercice :

Soit φ une norme définie sur $\mathbb{C}^n$.

ψ une norme définie sur $\mathbb{C}^n$.

1°) Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$,montrer que

$$S_{\psi\varphi}(A) = \sup_{x\neq 0} \left(\frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)} \right),$$ noté $||A||$, définit bien une norme

sur $\mathcal{M}_{n,n}$ (on admettra que la borne sup de $\dfrac{\psi(Ax)}{\varphi(x)}$ est bien finie)

2°) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est inversible on a

$$0 < \frac{1}{S_{\varphi\varphi}(A^{-1})} \leqslant \frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)} \leqslant S_{\varphi\varphi}(A) \;, \quad \forall\, x \neq 0$$

3°) Montrer qu'une condition nécéssaire et suffisante d'inversibilité de A est :

$$\exists\, \alpha \quad \text{tq} \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)} \; ; \quad \forall\, x \neq 0$$

4°) Si A et B $\in \mathcal{M}_{n,n}$, montrer que $S_{\varphi\varphi}(AB) \leqslant S_{\varphi\varphi}(A) . S_{\varphi\varphi}(B)$.

RESOLUTION PAR ITERATION (APPROXIMATIONS SUCCESSIVES)

PRICIPE DE LA METHODE .

Soit AX = B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \; ; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

de façon explicite :

$$\text{I} \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\text{I}' \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \left(0 x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\, x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}\, x_3\right) \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \left(\dfrac{a_{21} x_1}{a_{22}} + 0 x_2 + \dfrac{a_{23}\, x_3}{a_{22}}\right) \\[2ex] x_3 = \dfrac{b_3}{a_{33}} - \left(\dfrac{a_{31}}{a_{33}}\, x_1 + \dfrac{a_{32} x_2}{a_{33}} + 0 x_3\right) \end{cases}$$

Sous forme matricielle I' donne

(1) $\boxed{X = C + MX}$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; ; \quad C = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{a} \\[1ex] \dfrac{b}{a} \\[1ex] \dfrac{b}{a} \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\[2ex] \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \\[2ex] \dfrac{a_{31}}{a_{33}} & \dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix}$$

La méthode consiste à faire de la relation (1) une formule d'itération .
Connaissant X_k à l'étape k; on construit X_{k+1} à l'aide de la relation (1) d'où un moyen de passer de X_k à X_{k+1} . Soit

$$X_{k+1} = C + MX_k .$$

donc si la suite X_o, X_1, X_2, ..., X_k, ... ainsi construite a une limite , cette limite est solution du système linéaire AX=B; $X = \lim_{k \to \infty} X_k$.

Explicitons le procéssus en partant de $X_o = \begin{bmatrix} o \\ o \\ o \end{bmatrix}$

$X_1 = C$

$X_2 = C + MC = (I+M)C$

$X_3 = C+M(I+M)C = (I+M+M^2)C$

$\vdots$

$X_k = (I+M+M^2 + \ldots\ldots\ldots + M^{k-1})C$

d'où $X = \lim_{k \to \infty} X_k = (I+M+M^2 + \ldots\ldots)C$

or on a

$$(I-M)(I+M+M^2+\ldots\ldots+\ldots+) = I$$ (au cas où la norme de M serait inférieure à 1)

on en déduit

$$(I-M).X = IC = C$$

Soit $\boxed{X = (I-M)^{-1} C}$

Posons $D = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & o & o \\ o & 1/a_{22} & o \\ o & o & 1/a_{33} \end{bmatrix}$

$(I-M) = DA$ et $C = DB$

$$\Rightarrow \quad X = (DA)^{-1}. C = A^{-1}. D^{-1}. DB = A^{-1}B$$

donc la-limite X est bien solution du système linéaire AX=B

Exemple :

Résoudre par la méthode des approximations successives le système

$$(1)\quad \begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 \\ x_2 = 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3 \\ x_3 = 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) s'écrit
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

L'approximation initiale de (1), on prend $x_1^{\circ} = 2$; $x_2^{\circ} = 3$; $x_3^{\circ} = 5$.

