

L3 - Math.

Dr. S. SALMI

E. V. N.

Projection sur un convexe

fermé.

Définition d'un convexe, Soit H un espace de Hilbert,

$K \subset H$. K est convexe si

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall (x, y) \in K^2 : tx + (1-t)y \in K.$$

Exemple, $\bar{B}(0, 1)$ est convexe ; $\bar{B}(0, 1) = \{x \in H / \|x\| \leq 1\}$

En effet, soient $x_1, x_2 \in \bar{B}(0, 1)$

$$\|x_1\| \leq 1, \quad \|x_2\| \leq 1, \quad \text{et soit } t \in [0, 1].$$

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\| \leq \underbrace{t\|x_1\|}_{\leq 1} + \underbrace{(1-t)\|x_2\|}_{\leq 1} \leq t + 1 - t = \boxed{1}.$$

$$\Rightarrow tx_1 + (1-t)x_2 \in \bar{B}(0, 1).$$

Donc, $\bar{B}(0, 1)$ est convexe dans H .

(1)

Définition Soit H un espace vectoriel normé et $K \neq \emptyset$ un sous ensemble de H , K est dit fermé si la limite de toute suite convergente d'éléments de K appartient à K .

- La fermeture d'un sous ensemble K , noté $\overline{K}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes de K .

Remarque

K est fermé ssi $F = \overline{F}$

Proposition:

Soit $(H, \|\cdot\|_H)$ un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_H$ et soit $K \subset H$ (K muni de la norme $\|\cdot\|_H$)

K est complet $\Leftrightarrow K$ est fermé.

Preuve:

$\Rightarrow$ Supposons que K est complet et montrons que K est fermé

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans K tq: $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$

Pour montrer que K est fermé, il suffit de prouver que $x \in K$

Or on a: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ est une suite convergente.

Or $K \subset H$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ dans H .

et comme H est complet alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H .
(2)

d'où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans K (car $K \subset H$)

alors $x_n \rightarrow \underline{x} \in K$.

on peut conclure que K est fermé de H .

4= Supposons que K est fermé et montrons que K est complet

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans K .

OK $K \subset H$, alors elle est de Cauchy dans H .

OK H est complet alors $x_n \rightarrow x \in H$.

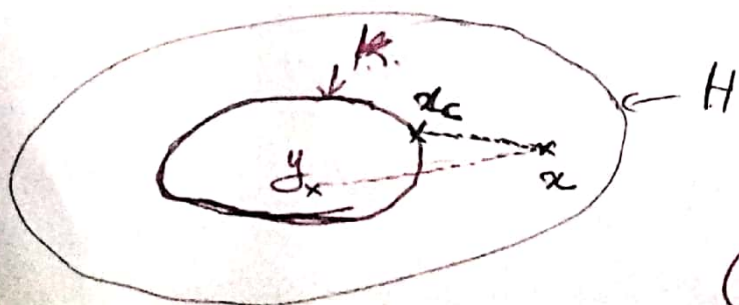
OK $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ et K est fermé donc $x_n \rightarrow x \in K$.

d'où toute suite de Cauchy de K CV vers un élément de K .

Alors, K est complet de H . 

Proposition: Soit H un espace de Hilbert, $K \subset H$ un convexe non vide et fermé dans H .

$\forall x \in H. \exists! x_c \in K: \|x - x_c\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$.



(3)

Remarque: $x_c = P_K(x)$ est appelé le projeté de x sur K .

Proposition: Soit H un Hilbert et $K \subset H$, un convexe non vide fermé dans H .

Soit $x \in H$ et $x_c = P_K(x)$. Alors, $\forall y \in K: \langle x - x_c, y - x_c \rangle \leq 0$

Preuve: $\forall t \in]0, 1], \forall x_c, y \in K$.

On pose: $z = ty + (1-t)x_c$.

On sait que: $\|x - x_c\| \leq \|x - z\|$.

$$\text{car } \|x - x_c\|^2 \leq \|x - (ty + (1-t)x_c)\|^2$$

$$\Rightarrow \|(x - x_c) + t(x_c - y)\|^2 - \|x - x_c\|^2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \|x - x_c\|^2 + t^2 \|x_c - y\|^2 + 2t \langle x - x_c, x_c - y \rangle - \|x - x_c\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow t^2 \|x_c - y\|^2 + 2t \langle x - x_c, x_c - y \rangle \geq 0.$$

on divise par t ($t \neq 0$) ($t \in]0, 1]$)

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow t \|x_c - y\|^2 + 2 \langle x - x_c, x_c - y \rangle \geq 0.$$

lorsque $t \rightarrow 0^+$, on trouve:

$$\langle x - x_c, y - x_c \rangle \leq 0.$$

□

(4)

Récapitulativement: Soit H un Hilbert et $K \subset H$ non vide.

fermé et convexe dans H . ~~$\forall x \in H \exists ! x_c \in K$~~ ~~$\langle x - x_c, y - x_c \rangle \leq 0$~~
 $\forall y \in K$.

$\downarrow \forall x \in H \exists ! x_c \in K. \langle x - x_c, y - x_c \rangle \leq 0.$

~~Alors~~ alors. $x_c = P_K(x)$.

Preuve: Montrons que $x_c = P_K(x)$.

~~ie.~~ $\|x - x_c\| = \inf_{y \in K} \|x - y\| \stackrel{?}{\Rightarrow} \|x - x_c\|^2 \leq \|x - y\|^2$

En effet, soit $x \in H, \forall y \in K$: $\|x - y\|^2 = \|(x - x_c) + (x_c - y)\|^2$

$$\Rightarrow \|x - y\|^2 = \|x - x_c\|^2 + \|x_c - y\|^2 + 2 \underbrace{\langle x - x_c, x_c - y \rangle}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \|x - y\|^2 \geq \|x - x_c\|^2$$

$$\text{car } \langle x - x_c, y - x_c \rangle \leq 0.$$

$$\Rightarrow \|x - x_c\| \leq \|x - y\| \text{ ie. } \|x - x_c\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

