Chapitre I

Éléments de calcul vectoriel (Rappels mathématiques)

I.1 Scalaire et vecteur

I.1.1 Scalaire

Définition : un scalaire est une quantité physique qui n’est spécifié que par sa grandeur. On peut exprimer avec un nombre est une unité.

Exemple : La température $\longrightarrow$ 25 ℃

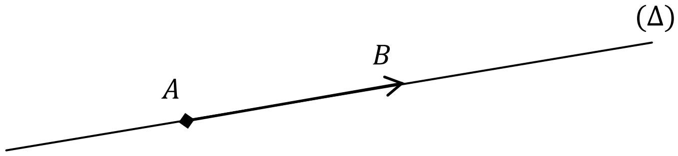
La masse $\longrightarrow$ 30 kg

Énergie $\longrightarrow$ 18 J

Temps $\longrightarrow$ 15s

1.1.2 Vecteur

Définition : un vecteur est une quantité physique qui est spécifié par une origine, une direction, un sens et une intensité.

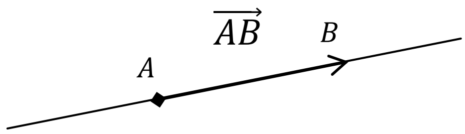


- L’origine : le point d’application (A)
- La direction : la droite qui porte le vecteur (Δ)
- Le sens : l’orientation origine – extrémité (de A vers B) du vecteur et est symbolisé par une flèche.
- L’intensité : représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur.

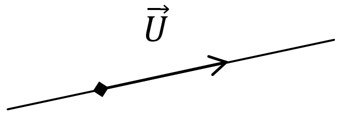
Exemple : vecteur vitesses $\vec{V}$, vecteur force $\vec{F}$

Comment se note un vecteur :

- Deux lettres surmontées d’une flèche si le vecteur est représenté par une flèche d’origine A et d’extrémité B.



- Une lettre surmontée d'une flèche.



Exemple : Une force peut être modélisée par un vecteur

Le poids $\vec{P}$ d'un corps de masse 1 kg (Figure I.1) peut être représenté par un vecteur ayant les caractéristiques suivantes :

- Origine : le centre de gravité de l'objet
- Direction : verticale
- Sens : du haut vers le bas
- Module : $\|\vec{P}\|$ = P = mg = 1*9,81= 9,81N

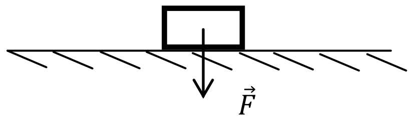


Figure I.1

Si on choisit une échelle : 1cm $\longrightarrow$ 2N

Donc le vecteur aura une longueur 4,9 cm

I.2 Classification

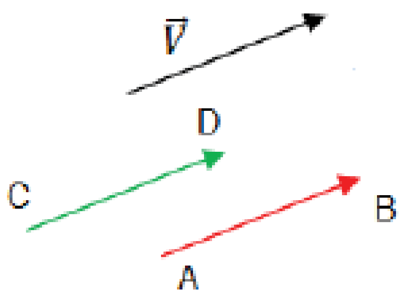
Il existe différents types de vecteurs :

I.2.1 Vecteur libre

Un vecteur libre est défini par sa direction, son sens et sa valeur, son point d'application pouvant être quelconque dans l'espace.

Exemple : le vecteur de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

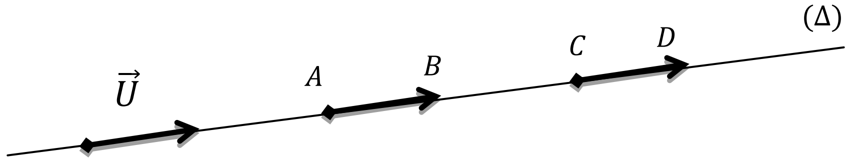
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants d'un même vecteur $\vec{V}$.



I.2.2 Vecteur glissant

Un vecteur glissant est défini par sa droite d'action, son sens et sa valeur, son point d'application n'étant pas défini.

