

Espace de Hilbert (Suite)Définition (Espace préhilbertien)

Un espace ~~vectoriel~~ préhilbertien réel (ou complexe) est un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ auquel est défini un produit scalaire f muni de la norme induite par f .

$$E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \sqrt{f(x, x)} = \|x\|.$$

Exemple:

$$\psi: E \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{où } E = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}).$$

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(t) \cdot g(t) \cdot dt.$$

On a ψ est un produit scalaire sur E .

La norme induite par ψ est: $\forall f \in E \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$

On peut dire que E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire ψ .

$\mathbb{R}^n$: est un espace préhilbertien muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle \quad \text{et la norme induite } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

(1)

• $\mathbb{C}^n$ est un espace hilbertien muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \text{ et la norme induite:}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Définition (espace de Hilbert)

Un e.v. H est un Hilbert s'il est normé complet dont la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

c.-à.-d.

Soit $\|\cdot\|$ la norme de H .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Remarques

• Un espace vectoriel H est complet si toute suite de Cauchy de H cv dans H .

→ Suite de Cauchy Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de H .

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 \forall n > m > N(\varepsilon) . \|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

△ Remarque. Un espace de Hilbert est un espace de Banach complet dont la norme associée au produit scalaire.

(2)

Lemme: Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors pour tout $x, y \in H$ on a:

(a) l'identité du parallélogramme.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(b) l'identité de polarisation

b.1 Si K est réel alors

$$4\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$$

b.2 Si K est complexe alors:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] + \frac{i}{4} [\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2].$$

Théorème (Inégalité de Cauchy Schwarz)

Soit H un espace de Hilbert. Alors pour tout $x, y \in H$, on a,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Preuve

(b.1) $\Rightarrow \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$

d'après (a), on a:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - (2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2)]$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$$

$$\langle x, y \rangle \leq \frac{1}{2} [\underbrace{(\|x\| + \|y\|)^2}_{(2)} - \|x\|^2 - \|y\|^2]$$

$$\langle x, y \rangle \leq \frac{1}{2} \left(\cancel{2\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + \cancel{2\|x\| \cdot \|y\|} \left(\cancel{\|x\|^2} - \cancel{\|y\|^2} \right) \right)$$

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$



Exemple: Soit $\mathcal{C}([a, b], \|\cdot\|_\infty)$ avec

où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme définie par

$$\|x\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([a, b])$ n'est pas induite par un produit scalaire.

En effet, on considère les fonctions $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ définies par :

$$f(t) = 1 \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t-a}{b-a} \quad \forall t \in [a, b]. \quad \text{Alors,}$$

$$\bullet \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1.$$

et

$$\|f+g\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} \left| 1 + \frac{t-a}{b-a} \right| = 2.$$

$$\|f-g\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} \left| 1 - \frac{t-a}{b-a} \right| = 1.$$

Alors:

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 \neq 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)$$

Donc l'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite, et par suite, la norme n'est pas induite par un produit scalaire.

(4)