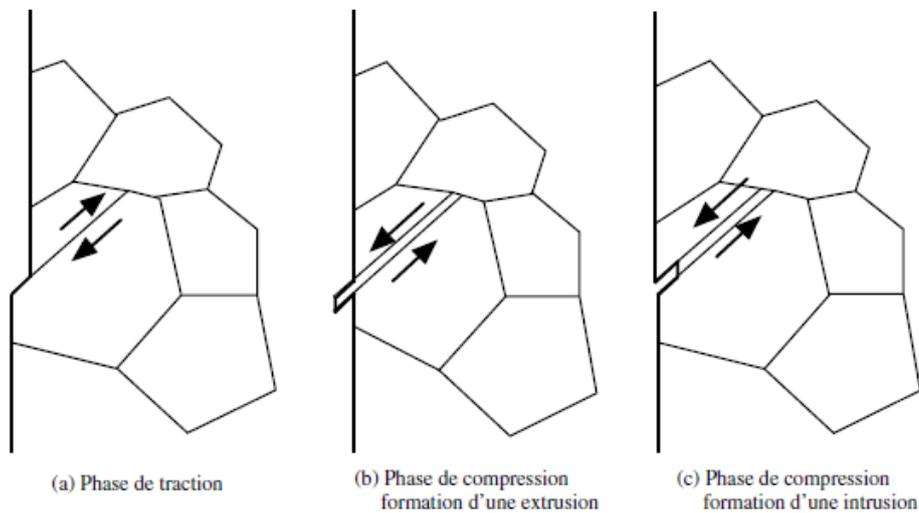


## V. Endommagement par fatigue :

### 1. Types de fatigue :

#### a. Fatigue des monocristaux



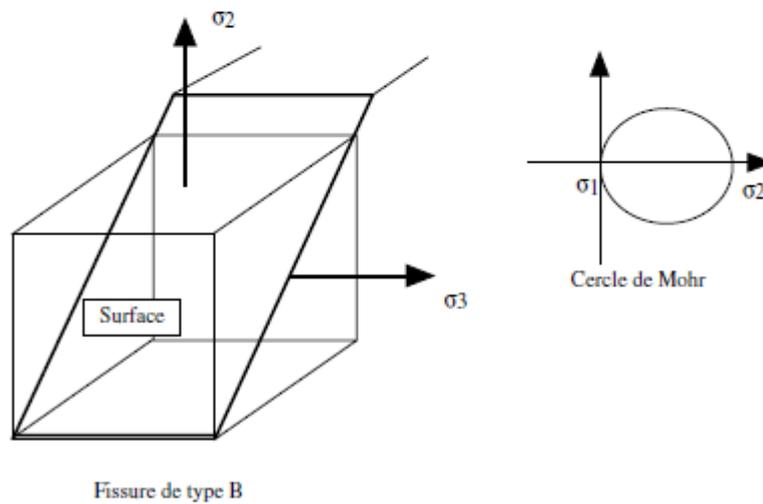
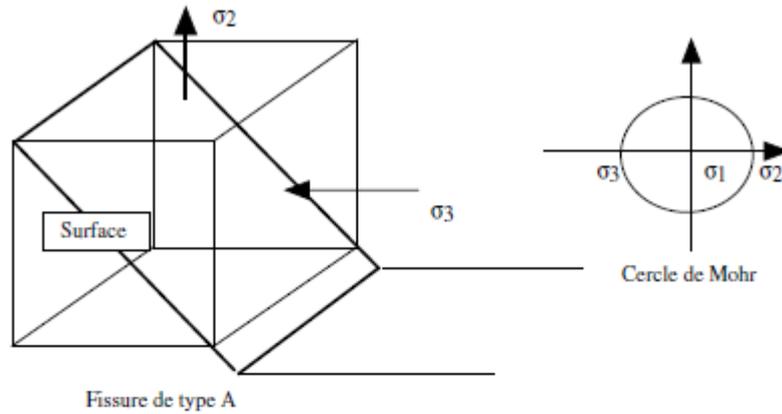
**Fig. 1.16.** Schéma des glissements successifs par fatigue. Formation (a) d'une marche, (b) d'extrusions et (c) d'intrusions.

Les monocristaux sont favorablement orientés pour le glissement. L'effort de traction sur l'éprouvette monocristalline crée une marche à la surface dans un certain sens (Fig. 1.16). Lorsque nous déchargeons, puis que nous sollicitons en compression, le glissement se fait en sens inverse. La déformation plastique de glissement provoque un certain écrouissage qui crée à la surface soit une excroissance, appelée extrusion, soit une rainure, appelée intrusion. À chaque cycle, ce mécanisme se répète, aboutissant à la formation de nombreuses extrusions et intrusions. Il y a un début d'endommagement.

#### b. Fatigue des polycristaux

Les grains les plus favorablement orientés pour le glissement sont les premiers à se déformer. Dans ce cas, l'endommagement de fatigue est un endommagement de surface. Cependant, les glissements vont petit à petit se répandre dans d'autres grains en raison de l'écrouissage des premiers. On constate que des fissures de fatigue prennent naissance en divers endroits, à des instants différents.

Les fissures les plus grandes prennent petit à petit le pas sur les autres, et finalement, une seule fissure se propage.



