Universit Relizane
Facults Sciences et Technologies
Domaine Mathtiques et Informatiques
Drtement de Mathtiques

Fiche de TD $N°$ 01

Exercice 0.1 *Montrer que si f est une forme hermitienne sur $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, alors pour tout x, y de E on a :*

$$\begin{aligned} i)\ \ f(x+y,x+y)+f(x-y,x-y) &= 2\big(f(x,x)+f(y,y)\big). \\ ii)\ \ f(x+y,x+y)-f(x-y,x-y) &= 4Re\big(f(x,y)\big). \end{aligned}$$

Exercice 0.2 ***(Inlit Minkowski)***
Monter que si f est un produit scalaire sur $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E, alors pour tout x, y de E on a :

$$\sqrt{f(x+y,x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$$

Exercice 0.3
1. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R} : (a+b) \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$.
2. Soient $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ (f,g) \quad &\longmapsto \quad \varphi(f,g) = f(0)g(0) + \textstyle\int_0^1 f\prime(t)g\prime(t)dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N : E \quad &\to \quad \mathbb{R}_+ \\ f \quad &\longmapsto \quad N(f) = \sqrt{f^2(0) + \textstyle\int_0^1 f^2\prime(t)dt}. \end{aligned}$$

2.1 Montrer que φ dnit un produit scalaire sur E.
2.2 Montrer que N dnit une norme sur E.
2.3 comparer N et $\|.\|_\infty$.

Exercice 0.4 ***(Identite polarisation)*** *Soit H un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert et soient $x, y \in H$. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors,*

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4},$$

et que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors,

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + i\frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4}.$$

Exercice 0.5 ***(Identite la mane)*** *Soit H un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert. Montrer que pour tous $x, y, z \in H$, on a*

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \frac{1}{2}\|z-y\|^2 + 2\left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2$$

Donner une interprtion gique lorsque $H = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

Exercice 0.6 ***(Identitu parallgramme)*** *Montrer que pour tous x, y d'un espace prlbertien E on a*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Dans un parallgramme la somme des carres longueurs de ses diagonales est le somme des carres longueurs de ses cot