En portant ces valeurs dans le second membre de (2), on obtient

$$x_1^{(1)} = 2 - (0{,}06).3 + (0{,}02).5 = 1{,}92$$

$$x_2^{(1)} = 3 - (0{,}03).2 + (0{,}05).5 = 3{,}19$$

$$x_3^{(1)} = 5 - (0{,}01).2 + (0{,}02).3 = 5{,}04$$

On reporte ces approximations dans (2) ; on obtient ,

$x_1^{(2)} = 1{,}9094$; $x_2^{(2)} = 3{,}1944$; $x_3^{(2)} = 5{,}0446$.

Aprés une autre substitution on obtient .

$x_1^{(3)} = 1{,}90923$; $x_2^{(3)} = 3{,}19495$; $x_3^{(2)} = 5{,}04485$ etc ....

CONDITION SUFFISANTE DE LA CONVERGENCE DU PROCESSUS.

Théorème

Si au moins une des conditions :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \displaystyle\sum_{j=}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n) \\ & \text{ou} \\ (2) & \displaystyle\sum_{j=}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n) \end{array}\right\} \qquad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ pour } i \neq j,$$

est vraie pour le système réduit (I'), le procéssus itératif

$\boxed{X_{k+1} = C + MX_k}$ converge vers la solution unique du système

quel que soit le choix de l'approximation initiale .

Corollaire :
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad (i=1,2, \ldots\ldots, n)$$

La méthode des approximation successives converge si les inegalités
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |a_{ij}| \quad (i=1,2, \ldots\ldots\ldots, n)$$

sont vérifiées ie si pour toute équation du système le coefficient diagonal est plus grand en module que la somme des modules de tous les autres coefficients (sans termes constants).

Réduction d'un système linéaire à la forme commode pour l'itération .

Le Théorème ci-dessus impose des conditions serrées aux coefficients du système linéaire consideré .

Toutefois, si det $A \neq o$, la combinaison linéaire des équations du système permet toujours de remplacer ce dernier par un système équivalent tel que les conditions du théorème de convergence soient remplies .

EXEMPLE :

Ramener le système suivant au type commode pour l'itération

$$\begin{array}{ll} (A) & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3 = 0 \\ (B) & x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ (C) & 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 = 0 \\ (D) & 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \end{array}\Bigg\}$$

Solution :

Le coéfficient de x_3 de l'Equation (B) étant plus grand en module que la sommes des modules des autres coéfficients, on peut considerer cette équation comme la troisième équation d'un nouveau système .

Dans l'équation D le coéfficient de x_1 est également plus grand que la somme des modules des autres coéfficients: Cette équation peut donc être prise pour la première équation du nouveau système .

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \\ (II) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ (III) & x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ (IV) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\end{array}\right\}$$

Il nous faut placer maintenant dans (II) une équation dont le ~~co-~~efficient de x_2 est maximal. En faisant (B)-(A) nous obtenons :

(II) $-x_1 - 5x_2 - x_3 + ox_4 + 1 = 0$

le système s'écrira

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \\ (II) & -x_1 - 5x_2 - x_3 + ox_4 + 1 = 0 \\ (III) & x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ (IV) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\end{array}\right\}$$

L'Equation (IV) doit necéssairement être une combinaison linéaire comprenant l'équation (C) ,

on peut prendre l'equation (D)-2(A)+(B)-2(C) , on obtient

(IV) $-3x_1 + ox_2 + ox_3 + 9x_4 + 10 = 0$,

donc le système est ramené à la forme commode d'itération

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \underline{10x_1} + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \\ (II) & -x_1 \underline{-5x_2} - x_3 + ox_4 + 1 = 0 \\ (III) & x_1 - 2x_2 \underline{-5x_3} + x_4 - 2 = 0 \\ (IV) & -3x_1 + ox_2 + ox_3 + \underline{9x_4} + 10 = 0\end{array}\right\}$$

Vérifiant les conditions de convergence, les coefficients diagonaux étant prépondérants .

La résolution du système par rapport aux inconnues diagonales conduit aux système .

$$\left\{\begin{array}{l}x_1 = 0\,x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 - 0,2x_4 - 0,4 \;; \\ x_2 = 0,2x_1 + 0x_2 + 0,2x_3 + 0x_4 + 0,2 \;: \\ x_3 = 0,2x_1 - 0,4x_2 + 0x_3 + 0,2x_4 - 0,4 \;: \\ x_4 = 0,333x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1,111;\end{array}\right.$$

auquel on peut appliquer la méthode des approximations successives .