**1.19. Fissures de type A et de type B,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les contraintes principales.**

c. Fatigue thermique

Ce type d'endommagement par fatigue provient de variations cycliques de la température. Comme l'équilibre de température entre la surface et le cœur de la pièce ne s'établit pas instantanément, il existe des déformations différentielles, cycliques elles aussi. Il en résulte des variations périodiques de contrainte qui donne naissance à des fissures. En général ces fissures pénètrent dans la pièce sur une certaine profondeur, puis finissent par s'arrêter.

d. Fatigue de roulement

Un cas particulier d'endommagement par fatigue est celui de la fatigue de roulement. Ses particularités proviennent de ce que, au contact d'une roue et d'un rail, ou encore de deux dents d'engrenage, la contrainte est maximale non pas à la surface de contact mais à une certaine distance en dessous. Les divers types de fissuration par fatigue de roulement peuvent être classés en trois catégories : les fissures de surface, les fissures amorcées sous la surface et les fissures amorcées sur des défauts profonds.

*Les fissures superficielles :* Les fissures superficielles sont le résultat de déformations plastiques successives qui s'accumulent en surface de la bande de roulement. Ces fissures

s'amorcent en surface et se propagent selon une faible inclinaison par rapport à celle-ci. L'échauffement superficiel résultant du frottement peut être suffisamment intense pour provoquer une fissuration de fatigue thermique. Les fissures naissant à la surface sont, dans ce cas, perpendiculaires à la bande de roulement.

*Les fissures sous-jacentes* : Les contraintes de contact atteignent leur maximum en dessous de la surface, à une profondeur de l'ordre de 4 à 5mm. Elles sont susceptibles d'amorcer des fissures sous-jacentes qui se propagent jusqu'à une profondeur de l'ordre de 20 mm.

*Fissures dues à des défauts* : Les fissures amorcées sur des défauts métallurgiques s'amorcent en général à des profondeurs supérieures, de l'ordre de 10 à 30 mm sous la surface. Ces défauts peuvent être des porosités ou des inclusions. Ces fissures entraînent également des écaillages conséquents, mais elles peuvent aussi finir par se propager vers l'axe de la roue.

## 2. Notions préliminaires :

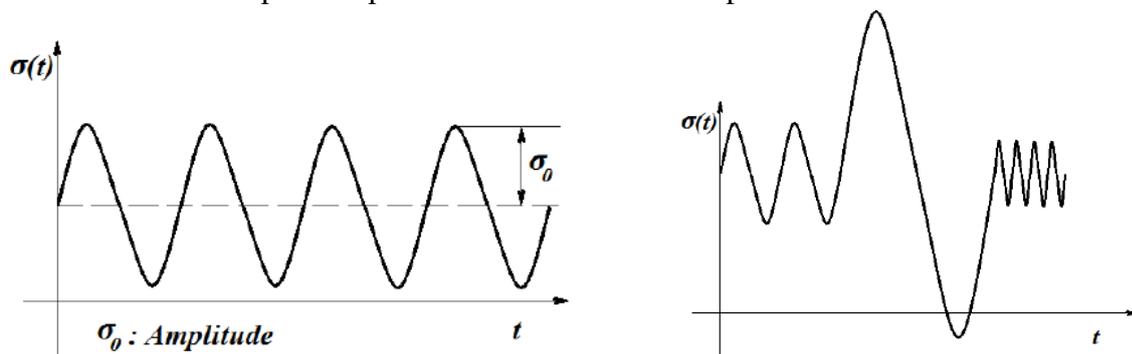
### a. Types de variation des contraintes

Les sollicitations en fatigue peuvent être simples (traction, compression, torsion..) ou complexes (combinées). Les efforts répétés, varient en fonction du temps d'une façon périodique, dans ce cas on admet que leurs variations sont sinusoidales.

On peut distinguer :

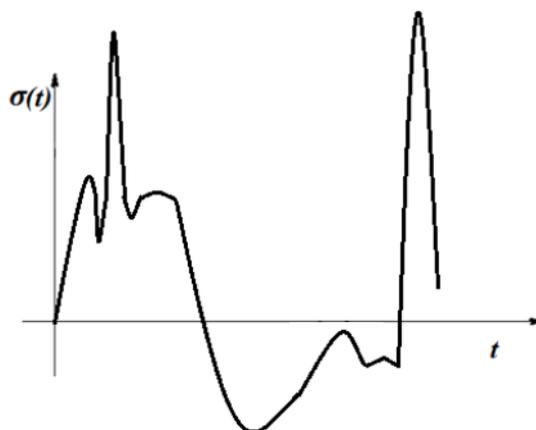
- *Contrainte sinusoidale à amplitude constante*

C'est la variation la plus simple elle est continue et à amplitude de contrainte constante.



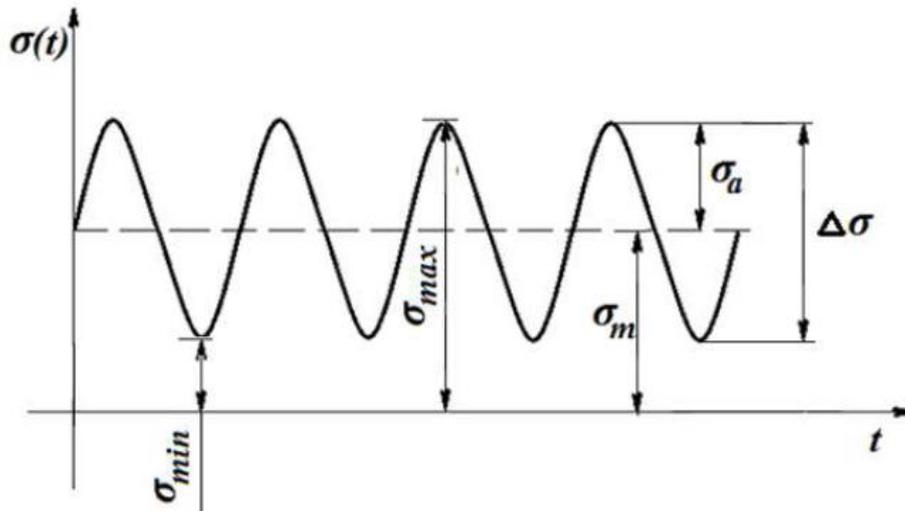
- *Contrainte sinusoidale à amplitude variable*
- *Contrainte aléatoire*

