

Exercice 1 Pour toute partie A d'un espace de Hilbert H . Montrer que $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de H qui vérifie :

1. $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
2. $A \subset (A^\perp)^\perp$.
3. $(\overline{A})^\perp = A^\perp$.
4. $A^\perp = (\text{vect } A)^\perp = \overline{(\text{vect } A)}^\perp$.

Exercice 2 (théorème de Pythagore) Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\forall x, y \in E, \quad x \perp y \iff \begin{cases} \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{cases}$$

Exercice 3 Montrer que les fonctions définies sur $] -1, 1[$ par $f(x) = 1$ et $g(x) = 2x^2 - 1$ sont orthogonales relativement au produit scalaire $\prec f, g \succ = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, mais non orthogonales relativement au produit scalaire suivant $\prec f, g \succ = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Exercice 4 Montrer que les polynômes définies par $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 3x^2 - 1$ et $p_3(x) = 5x^2 - 3x$ sont deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(-1, 1)$.

Exercice 5 Soit H un espace de Hilbert et K un s.e.v fermé de H .

Alors $\forall x \in H \exists ! x_c \in K, x_c = P_K(x)$, tel que : $\forall y \in K : \prec x - x_c, y \succ = 0$,
 on dira que x_c est le projeté orthogonale de x sur K .

Exercice 6 (Caractérisation de projeté orthogonale sur un s.e.v fermé) Soit H un Hilbert, K un s.e.v fermé de H et soit $x \in H$ et $x_c \in K$, $\prec x - x_c, y \succ = 0 \quad \forall y \in K$.

Alors $x_c = P_K(x) \iff \|x - x_c\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$.