

Orthogonalité dans un espacepréhilbertien.

Soit H un espace préhilbertien.

A/ Orthogonalité de deux vecteurs:

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux lorsque.

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

B/ Orthogonalité d'une partie A de E :

L'orthogonale d'une partie F de H est le s.e.v fermé $F^\perp$ tq:

$$F^\perp = \{ x \in H / \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F \}.$$

Exemple, Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire euclidien.

Soit l'ensemble F définie par:

$$F = \text{vect} \left\langle u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On sait que $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i.$

Trouver $F^\perp$

$$F^\perp = \left\{ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \langle u, w \rangle = 0 \text{ et } \langle v, w \rangle = 0 \right\}.$$

(1)

$$F^\perp = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 / \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

$$F^\perp = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 / w_2 = 0 \wedge -4/5 w_1 + 3/5 w_3 = 0 \right\}$$

$$F^\perp = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 / w_2 = 0 \wedge w_3 = 4/3 w_1 \wedge w_1 = 3/4 \right\}$$

$$F^\perp = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

C/ Orthogonalité de deux parties:

On dit que deux parties F et G sont orthogonales si tout élément de F est orthogonal à tout élément de G .

D/ Familles orthogonales et orthonormales:

- Une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ d'éléments de H est dite orthogonale l'absence que pour tous $i, j \in I$ ($i \neq j$) $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- Elle est dite orthonormale si de plus $\forall i \in I \quad \|e_i\| = 1$.

Exemple: L'espace $L^2_1([-1, 1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$.

où la fonction $e_n(x) = e^{in\pi x} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto e_n(x) = e^{in\pi x}$

Le système $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthogonal.

En effet, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ tq, $m \neq n$.

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_{-1}^1 e^{in\pi x} \cdot e^{-im\pi x} dx = \int_{-1}^1 e^{i(n-m)\pi x} dx.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{i(n-m)\pi x}}{i(n-m)\pi} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{i(n-m)\pi}. \end{aligned}$$

$$= 2 \sin((n-m)\pi) = 0, \forall n, m \in \mathbb{N}^* (m \neq n)$$

Indication:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ainsi $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système orthogonal.

$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle orthonormale ?

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \langle e_n, e_n \rangle = \int_{-1}^1 e^{in\pi x} e^{-in\pi x} dx = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

$$\Rightarrow \|e_n\|^2 = 2 \Rightarrow \|e_n\| = \sqrt{2} \neq 1.$$

donc le système donné n'est pas orthonormal.

(3)

↳ Remarque: si on considère le système $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$,
 $f_n(x) = \frac{e^{in\pi x}}{\sqrt{2}}$, le système sera orthonormal.

Proposition 1

- Une famille orthogonal est libre si elle ne contient pas de vecteur nul.
- Une famille orthonormale est toujours libre.

Proposition 2 Soit H un espace préhilbertien. Alors les applications suivantes

$$x \mapsto \langle x, y \rangle \quad \text{et} \quad y \mapsto \langle x, y \rangle,$$

sont continues sur H .

↳ Preuve:

Rappel: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

f est continue en x_0 si elle admet une limite en x_0 .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $(x_0, y_0) \in H^2$ on a: Cauchy Schwarz

$$|\langle x, y \rangle - \langle x_0, y \rangle| = |\langle x - x_0, y \rangle| \leq \|x - x_0\| \cdot \|y\| \leq \varepsilon.$$

(4)

(il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{\|y\|}$)

$$|\langle x, y \rangle - \langle x, y_0 \rangle| = |\langle x, y - y_0 \rangle| \stackrel{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \|x\| \cdot \|y - y_0\| < \varepsilon.$$

(Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{\|y\|}$.)

(5)