La courbe de variation est d'allure quelconque



Pour simplifier les calculs en fatigue nous considérons ici que les contraintes sont sinusoidales à amplitude constante ou à amplitude variable.

b. Cycle de contrainte



$\sigma_a$ : Amplitude de contrainte

$\sigma_m$ : Contrainte moyenne

$\sigma_{max}$ : Contrainte maximale

$\sigma_{min}$ : Contrainte minimale

$\Delta \sigma$ : Etendue de contrainte

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\Delta \sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\sigma_a$$

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

$$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$$

Par considération des signes des termes  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_{min}$  et les termes  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$  les sollicitations peuvent être classées comme suit :

- *Sollicitation répétée* : C'est le cas où les termes  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_{min}$  sont ou bien positifs ou bien négatifs
- *Sollicitation alternée* : Dans ce cas :  $\sigma_{max}/\sigma_{min} < 0$
- *Sollicitation statique* : C'est le cas où  $\sigma_a = 0$  et  $\sigma_m \neq 0$

c. Coefficient de Steefhelner

$$\phi = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \text{ avec } -1 \leq \phi \leq +1$$

Ce coefficient est utilisé pour déterminer le type de sollicitation.

$\phi = -1$  : Contrainte complètement renversée

$\phi = 1$  : Sollicitation statique

$-1 < \phi < 0$  ou  $0 < \phi < +1$  : Sollicitation répétée

### 3. Courbe de Wöhler a. définition

Universellement connue, la courbe de Wöhler est la plus ancienne et la seule permettant de visualiser la tenue de la pièce ou des matériaux dans le domaine de fatigue. Elle définit une relation entre la contrainte appliquée  $\sigma_a$  et le nombre de cycles à rupture  $N$ .

Pour la tracer, on réalise généralement des essais simples, qui consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude de chargement constante fluctuant autour d'une valeur moyenne fixée, et de noter le nombre de cycles à rupture  $N$ .

Pour plus de commodité, ce nombre  $N$  est reporté en abscisse sur une échelle logarithmique, et l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  est reportée en ordonnée sur une échelle linéaire. Ainsi, à chaque éprouvette testée, correspond un point du plan  $(N, \sigma_a)$ . A partir d'un certain nombre d'essais, nous établissons la courbe de Wöhler

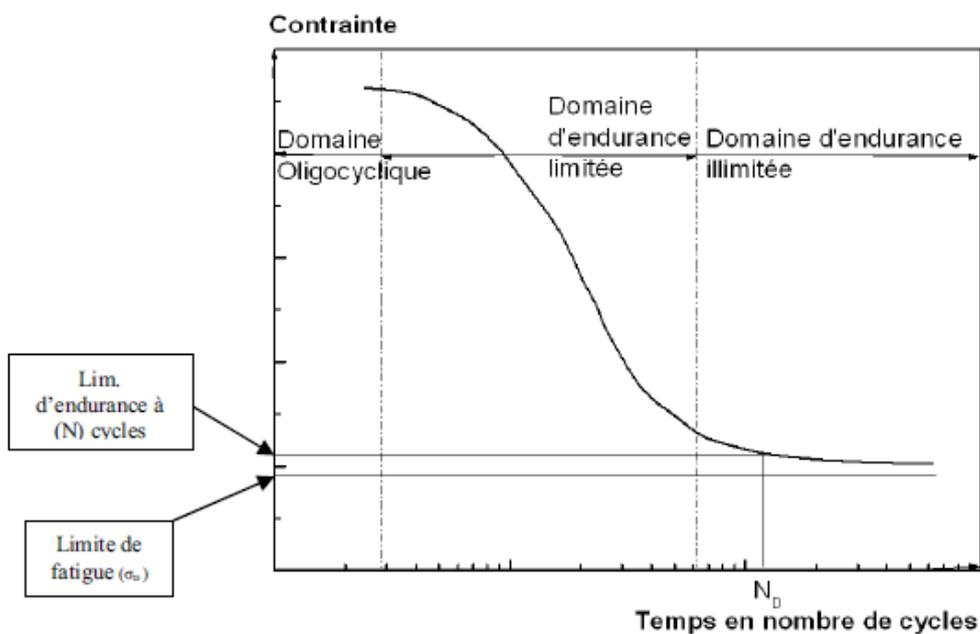


Figure 7 : Courbe de Wöhler ( $\sigma - N_R$ )

- Limite de fatigue

C'est la contrainte pour laquelle aucune rupture n'est observée après un nombre de cycle infini,

- Limite d'endurance

La limite d'endurance correspond à la valeur limite vers laquelle tend l'amplitude de contrainte lorsque le nombre de cycles devient très grand. Dans le cas des aciers, cette limite d'endurance peut être réellement approchée avec  $10^7$  cycles.

- Durée de vie

C'est le nombre de cycles au bout duquel l'éprouvette rompt.

