

Solution ~~Exo~~ TD N=01.

Exo 1 F sur $\mathbb{K}$ e.v

$$1) f(x+y, x+y) + f(x-y, x-y) = 2(f(x, x) + f(y, y))$$

On a: $f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y)$

$$= f(x, x) + f(y, y) + f(x, y) + \overline{f(x, y)}$$
$$= f(x, x) + f(y, y) + 2 \operatorname{Re}(f(x, y)) \quad \dots (1)$$

$$f(x-y, x-y) = f(x, x) - 2 \operatorname{Re}(f(x, y)) + f(y, y)$$

de (1) et (2) on trouve,

$$f(x+y, x+y) + f(x-y, x-y) = 2(f(x, x) + f(y, y))$$

et

$$f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) = 4 \operatorname{Re}(f(x, y))$$

Exo 2 (Inégalité de Minkowski)

f est un produit scalaire sur E . À voir,

$$\sqrt{f(x+y, x+y)} \leq \sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)}$$

On a: $f(x+y, x+y) = f(x, x) + 2 \operatorname{Re}(f(x, y)) + f(y, y)$

$$\leq f(x, x) + 2 |f(x, y)| + f(y, y)$$

(Inégalité de Cauchy)
Schwarz

$$\leq f(x, x) + 2 \sqrt{f(x, x) \cdot f(y, y)} + f(y, y)$$

(1)

$$f(x+y, x+y) \leq \left(\sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)} \right)^2.$$

D'où, $\sqrt{f(x+y, x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}.$

Exo 3: Montreons que $a+b \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2+b^2}$

On a: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2+b^2$

$$\Rightarrow 2ab + a^2 + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow a+b \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

□

2.1) $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$

$$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = f(0) \cdot g(0) + \int_0^1 f'(t) \cdot g'(t) dt.$$

2.2) φ est un produit scalaire sur E :

• On a φ est bilinéaire symétrique sur E .

• $\forall f \in E \quad \varphi(f, f) = f^2(0) + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0.$

• $\forall f \in E \quad \varphi(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } f' \text{ est} \\ \text{continue sur } [0, 1] \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1] \end{cases}$$

D'où φ est un produit scalaire sur E .

2.2) Montrons que N définit une norme sur E :

$$N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f \mapsto N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

On a: La norme induite par le produit scalaire φ est,

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\varphi(f, f)} \\ &= \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt} \\ &= N(f). \end{aligned}$$

d'où N est une norme sur E .

2.3) On Compare entre N et $\|\cdot\|_\infty$:

On a: $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

$$\text{On a, } f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

De la 1^{re} question $|a+b| \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2+b^2}$

On trouve:

$$|f(x)| \leq \sqrt{2} \sqrt{f(0)^2 + \left(\int_0^x f'(t) dt \right)^2}$$

l'inégalité de Cauchy Schwarz pour le produit scalaire.

$$\langle f', g' \rangle = \int_0^1 f'(t) \cdot g'(t) dt$$

car: $|\langle f', g' \rangle| \leq \langle f', f' \rangle \cdot \langle g', g' \rangle$

Pour $g(t) = t$ ie, $g'(t) = 1$.

$$\left[\int_0^1 f'(t) dt \right]^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2 dt \cdot \int_0^1 1 dt$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^1 f'(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

Alors:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \sqrt{2} \sqrt{f(0)^2 + \left(\int_0^1 f'(t) dt \right)^2}$$

$$\|f\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

$$\|f\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \cdot N(f)$$

c.q.f.d

EX04 (Identités de Polarisation)

i) Montrons que si $K = \mathbb{R}$. Alors $\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$.

On a:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle. \quad \text{--- (1)}\end{aligned}$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle. \quad \text{--- (2)}$$

de (1) et (2), on conclut:

$$\frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \langle x, y \rangle.$$

ii) A faire.

EX06 : (Identité de Parallélogramme)

de l'exercice (04) on a: $\forall x, y \in E$.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

EX05 (Identité de la médiane)

$$\text{On a: } \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad \text{--- (*)}$$

$$\text{on pose: } x-y = X \in H.$$

$$x-z = Y \in H.$$

$$\text{d'où } x+y = 2x + y-z = 2\left(x - \frac{y+z}{2}\right) \quad \text{--- (1)}$$

(5)

$$\text{et } X - Y = Z - Y. \text{ --- (2)}$$

On remplace (1) et (2) dans (*). on obtient,

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = \frac{1}{2} \|z - y\|^2 + 2 \left\| x - \frac{y+z}{2} \right\|^2.$$

(6)