Cours N1 :PL

La programmation linéaire : peut se définir comme une technique **mathématique** permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la **maximisation des bénéfices** ou la **minimisation des coûts**. Dans la plupart des cas, les problèmes de l'entreprise pouvant être traités par la programmation linéaire comportent un certain nombre de ressources. On peut mentionner, par exemple, la main-d'œuvre, les matières premières, les capitaux, … qui sont disponibles en quantité limitée et qu'on veut répartir d'une façon optimale entre un certain nombre de processus de fabrication. Notre approche pour résoudre ce type de problèmes sera divisée en deux étapes principales :

a) **La modélisation :** du problème sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires qui permettra ainsi de bien identifier et structurer les contraintes que doivent respecter les variables du modèle ; de plus, on doit définir l'apport de chaque variable à l'atteinte de l'objectif poursuivi par l'entreprise, ce qui se traduira par une fonction à optimiser.

- En Recherche Opérationnelle (RO), modéliser un problème consiste à identifier :
- Les variables intrinsèques (inconnues)
- Les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables
- L'objectif visé (optimisation).

Dans un problème de programmation linéaire (PL) les contraintes et l'objectif sont des fonctions linéaires des variables. On parle aussi de Programme linéaire.

b) La détermination de l'optimum mathématique à l'aide de certaines techniques propres à la programmation linéaire.

Nous étudierons 3 méthodes pour résoudre les différents types de problèmes de programmation linéaire ; la première est basée sur une résolution graphique, elle est donc limitée à 2 ou 3 variables.
La deuxième méthode est plus algébrique et elle justifiera la troisième qui porte le nom de méthode (ou algorithme) du simplexe.

I. MODELISATION

Des exemples :
Exemple 1 : Production
Exemple 2 : Transport
Exemple 3 : Planification

Problème de production

1er Exemple
Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de Matières premières.

	A	B
Fraise	**2**	**1**
Lait	**1**	**2**
Sucre	**0**	**1**

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre.
La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 4 euros et 5 euros.
Le fabricant cherche à maximiser son profit.

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

1. Sur quelles quantités peut-on travailler ?
- Seules valeurs non constantes : les quantités de yaourts *A* et *B* produites
- On parle de variables
- On les notera ***xA*** et ***xB***
- Variables : *x*A et *x*B

2. Que cherche-t-on à optimiser ?

- Le profit z
- Calculé à partir de xA et xB
- On parle de fonction objective
- $z = 4x\text{A} + 5x\text{B}$
- $\max z = 4x\text{A} + 5x\text{B}$

3. Quelles sont les contraintes du problème ?

- Première contrainte : 800 Kg de fraises disponibles
- la quantité utilisée dépend de la production : $2x\text{A} + x\text{B}$

$2x\text{A} + x\text{B} \leq 800$ (fraises)

$x\text{A} + 2x\text{B} \leq 700$ (lait)

$x\text{B} \leq 300$ (sucre)

$x\text{A}, x\text{B} \geq 0$ positivité !

Mon premier programme linéaire

$$\begin{aligned} &\text{Max } 4x\text{A} + 5x\text{B} \\ &2x\text{A} + x\text{B} \leq 800 \\ &x\text{A} + 2x\text{B} \leq 700 \\ &\quad\quad x\text{B} \leq 300 \\ &x\text{A}, x\text{B} \geq 0 \end{aligned}$$

2eme Exemple

Une usine fabrique 2 produits P1 et P2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'œuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	P_1	P_2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

P1 et P2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Quelles quantités (non entières) de produits P1 et P2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

Variables : x1 et x2 sont les quantités des produits P1 et P2 fabriques (x1; x2 R).

Fonction objective à maximiser : La fonction objectif F correspond au bénéfice total : F (x1 ; x2) = 6 x_1 + 4 x_2. On cherche donc
Max $_{(x1\,;\,x2)}$ [F (x1 ; x2) = 6 x_1 + 4 x_2].

Contraintes : Disponibilités de chacune des ressources :

3 x_1 + 9 $x_2 \leq 81$
4 x_1 + 5 $x_2 \leq 55$
2 x_1 + $x_2 \leq 20$

- Positivité des variables : x1 ; x2 ≥ 0.