La courbe de Wöhler peut être divisée en 3 zones :

#### a) Fatigue oligocyclique (Zone I)

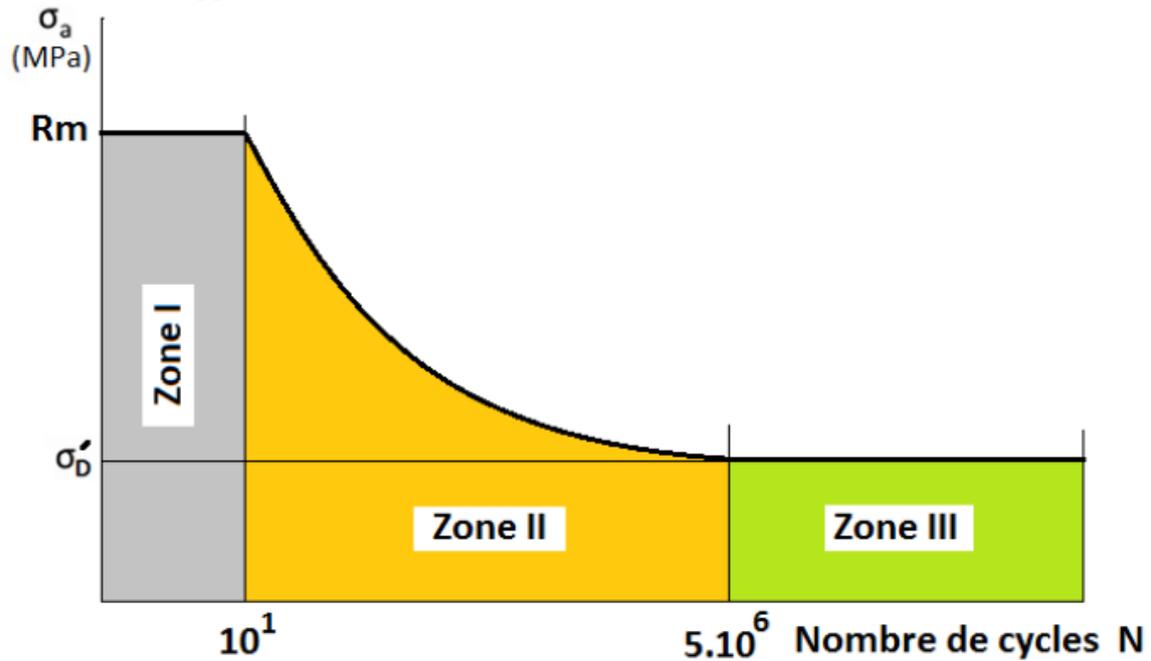
La contrainte  $\sigma_a$  est à la valeur de  $R_m$ , on observe la rupture des éprouvettes après quelques cycles (de 1 jusqu'à 10 cycles).

*b) Fatigue à vie finie (Zone II)*

Cette zone s'étale sur une étendue de 10 à 5.10<sup>6</sup> cycles correspondant à une fourchette de contraintes  $R_m < \sigma_a < \sigma_D$  toutes les éprouvettes rompent après un nombre de cycles pour chacune c'est la vie finie de l'éprouvette.

*c) Vie infinie (Zone III)*

Au-dessous d'un seuil  $\sigma_a \leq \sigma_D$  les éprouvettes ne rompent plus c'est la vie infinie, le seuil de contrainte  $\sigma_D$  est appelée **limite d'endurance**.



b. Modélisation de la courbe de Wöhler

Plusieurs expressions analytiques sont proposées pour représenter les courbes de Wöhler dans le domaine d'endurance limité. Ces équations permettent de calculer le nombre moyen de cycles à rupture en fonction de l'amplitude de contrainte. L'équation la plus simple et la plus utilisée

dans les codes de calcul est : 
$$N = \frac{C}{\sigma_a^m}$$

C et m des coefficients qui dépendent du matériau.

Cette équation peut s'écrire :

$$\text{Log}N = \text{Log}C - m.\text{Log}\sigma_a$$

A partir du diagramme de Wöhler, nous obtenons d'autres expressions analytiques de courbes :

- L'expression de BASQUIN :

$$\sigma_a = \sigma'_f(N)^b$$

Avec  $\sigma_a$  : Amplitude de contrainte appliquée en fatigue

$\sigma'_f$  : Résistance en fatigue

b : Exposant de la loi de BASQUIN

N : Nombre de cycle à rupture

Mais cette expression ne permet pas de représenter la partie asymptotique de la courbe de Wöhler. Bastenaire propose une équation qui tient compte de la limite d'endurance  $\sigma_D$  :

$$N = \frac{A \cdot \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_a - \sigma_D}{B} \right)^c \right]}{\sigma_a - \sigma_D}$$

Avec A, B, C constantes.

#### 4. Limite d'endurance

##### a. Diagramme de Goodman et diagramme de Haigh :

La détermination de la limite d'endurance nécessite de nombreux essais et donc un investissement en temps et en argent.

Considérons un essai à un R et un  $\sigma_a$  donné. Tel que :  $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a}$

d'où 
$$\sigma_m = \sigma_a \frac{1+R}{1-R}$$

donc, lorsque l'on trouve la limite d'endurance  $\sigma_D(R)$  — qui est une valeur particulière de  $\sigma_a$  —, on peut en déduire la valeur  $\sigma_m$  correspondante.

