

Espace vectoriel normé

Exemples d'Espace de Hilbert

1. $\mathbb{R}$ est complet par construction (c'est la complétude des nombres rationnels).

$$\hookrightarrow U_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \in \mathbb{Q}.$$

$(U_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n) = e \notin \mathbb{Q} \quad (e \text{ est un nombre irrationnel})$$

Remarque

$\mathbb{R}$ c'est la complétude de $\mathbb{Q}$.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy appartenant à $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

$\exists U_{q(n)}_{n \in \mathbb{N}}$ (une sous suite de la suite U_n) qui converge dans $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Or une sous suite de Cauchy qui converge admet une sous suite convergente est elle même convergente.

Exemple $L^2([0,1], \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

$$L^2([0,1], \mathbb{R}) = \left\{ f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

(1)

Preuve:

• L^2 est un espace vectoriel:

•) Soit $f_1, f_2 \in L^2$, à voir $f_1 + f_2 \in L^2$

$$\text{On a } f_1 \in L^2 \text{ ie } \int_0^1 |f_1(x)|^2 dx < \infty$$

$$f_2 \in L^2 \text{ ie } \int_0^1 |f_2(x)|^2 dx < \infty.$$

$$\int_0^1 |(f_1 + f_2)(x)|^2 dx = \int_0^1 |f_1(x) + f_2(x)|^2 dx$$

$$\leq \int_0^1 \left[|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 \right] dx.$$

$$\leq \int_0^1 |f_1(x)|^2 dx + \int_0^1 |f_2(x)|^2 dx + 2 \int_0^1 |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| dx$$

$$\leq \underbrace{2 \int_0^1 |f_1(x)|^2 dx}_{< \infty} + \underbrace{2 \int_0^1 |f_2(x)|^2 dx}_{< \infty} < \infty.$$

•) Soit $f \in L^2([0,1], \mathbb{R})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ à voir $\lambda f \in L^2([0,1], \mathbb{R})$.

$$\text{On a: } \int_0^1 |\lambda f(x)|^2 dx = |\lambda|^2 \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

d'où L^2 est bien un espace vectoriel.

• L^2 est un espace hilbertien muni du produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (L^2[0,1]) \times (L^2[0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\begin{matrix} (f, g) \\ (2) \end{matrix} \longrightarrow \langle f, g \rangle = \int_0^1 |f(x) \cdot g(x)| dx$$

Le produit scalaire induit par la norme: $\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

Montrons que L^2 est complet

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^2([0,1], \mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un entier $N(\varepsilon) > 0$ tq pour $n, p > N(\varepsilon)$

$$\text{on ait } \|f_n - f_{n+p}\|_{L^2} < \varepsilon : \int_0^1 |f_n(x) - f_{n+p}(x)|^2 dx < \varepsilon^2.$$

$$\text{Ainsi } \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n, p > N(\varepsilon) \quad |f_n^{(n)} - f_{n+p}^{(n)}| < \varepsilon.$$

Ceci veut dire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et comme $\mathbb{R}$ est complet alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f ($f_n \rightarrow f$ $\underset{n \rightarrow +\infty}{}$) dans $\mathbb{R}$.

→ Il faut démontrer que f_n c.v vers f pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ et que $f \in L^2$.

En passant à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$.

$$\int_0^1 |(f_n - \cancel{f_p})(x)|^2 dx = \int_0^1 \lim_{p \rightarrow \infty} |(f_n - f_{n+p})(x)|^2 dx.$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 \underbrace{|(f_n - f_{n+p})(x)|^2}_{\in L^2} dx < \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f_n - f|^2 dx < \infty \text{ c-à-d. } (f_n - f)(x) \in L^2 \text{ et comme}$$

$$L^2 \text{ est un e.v. alors } f \in L^2 \quad (3)$$

Par conséquent L^2 est complet.

Conclusion:

L^2 est bien un espace de Hilbert.