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme d'un programme linéaire :

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

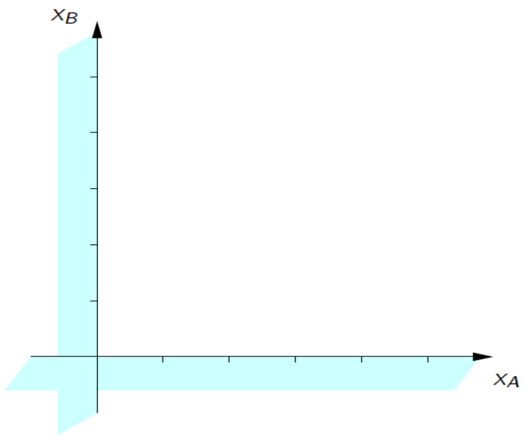
II. Résolution graphique

On dispose d'un outil (la PL) pour modéliser des problèmes
• Comment résoudre les problèmes à l'aide de la PL ?
• Plusieurs algorithmes existent, dont le simplexe (prochain cours)
• Pour des problèmes avec deux variables, on peut résoudre graphiquement (aide à comprendre la structure du problème)

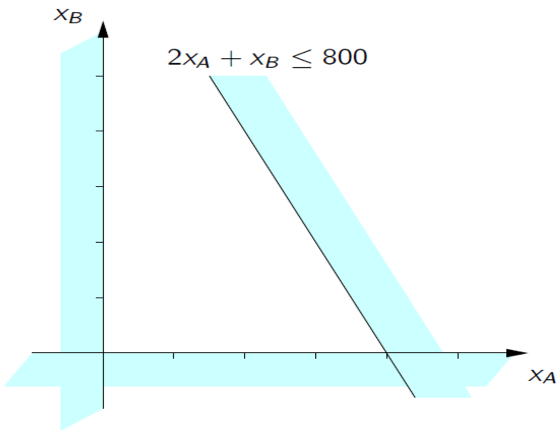
1. Représentation graphique

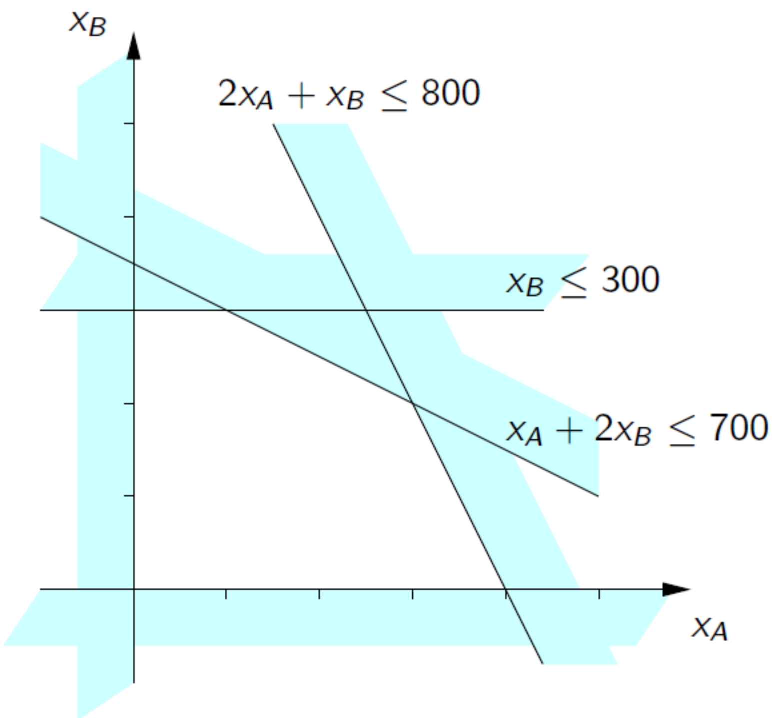
1er exemple :

$$
\begin{array}{llll}
\max & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



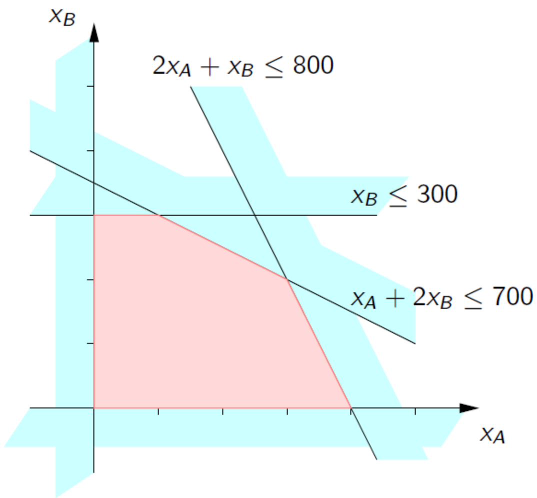
$$
\begin{array}{llll}
\max & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$