La forme la plus simple est la loi linéaire de Goodman :

$$\sigma_D(R) = \sigma_D(R = -1) \cdot (1 - \sigma_m/R_m)$$

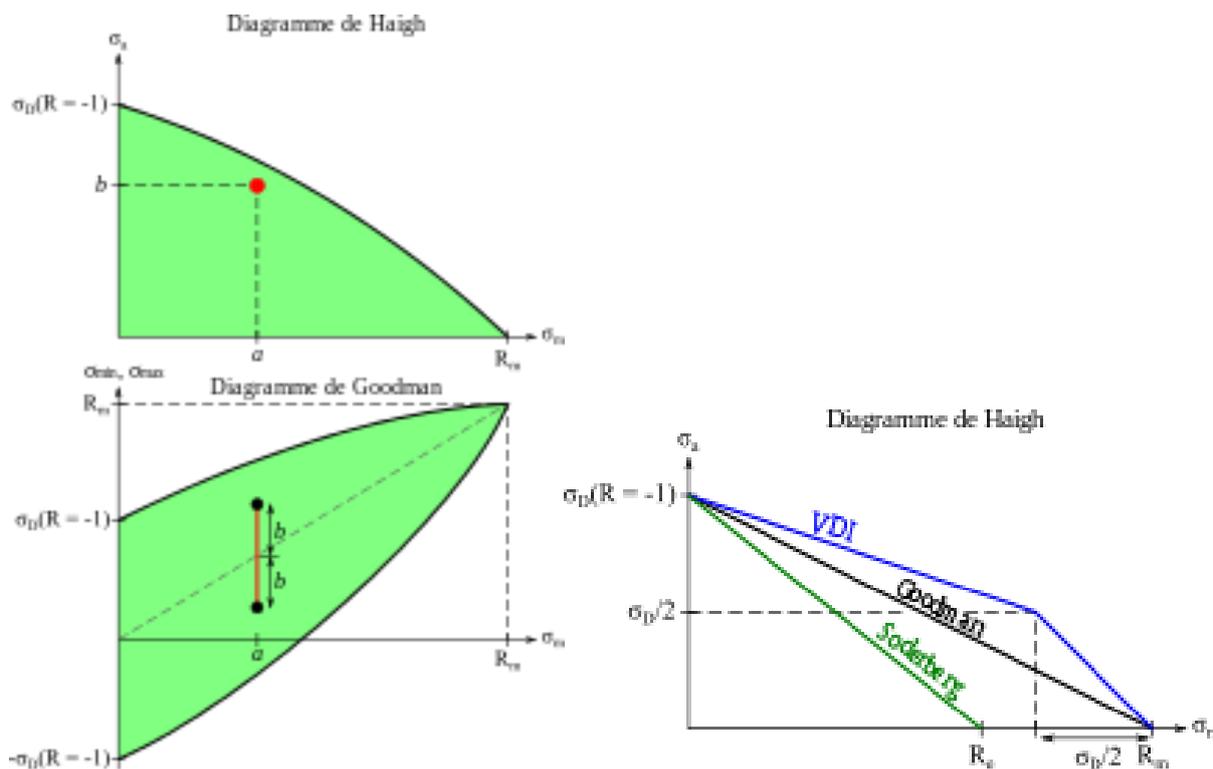
On trace cette courbe

- soit sur un diagramme  $(\sigma_m, \sigma_a)$ , c'est le diagramme de Haigh ;
- soit sur un diagramme  $(\sigma_m, \sigma_{\min})$  et  $(\sigma_m, \sigma_{\max})$ , soit  $[(\sigma_m, \sigma_m - \sigma_a) ; (\sigma_m, \sigma_m + \sigma_a)]$ . c'est la diagramme de Goodman.

Sur ces diagrammes, on peut tracer les cas limite  $\sigma_a = \sigma_D(R)$ .

Ainsi, si l'on est dans un cas donné  $(\sigma_m = a ; \sigma_a = b)$ ,

- on place le point  $(a ; b)$  dans le diagramme de Haigh ; si ce point est dans la zone de validation, alors on considère que la conception est validée, que la pièce va résister ;
- on place le segment  $[(a ; a - b) ; (a ; a + b)]$  — segment centré sur le point  $(a ; a)$  — ; si le segment est l'intérieur de la zone de validation, alors on considère que la conception est validée, que la pièce va résister.



### b. Diagrammes simplifiés

Diagramme de Haigh simplifié.

Pour le diagramme de Haigh, on a une courbe limite passant par les points

- $(0 ; \sigma_D(R = -1))$ , cas de l'essai purement alterné, et
- $(R_m ; 0)$ , cas de l'essai de traction simple.

On peut modéliser cette courbe limite par :

- la droite de Goodman :  $\sigma_a = \sigma_D(R = -1) \times (1 - \sigma_m/R_m)$  ;
- la droite de Soderberg, qui est un cas plus prudent, « sévèrisé », où l'on se limite à la limite d'élasticité  $R_e$  :  $\sigma_a = \sigma_D(R = -1) \times (1 - \sigma_m/R_e)$  ;
- la parabole de Gerber :  $\sigma_a = \sigma_D(R = -1) \times (1 - (\sigma_m/R_m)^2)$  ;
- la méthode VDI : c'est un domaine bilinéaire, avec un segment de droite  $[(0 ; \sigma_D(R = -1)) ; (R_m - \sigma_D(R = -1)/2 ; \sigma_D(R = -1)/2)]$ , et un segment de droite  $[(R_m - \sigma_D(R = -1)/2 ; \sigma_D(R = -1)/2) ; (R_m ; 0)]$ .

Les diagrammes de Haigh et de Goodman permettent donc d'extrapoler les résultats obtenus en traction-compression alternée pure ( $R = -1$ ) à tous les cas (toutes les valeurs de  $R$ ).

### b. Facteurs influençant la limite d'endurance expérimentale

La valeur expérimentale de la limite d'endurance  $\sigma_D$  obtenue dépend de l'éprouvette utilisée car celle-ci a été bien préparée du point de vue de géométrie, de dimensions, d'état de surface, absence de défauts et des conditions de l'essai. Or le cas d'une structure en service diffère complètement de celui de l'éprouvette en effet on distingue la finition, la grosseur, la température, et d'autres facteurs qui seront pris en considération.

