Universitaire de Relizane

Département de mathematiques .... Année Univarsitaire : 2021-2022

Module : : Équations de la Physique Mathématique .... 3^{eme} anée L.M.D

TD 3 : Equations aux dérivées partielles du second ordre

Exercice 1: On considére le probléme

$$(E_1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \quad \text{oú } \varphi \in C(\mathbb{R}^2) \text{ et } \psi \in C(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

a. En posant $r = x-t$ et $r = x+t$, montrer que l'équation du probléme (E_1) est équivalente a l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$.
b. Résoudre l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$ et établir la formule de d'Alembert,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)dy.$$

Déduire la solution du probléme (E_1) pour $\varphi(x) = e^x$ et $\psi(x) = 1$.

Exercice 2: En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver la fonction $u(r,\theta)$ solution du probléme suivant

$$(E_2)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \\ \\ u(1,\theta) = \cos(4x), \end{cases}$$

Exercice 3: On considére le probléme

$$(E_3)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \\ u(0,t) = 1, \qquad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Déterminer une fonction u_p indépendante de t solution de (E_3).
2. On pose $v(x,t) = u(x,t) - u_p(x)$
a) Montrer que $v(x,t)$ est alors solution du probléme auxiliaire suivant :

$$(E_4)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ \\ v(0,t) = 0 = v(1,t), \\ v(x,0) = x-1 \qquad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

b) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = x - 1 \quad \text{sur} \quad]-\pi,\pi].$$