2. Terminologie

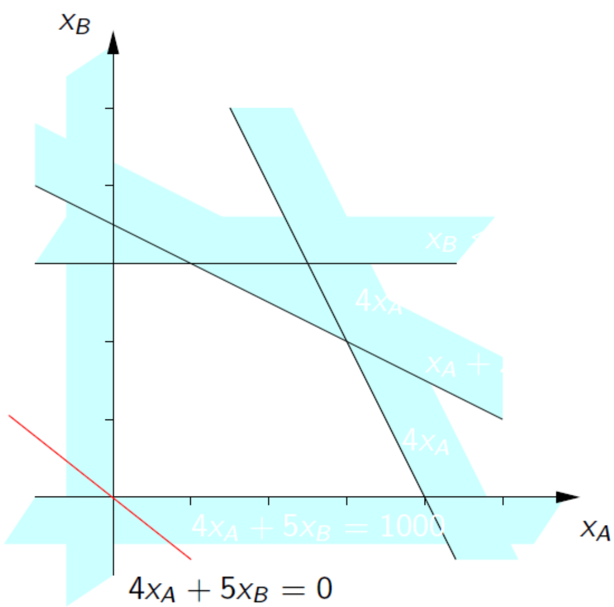
- **Solution :** affectation de valeurs aux variables
- **Solution réalisable :** solution réalisable si les valeurs satisfont l'ensemble des contraintes
- **Région réalisable :** ensemble des solutions réalisables.

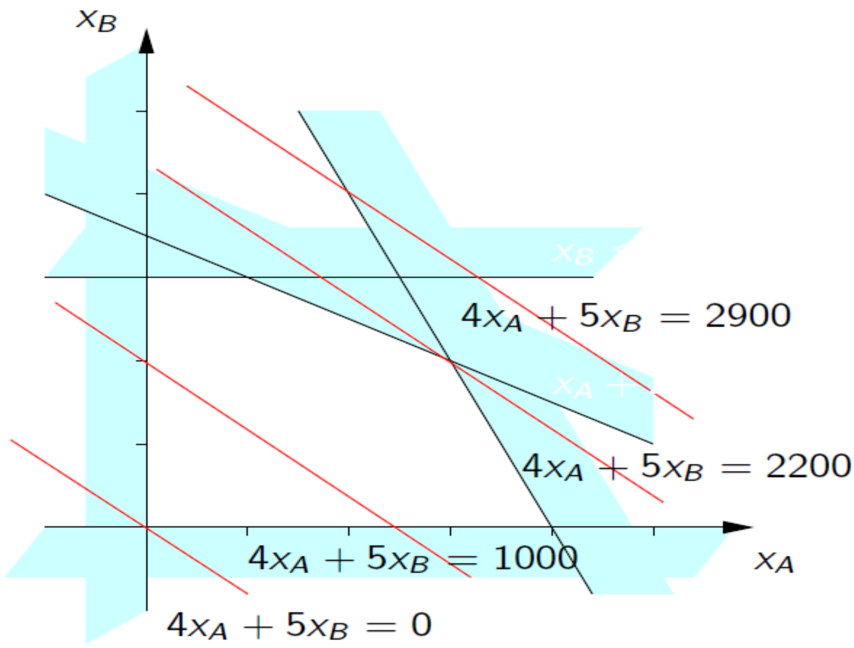


Exemple : x (80,150)