- *Température*

De nombreuses études montrent que le rapport  $\sigma_D/R_m$  ne varie pas. Ainsi, quand la température est basse, la limite  $R_m$  augmente d'où une augmentation de la limite  $\sigma_D$ . Soit  $k_d$  le facteur qui tient en compte la température :

$$k_d = \begin{cases} \frac{344}{273+T} & \text{si } T > 71^\circ\text{C} \\ 1 & \text{si } T \leq 71^\circ\text{C} \end{cases}$$

- *Concentration de contraintes (effet d'entaille)*

Lorsque la section d'une pièce soumise à une sollicitation ne présente pas d'entaille la distribution de contraintes est régulière alors que dans la présence d'entaille provoque un déséquilibre dans la distribution des contraintes engendrant une concentration de celles-ci dans le fond de l'entaille. Pour une pièce soumise à une traction simple, la distribution des contraintes est uniforme :  $\sigma=F/S$  à chaque section mais au fond de l'entaille on observe une hausse de contrainte atteignant la valeur  $\sigma_{\max}$ . Le rapport  $k_t=\sigma_{\max}/\sigma$  est appelé coefficient théorique de concentration de contraintes.

Pour déterminer  $k_t$  on utilise des abaques (courbes).

On définit le facteur de concentration de contraintes en fatigue par  $K_e=1/q(k_t-1)$

$q$  : indice de sensibilité aux effets d'entaille

Selon Peterson l'indice de sensibilité aux effets d'entaille peut s'écrire :

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{r}} \quad \text{et} \quad a = \left(\frac{270}{R_m}\right)^{1.8}$$

$a$  : constante telle que :

$R_m$  : Résistance à la rupture (MPa)

$r$  : Rayon du fond de l'entaille

- *Rugosité (état de surface)*

Généralement le défaut s'initie depuis la surface extérieure de la pièce, plus la surface est rugueuse plus les crêtes sont importantes et plus l'effet d'entaille est intense. Pour cela il faut considérer l'état de surface de la pièce en adoptant le facteur fini de surface  $k_a$ :

$$k_a = \frac{\sigma_{Ds}}{\sigma_D}$$

$\sigma_{Ds}$ , limite d'endurance de la structure

$\sigma_D$  limite d'endurance de l'éprouvette à rugosité référence.

On utilise des abaques pour déterminer  $K_a$ , pour l'exploiter il faut se disposer des valeurs de la rugosité et la résistance  $R_m$

- *Effet de grosseur*

Statistiquement plus les dimensions de la structure sont importantes plus sont probables les défauts et moins est sa résistance à la fatigue.

Pour ce fait on adopte le facteur de grosseur  $k_b$ , qui peut être déterminé par :

$$k_b = \begin{cases} 1 & \text{si } d \leq 7.6\text{mm} \\ 0.85 & \text{si } 7.6 \leq d \leq 50\text{mm} \\ 0.75 & \text{si } d \geq 50\text{mm} \end{cases}$$

d : signifie la dimension caractéristique de la structure.

- *Fiabilité*

On entend par la fiabilité, la probabilité que la structure soit en service pour une durée de vie déterminée. On introduit donc le facteur  $k_c$ .

- Fiabilité = 50% correspond à  $k_c = 1$
- Fiabilité est au voisinage de 100% pour des valeurs de  $k_c$  basses (voisinage de 0.5)
- Si Fiabilité augmente  $k_c$  diminue.

Les facteurs de fiabilité sont exprimés dans le tableau suivant.

Fiabilité	Facteur de fiabilité
0,50	1,000
0,90	0,897
0,95	0,868
0,99	0,814
0,999	0,753
0,9999	0,702
0,99999	0,659
0,999999	0,620
0,9999999	0,584
0,99999999	0,551
0,999999999	0,520

c. *Correction de la valeur de  $\sigma_D$*

$$\sigma_D = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma'_D$$

$\sigma_D$  : Valeur de la limite d'endurance utilisée dans les calculs de structures

$\sigma'_D$  : Valeur de la limite d'endurance déterminée expérimentalement en utilisant une éprouvette normalisée.

$k_a$  : Facteur de fini de surface

$k_b$  : Facteur de grosseur

$k_c$  : Facteur de fiabilité

$k_d$  : Facteur d'effet de température

$k_e$  : Facteur de concentration de contraintes

$k_f$  : Facteur de divers effets.

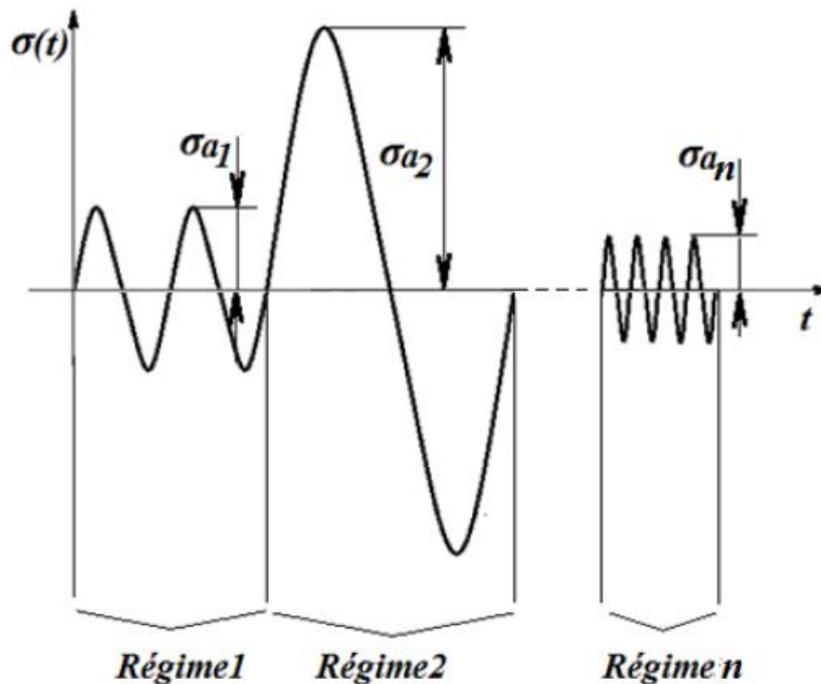
## VI. Cumul des dommages :

