L3 - Math

Espace vectoriel normé

Dr. S. SALMI

Espace de Hilbert

Rappel

Espace vectoriel : $(E, +, \cdot)$ (espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$))

- Une loi interne, notée $+$, telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif.

  L'élément nul est noté 0_E.

- Un loi externe, notée $\cdot$, qui est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E vérifiant :
  - $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
  - $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$.
  - $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall x \in E \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha . \beta) \cdot x$.
  - $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$.

Espace normé $(E, \|.\|)$

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \|x\| \quad \text{tq}:$$

1) $\forall x \in E \quad \|x\| \geq 0$ de plus $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$.

3) $\forall (x, y) \in E^2$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Déf 1 Une forme sesquilinéaire sur l'espace vectoriel E est toute application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant :

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E \quad \forall x, y \in E$:

- $f(\alpha x_1 + \beta x_2 ; y) = \alpha f(x_1, y) + \beta f(x_2, y)$ (linéaire par rapport à la 1^{er} variable)
- $f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} f(x, y_1) + \bar{\beta} f(x, y_2)$ (anti-linéaire par rapport à la $2^{ème}$ variable)

Remarque

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors sesquilinéaire est bilinéaire.
- Si $\forall x, y \in E \quad f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ on dit que f est hermitienne.
- Dans $\mathbb{R}$ f est hermitienne $\Leftrightarrow$ f est bilinéaire symétrique.
- La forme quadratique associée à la forme hermitienne f est $Q : E \to \mathbb{K}$
  $x \mapsto Q(x) = f(x, x)$.

et on a $\forall x \in E \quad Q(x) \in \mathbb{R}$ (car $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$)

- La forme hermitienne f associée à la forme quadratique Q est positive ssi $\forall x \in E \quad f(x,x) \geq 0 \Leftrightarrow Q(x) \geq 0$.

(2)

- La forme hermitienne associée à la forme quadratique Q est définie positive ssi $\forall x \in E - \{0\}$ $Q(x) > 0$.

Exemple:

$E = \mathbb{R}^2$, $f : E \times E \to \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto xx' + yy'$$

f est hermitienne sur $\mathbb{R}^2$ (elle est bilinéaire symétrique)

- $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^2 + y^2 \geq 0$ (f est Positive)

- $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0$. $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$.

Exercice : On définie ϕ sur $C_n[X] \times C_n[X]$ par ~~$\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \overline{P(x)}$~~

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \overline{P(x)}\, Q(-x)\, dx$$

- vérifier que ϕ est une forme hermitienne.
- Est-elle positive ? négative ?

Définition (Produit scalaire)

Soit $f : E \times E \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \to f(x, y)$$

où E est un e.v sur $\mathbb{K}$.

on dira que f est un produit scalaire sur E si

i) f est bilinéaire.

ii) f est symétrique. $\forall (x, y) \in E^2$ $f(x, y) = f(y, x)$.

iii) f est définie positive.

$\rightarrow$ $\begin{cases} \text{positive :} & \forall x \in E \; f(x,x) > 0. \\ \text{définie :} & \forall x \in E \; f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0. \end{cases}$

Notation: $f(x,y) = (x,y) = ((x,y)) = \langle x,y \rangle$

Exemples:

- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(X,Y) \rightarrow f(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(\phi, \psi) \rightarrow f(\phi, \psi) = \int_0^1 \phi(x).\psi(x)\, dx.$$

ii) iii) sont bien vérifié.

À voir iii)

$$f(\phi,\phi) = \int_0^1 \phi(x)^2 dx \geq 0.$$

De plus $f(\phi,\phi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \phi(x)^2 dx = 0. \Leftrightarrow \phi(x) = 0.$ (car ϕ est continue sur $[0,1]$)

$\rightarrow$ f est définie également.

Inégalité de Cauchy Shwarz

Soit f une forme hermitienne positive sur E alors pour tout $x,y \in E$ on a:

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{f(x,x)} . \sqrt{f(y,y)}.$$

Preuve, $\forall (x,y) \in E^2$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $f(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$.

$$\Rightarrow \lambda^2 f(y,y) + \lambda f(x,y) + \lambda f(y,x) + f(x,x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 f(y,y) + 2\lambda f(x,y) + f(x,x) \geq 0.$$

On calcule le discriminant

$$\Delta = [2f(x,y)]^2 - 4 f(y,y) . f(x,x).$$

$$= 4 f(x,y)^2 - 4 f(y,y). f(x,x) \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x,y)^2 \leq f(y,y) . f(x,x) \Rightarrow |f(x,y)| \leq \sqrt{f(y,y)} . \sqrt{f(x,x)}$$

$\boxed{}$.

Définition (Norme)

Soit E un e.v sur $\mathbb{K}$, On appelle N une norme sur E, l'application définie par les propriétés suivantes:

$$N : E \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto N(x)$$

i) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

ii) $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. $N(\lambda x) = |\lambda| . N(x)$.

iii) $\forall x_1, x_2 \in E$ $N(x_1 + x_2) \leq N(x_1) + N(x_2)$.

Exemple 1 Considérons $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$

$$X = \binom{x}{y} \to N(X) = |x| + |y|.$$

i) $N(X) = 0 \Rightarrow |x| + |y| = 0 \Rightarrow |x| = 0$ et $|y| = 0$.

ii) $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $N(\lambda X) = |\lambda x| + |\lambda y|$

$$= |\lambda| (|x| + |y|) = |\lambda| . N(X).$$

iii) $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$; $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$N(X_1 + X_2) = |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|.$$

$$\leq \left(|x_1| + |y_1|\right) + \left(|x_2| + |y_2|\right)$$

$$\leq N(X_1) + N(X_2).$$

$\rightarrow$ On note : $N(x) = \|x\|$.

Exemple 2 $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$f \rightarrow N(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

i) $N(f) = 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(x)|\,dx = 0 \Rightarrow f = 0$ (f est continue sur $[0;1]$)

ii) $\forall f \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $N(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(x)|\,dx$

$$= |\lambda| \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

$$= |\lambda| . N(f).$$

iii) Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$$N(f+g) = \int_0^1 |(f+g)(x)|\,dx = \int_0^1 |f(x) + g(x)|\,dx$$

or $\forall x \in [0,1]$ $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x) + g(x)|\,dx \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

$$\Rightarrow N(f+g) \leq N(f) + N(g).$$

F est une Norme sur E.