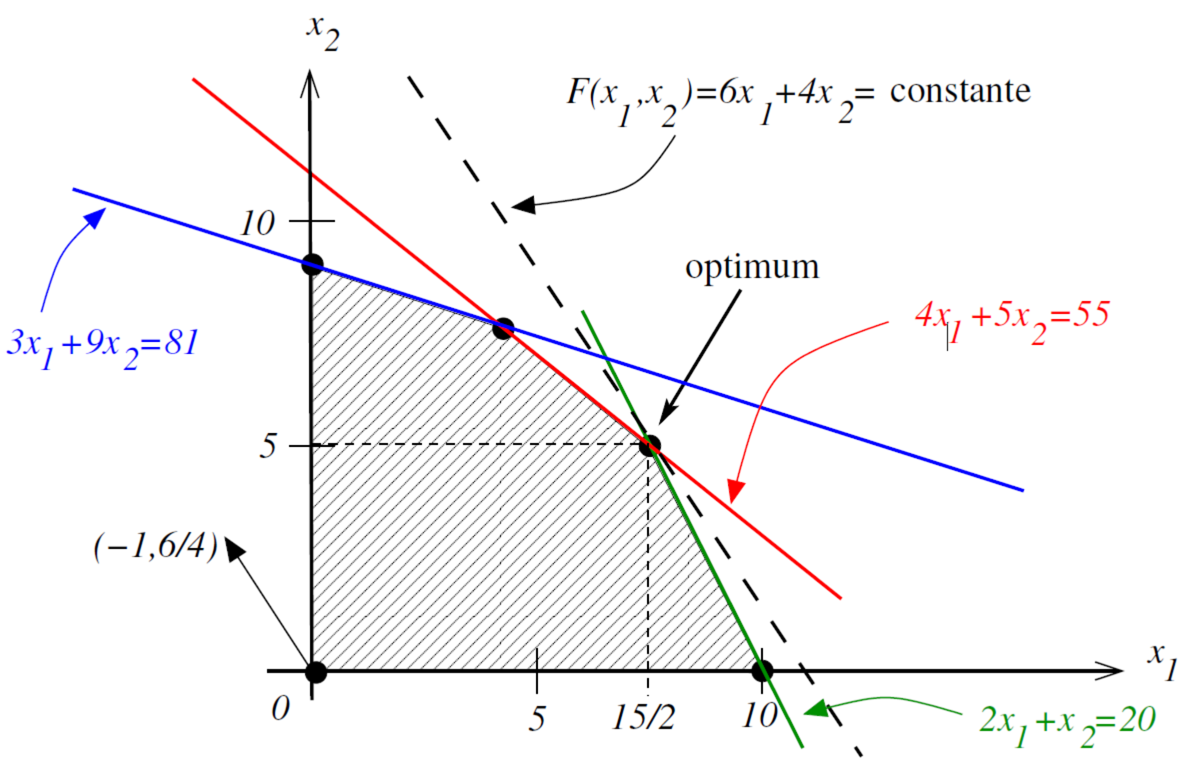
3. **Résolution graphique**

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & 4x_A + & 5x_B & \\ & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\ & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\ & & x_B & \leq 300 \\ & x_A, & x_B & \geq 0 \end{array}$$





2 -ème exemple :



Détermination du maximum de F

Fonction objectif F(x1; x2) = 6x1 + 4x2) droite de coefficient directeur(-1 ; 6/4).

Pour déterminer max F, on fait "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu'à rencontrer l'ensemble des variables satisfaisant les contraintes) → solution optimale.
(x1; x2) = (15/2 ; 5) avec max(F) = 65.

On remarque que le maximum de F est atteint en un sommet du ***polygône convexe*** *des contraintes.*

Ecriture générale d'une programmation linéaire

On peut écrire ainsi un programme linéaire avec *n* variables $X_1, \ldots, X_n$ et *m* contraintes.

$$\begin{array}{rc} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

• Linéarité : Objectif et contraintes sont des fonctions linéaires des variables de d´décision (les coefficients c_i et a_{ij} des variables sont constants)
• Continuité : Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle respectant les contraintes linaires.

III. Formes générales d'un programme linéaire

1) Forme canonique mixte

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)} \left[F(x_1,\ldots,x_n) = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right].$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ contraintes inégalités : } \forall i \in I_1, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i \\ \bullet \text{ contraintes égalités : } \forall i \in I_2, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ \bullet \text{ contraintes de signes : } \forall j \in J_1, \ x_j \geq 0 \\ \bullet \ \forall j \in J_2, \ x_j \text{ de signe quelconque.} \end{cases}$$

$I = I_1 \cup I_2$: ens. Des indices de contraintes, card(I) = $m \rightarrow m$ contraintes.
$J = J_1 \cup J_2$: ens. Des indices des variables, card(J) = $n \rightarrow n$ variables.

Notations

Vecteurs :

$$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \quad \text{(les inconnues)}$$
$$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$$

Matrice A de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2) Forme canonique pure

Sous cette forme, pas de contraintes d'égalité $I_2 = \emptyset$; et $J_2 = \emptyset$.

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *canonique pure* s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}}$$

3) Forme standard

Sous cette forme, $I_1 = \emptyset$; et $J_2 = \emptyset$

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *standard* s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l}\max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad \left\{\begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right.\end{array}}$$

On dit de plus que le PL est sous forme standard simpliciale si A de taille m x n avec m ≤ n, se décompose en :
$A = (I_m \mid H)$

Im matrice identité de taille m x m.
H matrice de taille m x (n - m)

4) Variables d'écarts

Proposition

Tout PL sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

Démonstration. i) Soit un PL sous forme canonique pure. On a

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{b},\ \mathbf{e} \geq \mathbf{0}$$

où $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_m)^\top$ sont appelées *variables d'écart*.

$$\text{Ainsi,} \quad \left\{\begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} A \mid I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{array}\right.$$

avec $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \mid I_m \end{pmatrix}$ matrice de taille $m \times (n + m)$.

ii) (Réciproque) Soit un PL sous forme standard. On a

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{A}{-A} \right) \mathbf{x} \leq \left(\frac{\mathbf{b}}{-\mathbf{b}} \right) \\ & \Leftrightarrow \tilde{\tilde{A}}\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

où $\tilde{\tilde{A}}$ est une matrice de taille $2m \times n$ et $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{2m}$.

Exemple. Problème de production de l'introduction.
PL sous forme standard. On introduit 3 variables d'écarts e_1, e_2, e_3.

$$\max_{(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \right].$$

sous les contraintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Les inconnues sont désormais x_1, x_2, e_1, e_2, e_3.