Le dommage (ou endommagement) est un phénomène progressif qui dépend du niveau de contrainte appliquée et, du nombre d'applications à ce niveau ; d'où le terme de cumul de dommage. Une loi de cumul de dommage est un modèle physique et mathématique permettant d'estimer la durée de vie de la pièce pour des chargements variables.

### 1. Loi de Miner

La règle de Miner, ou de Palmgren-Miner, pose que les dommages correspondants sont additifs, on parle de cumul linéaire. La rupture se produit donc lorsque la somme des dommages relatifs à chaque amplitude atteint l'unité.

Soit le cas le plus simple de la contrainte à amplitude variable où la contrainte est complètement renversée :



Considérons une structure soumise à un chargement à plusieurs régimes :

Régime 1  $\rightarrow (\sigma_{a1}; N_1)$

Régime 2  $\rightarrow (\sigma_{a2}; N_2)$

.....

Régime n  $\rightarrow (\sigma_{an}; N_n)$

Tels que les  $\sigma_{ai}$  sont les amplitudes et les  $N_i$  sont les nombres de cycles à la rupture correspondant à chaque  $\sigma_{ai}$  appliquée.

Considérons qu'en service la structure a effectué les nombres de cycles suivants :

Régime 1  $\rightarrow n_1$  ( $n_1 < N_1$ )

Régime 2  $\rightarrow n_2$  ( $n_2 < N_2$ )

Régime n  $\rightarrow n_n$  ( $n_n < N_n$ )

Ecrivons les rapports pour chaque régime :

Régime 1 :  $\frac{n_1}{N_1}$  correspond au pourcentage d'endommagement sous le régime 1

Régime 2 :  $\frac{n_2}{N_2}$  correspond au pourcentage d'endommagement sous le régime 2

.....

Régime n :  $\frac{n_n}{N_n}$  correspond au pourcentage d'endommagement sous le régime n

Lorsque la somme de ces  $n$  pourcentages d'endommagement est égale à 100% la structure rompt ou autrement :

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_n}{N_n} = 1 \quad \text{c'est la loi de Miner ou } \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = 1$$

Les rapports  $\frac{n_i}{N_i}$  sont appelés coefficients d'endommagement

**Rq :**

La loi de Miner est valable pour le cas de contrainte non complètement renversée seulement il faut appliquer le critère de Goodman pour les calculs nécessaires.

De ce qui précède on constate que sous un seul régime de chargement appliqué sur la structure en effectuant un cycle, un endommagement est créé plus le nombre de cycles augment plus l'endommagement augmente jusqu'à la ruine. C'est le cumul d'endommagement.

## 2. Lois de cumul non linéaires :

### a. Loi modifier de Miner :

Les courbes d'endommagement pour chaque niveau de contrainte sont définies par

l'équation :  $D_i = \left( \frac{n_i}{N_i} \right)^{m_i}$

Le coefficient  $m$  est un exposant dépendant du niveau de sollicitation. Il est toujours supérieur à 1. La rupture intervient lorsque :  $\sum_{i=1}^p D_i = 1$

$P$  niveaux de sollicitation

### b. Loi de Henry

Pour prendre en compte l'interaction des cycles sur le dommage, Henry, pose les hypothèses suivantes :

- la courbe de Wöhler d'un matériau peut être décrite par une relation de forme hyperbolique :

$$N(\sigma - \sigma_D) = C \quad \text{ou } C \text{ est une constante et } \sigma_D \text{ est la limite d'endurance du matériau ;}$$

- les deux paramètres C et  $\sigma_D$  sont modifiés au fur et à mesure que le dommage par fatigue s'accumule. La résistance à la fatigue diminue et C varie de manière proportionnelle à  $\sigma_D$ .

- Tant que  $\sigma$  est inférieure à 1,5.  $\sigma_D$ , Henry estime que la relation est applicable.

Avec ces hypothèses, Henry montre que le dommage D, "emmagasiné" par une éprouvette, est la variation relative de la limite d'endurance.

$$D_i = \frac{\sigma_D - \sigma_{D_i}}{\sigma_D}$$

La relation peut s'écrire :

$$D_i = \frac{r_i(\lambda_i - 1)}{\lambda_i - r_i} \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \frac{\sigma}{\sigma_D} \quad \text{et} \quad r_i = \frac{n_i}{N_i}$$

### c. *Loi de Gatts*

Gatts propose une relation de la forme :  $\frac{dR_m}{dn} = -k.D.R$

Où R est une variable homogène à une contrainte, k est une constante de proportionnalité dépendante du matériau,  $R_m$  est la valeur instantanée de la résistance qui décroît et D(R) est la variable du dommage dont l'expression est donnée par :

$$D(R) = \langle R - \sigma_D \rangle^m$$

L'exposant m est propre au matériau.