LA METHODE DE GAUSS-SEIDEL .

- Principe de la méthode :

Etant donné le système $AX=b$.

On peut tirer x_1 de la 1^{er} équation ; x_2 de la deuxième équation ; x_3 de la troisième équation etc ....

Pour calculer x_p , on tient compte des (p-1) valeurs obtenues $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$

ainsi la formule d'itération est :

$$\boxed{X_{k+1} = C + MX_k}.$$

La méthode itérative étudiée précédement fournit le système suivant (n=3)

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1}{a_{11}} - \left(ox_1^{(k)} + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{k} + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{k} \right) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} + ox_2^{(k)} + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{k} \right) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3}{a_{33}} - \left(\frac{a_{21}}{a_{33}} x_1^{(k)} + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(k)} + ox_3^{k} \right)
\end{aligned}\right\}$$

tandis que la méthode de Gauss-Seidel donne

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1}{a_{11}} - \left(ox_1^{(k+1)} + \frac{a_{21}}{a_{11}} x_2^{(k)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} \right) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} + ox_2^{k+1)} + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} \right) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3}{a_{33}} - \left(\frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(k+1)} + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(k+1)} + ox_3^{(k+1)} \right)
\end{aligned}\right\}$$

<u>Exemple</u> :

$$\left.\begin{aligned}
4x_1 + x_2 &= 6 \\
3x_1 + 2x_2 &= 7
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Si on choisit $x_1^{(1)} = \frac{3}{2}$ alors pour déterminer $x_2^{(1)}$ on tient compte de la valeur $x_1^{(1)}$

$$x_2^{(1)} = \frac{7}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

On génère ainsi la suite $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 19/16 \\ 55/32 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 137/128 \\ 485/256 \end{bmatrix} ; \ldots \to \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

CONDITION DE CONVERGENCE

Cas d'un système normal

Définition : Un polynôme homogène du second degré à n variable s'appelle forme quadratique de ces variables. Dans le cas général la forme quadratique s'écrit :

$$U(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n) = a_{11}\ x_1^2 + a_{22}\ x_2^2 + \ldots + a_{nn}\ x_n^2 + 2a_{11} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \ldots\ldots + 2a_{(n-1)(n)} \cdot x_{n-1} x_n \quad (1)$$

où a_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots\ldots,n)$ sont des nombres constants.

$U(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n) = C$ (Equation d'une quadrique à centre).

Si on pose $a_{ij} = a_{ji} \dashrightarrow 2a_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$

(1) s'écrit donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ x_j = U(x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n)$ (1')

-$A = (a_{ij})$ s'appelle matrice de la forme quadratique (1')

-A est symétrique .

Définition :

Une forme quadratique (1) est dite définie positive (négative) si elle prend des valeurs positives (négatives) et ne s'annulle qu'en

$x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0$

Définition :

Le système linéaire $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j = b_i$ $(i = 1,2,\ldots\ldots,n)$ (4)

est dit normal si :

1°) $A = (a_{ij})$ est symétrique (ie $a_{ij} = a_{ji}$),

2°) la forme quadratique correspondante $U = \displaystyle\sum_i\sum_j a_{ij}\ x_i\ x_j$ est définie positive .

Ramenons le système normal (4) par le procédé usuel à la forme spéciale .

$$\begin{cases} x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\ x_j + \beta_i \\ \text{où } \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\ (j \neq i)\quad \beta_i = \dfrac{b}{a_{ii}} \end{cases} \quad (4')$$

Théorème :

Si le système linéaire (4) et un système normal; Le procéssus de Gauss-SEIDEL du système réduit (4') équivalent est toujours convergent.

Théorème :

Si les deux membres d'un système linéaire $Ax = b$ (5) à matrice régulière $A = (a_{ij})_{i,j}$ sont multipliés à gauche par le transposée ${}^tA = (a_{ji})_{i,j}$, le nouveau système

${}^tA\,Ax = {}^tA\,b$ sera système normal.

Preuve :

Il s'agit de montrer que ${}^tA\,A$ est une matrice symétrique et que la forme quadratique associée à ${}^tA.A$ est définie positive.

${}^tA.A$ est symétrique, en effet ${}^t({}^tA.A) = {}^tA.{}^{tt}A = ({}^tA\,A)$

$S = {}^tA.A$, la matrice S est définie positive, si ${}^tU.SU \geq o$ pour tout U et ${}^tU.SU = o$ implique $U=o$, en effet

${}^tU.SU = {}^tU\,{}^tA\,AU = ||AU||^2$, carré de la norme euclidienne de AU

donc $\geq o$

${}^tU.SU = {}^tU{}^tAAU = o \Leftrightarrow ||AU||^2 = o \Leftrightarrow AU=o \Leftrightarrow U=o$ (puisque A est régulière).

AMELIORATION DE LA SOLUTION :

Soit l'équation $AX=b$. (1)

si $\tilde{X}o$ est la solution trouvée approximativement, on a

(2) $b- A\tilde{X}o = Ro$ est le résidu.

En additionnant (1) et (2) :

$$b- A\tilde{X}_o + AX = b+ Ro$$

ie $A(X-\tilde{X}o) = Ro$

donc $X_1 = X-\tilde{X}o$ est solution du système.

$$AX_1 = Ro .$$

En résolvant ce dernier, on obtient $\widetilde{X}_1$ et la valeur améliorée de la solution de (1) s'écrira

(3) $$\boxed{X = \widetilde{X}_o + \widetilde{X}_1} \quad .$$

Pour apprécier la précision de cette nouvelle valeur de X, on forme le residu .

(4) $R_1 = b-A(\widetilde{X}_o+ \widetilde{X}_1)$.

Si R_1 est nul alors la solution de (1) est donnée par (3), sinon on peut écrire en faisant la difference terme à terme des relations (1) et (4)

(5) $R_1 = A[X-(\widetilde{X}_o+\widetilde{X}_1)]$.

En posant $X_2 = X- (\widetilde{Xo+X_1})$, la résolution de (5) donne . $\widetilde{X}_2$ et on obtient X solution de (1) par

$$\boxed{X = \widetilde{X}_o + \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2} \quad .$$

on peut continuer aussi longtemps que nécéssaire; en général une amélioration suffit .

Chap V : INTERPOLATION

Introduction :

Soit la fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$, et connue seulement par ses valeurs $f(x_i)$, $i=o,\dots,n$ prises aux points x_i, $i=o,\dots,n$ appartenant à $[a,b]$.

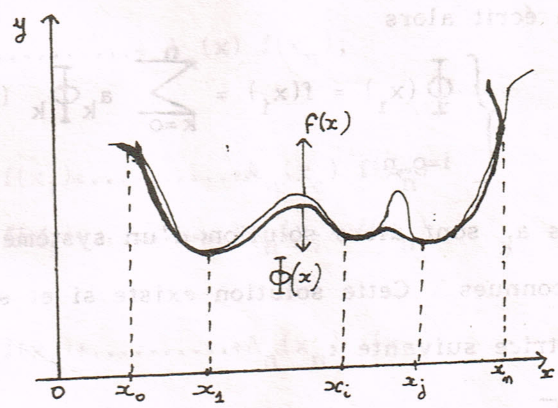
(ceci concerne les tables numériques ou des mesures physiques par exemple)

Position du problème :

- Pour $x \in [a,b]$ un point différent x_i, $i=o,\dots,n$, peut-on avoir une idée de la valeur de f en ce point ?

- Considérons alors une fonction Φ, dépendant de plusieurs paramètres et telle que :

$$\begin{cases} \Phi(x_i) = f(x_i) \\ i=o,\dots,n \end{cases}$$



On peut écrire

$$f = \Phi + \mathcal{E}$$

ou bien pour tout $i=o,\dots,n$ $f(x_i) = \Phi(x_i) + \mathcal{E}(x_i)$

avec $\mathcal{E}(x_i) = o$

La fonction $\mathcal{E}$ est alors appelée erreur d'interpolation . Donc l'interpolation consiste à dire : $\Phi(x)$ remplace $f(x)$; on commet alors une erreur d'interpolation .

Le choix de la fonction Φ va être dicté par les considérations suivantes :

1) Les paramètre dont elle depend doivent être simples à calculer ; en général la dépendance sera linéaire .

2) Simplicité du calcul de Φ .

3) L'erreur d'interpolation $\mathcal{E}(x)$ doit être la moindre possible . En pratique la fonction Φ est une combinaison linéaire de (n+1) fonctions de bases