## VII. critères tridimensionnels d'endommagement :

Nous allons étendre le calcul aux cas complexes où le chargement est combiné c.à.d. sollicitations composées (flexion+torsion ; traction+cisaillement ; etc.... )

### 1. *Etat de contrainte dans le cas général*

Le tenseur de contraintes de Cauchy s'écrit comme suit :  $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

$\Sigma$  est symétrique donc  $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

Les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont les contraintes normales.

Les contraintes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{xz}$  sont les contraintes tangentielles.

### 2. *Contrainte équivalente de Von Misés*

Dans les calculs on utilise la contrainte équivalente de Von Misés pour la comparer aux valeurs ultimes, cette contrainte s'écrit :

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right] + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)}$$

Ou écrite autrement :

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

### 3. Application aux calculs de fatigue

Contrainte équivalente moyenne  $\sigma_{vm}$

Soient les contraintes normales moyennes :

$$\sigma_{xm} = \frac{\sigma_{x\max} + \sigma_{x\min}}{2}; \quad \sigma_{ym} = \frac{\sigma_{y\max} + \sigma_{y\min}}{2}; \quad \sigma_{zm} = \frac{\sigma_{z\max} + \sigma_{z\min}}{2}$$

Et soient les contraintes tangentielles moyennes :

$$\tau_{xym} = \frac{\tau_{xy\max} + \tau_{xy\min}}{2}; \quad \tau_{yzm} = \frac{\tau_{yz\max} + \tau_{yz\min}}{2}; \quad \tau_{xzm} = \frac{\tau_{xz\max} + \tau_{xz\min}}{2}$$

La contrainte équivalente moyenne s'écrit :

$$\sigma_{Vm} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xm} - \sigma_{ym})^2 + (\sigma_{ym} - \sigma_{zm})^2 + (\sigma_{zm} - \sigma_{xm})^2 \right] + 3(\tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{xzm}^2)}$$

Contrainte équivalente amplitude  $\sigma_{va}$

Les contraintes normales amplitudes s'écrivent:

$$\sigma_{xa} = \frac{\sigma_{x\max} - \sigma_{x\min}}{2}; \quad \sigma_{ya} = \frac{\sigma_{y\max} - \sigma_{y\min}}{2}; \quad \sigma_{za} = \frac{\sigma_{z\max} - \sigma_{z\min}}{2}$$

De même les contraintes tangentielles moyennes s'écrivent :

$$\tau_{xya} = \frac{\tau_{xy\max} - \tau_{xy\min}}{2}; \quad \tau_{yza} = \frac{\tau_{yz\max} - \tau_{yz\min}}{2}; \quad \tau_{xza} = \frac{\tau_{xz\max} - \tau_{xz\min}}{2}$$

La contrainte équivalente amplitude s'écrit :

$$\sigma_{Va} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 \right] + 3(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{xza}^2)}$$

### 6.4. Cas de contraintes planes

Les composantes suivantes s'annulent :  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$

Les contraintes équivalentes moyenne et amplitude s'écrivent:

$$\sigma_{Vm} = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + \sigma_{ym}^2 - \sigma_{xm}\sigma_{ym} + 3\tau_{xym}^2}$$

$$\sigma_{Va} = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + \sigma_{ya}^2 - \sigma_{xa}\sigma_{ya} + 3\tau_{xya}^2}$$

### 6.5. Critères de résistance

1) Contrainte complètement renversée  $\sigma_{vm}=0$

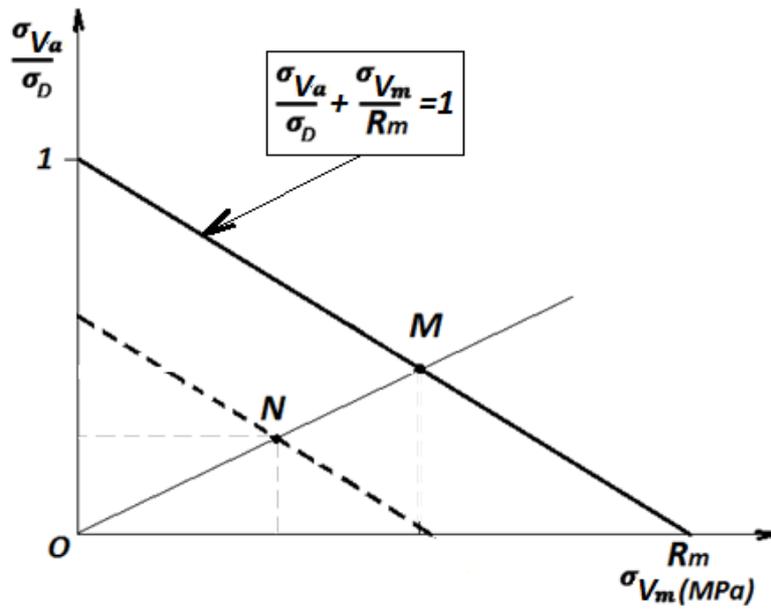
$\sigma_{Va} \leq \sigma_D$  dans le cas de vie infinie

$\sigma_{Va} \leq \sigma_f$  dans le cas de vie finie

$\sigma_D$  : Limite d'endurance

$\sigma_f$  : Contrainte limite correspondant à une durée de vie donnée  $N_f$

2) Critère de Goodman



$$\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_f} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m} = 1 \text{ (vie finie)}$$

$$\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m} = 1 \text{ (vie infinie)}$$

Le coefficient de sécurité :

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_f} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m}} \text{ (vie finie)}$$

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m}} \text{ (vie infinie)}$$