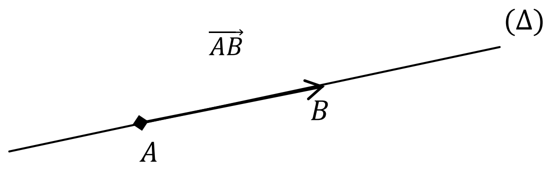
Exemple: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur glissant $\vec{U}$



I.2.3 Vecteur lié

Un vecteur est nommé "vecteur lié" si l'on fixe le point d'application. Il est caractérisé par :

1. Origine
2. Une direction
3. Un sens
4. Le module

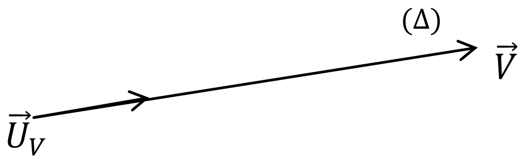


I.3 Représentation analytique des vecteurs

I.3.1 Notion de vecteur unitaire

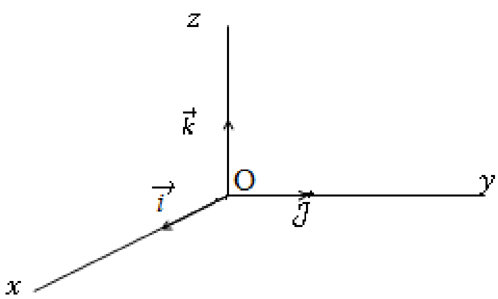
On appelle vecteur unitaire $\vec{U}$ associé au vecteur $\vec{V}$, le vecteur : $\vec{U} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

Son module est $\|\vec{U}\| = 1$, son support est la droite (Δ) et son sens celui de $\vec{V}$



Soit un repère orthonormé est représenté par trois axes $(0x, 0y, 0z)$ perpendiculaires deux à deux, muni de trois vecteurs unitaires respectivement $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, et\ \vec{\mathcal{K}}$.

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, et\ \vec{\mathcal{K}}$ Sont les vecteurs de base du repère orthonormé (O, x, y, z) où O est un point de l'espace pris comme origine.



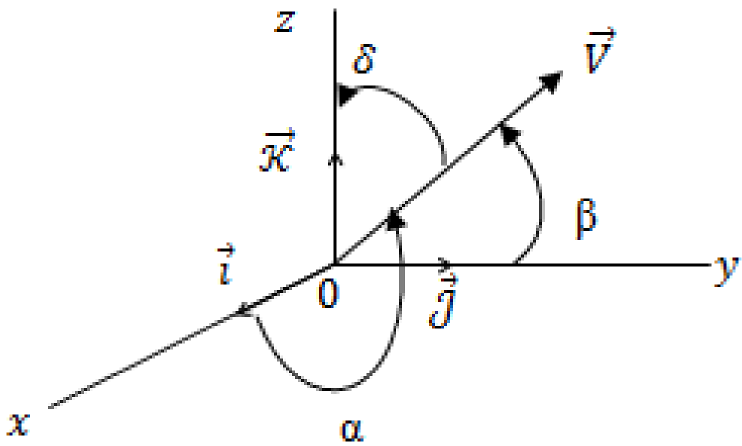
I.3.2 Représentation analytique des vecteurs

Les composantes du vecteur $\vec{V}$ sont les projections orthogonales $V_x, V_y, et\ V_Z$ sur les trois axes.

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_Z\vec{\mathcal{K}}$$

Où le module de $\vec{V}$ est :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$



$V_x = \|\vec{V}\| \cos\alpha$, $V_y = \|\vec{V}\| \cos\beta$, $V_Z = \|\vec{V}\| \cos\delta$

Où $\alpha = (\vec{\imath}, \vec{V})$; $\beta = (\vec{\jmath}, \vec{V})$; $\delta = (\vec{\mathcal{K}}, \vec{V})$

On appelle $\cos\alpha$, $co\,s\,\beta$, $cos\delta$ les cosinus directeurs du support de $\vec{V}$ dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\mathcal{K}})$.

Les composantes du vecteur unitaire de $\vec{V}$, noté $\vec{U}$, sont :

$$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_Z\vec{\mathcal{K}}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x}{\|\vec{V}\|}\vec{\imath} + \frac{V_y}{\|\vec{V}\|}\vec{\jmath} + \frac{V_Z}{\|\vec{V}\|}\vec{\mathcal{K}}$$

$$\vec{U} = \cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\delta\vec{\mathcal{K}}$$

Et comme $\|\vec{U}\| = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1$

Remarque : on a utilisé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\mathcal{K}})$ repère cartésien.

Exemple 1: déterminer le vecteur unitaire de la direction du vecteur $\vec{F} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{\mathcal{K}}$.

Le vecteur unitaire de la force $\vec{\mathrm{F}}$:

$$\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{F}.\vec{\mathrm{U}} \Longrightarrow \vec{\mathrm{U}} = \frac{\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{F}} = \frac{3\vec{\mathrm{i}} + 4\vec{\mathrm{j}} + 5\vec{\mathrm{k}}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} \Longrightarrow \vec{\mathrm{U}} = \frac{3}{\sqrt{50}}\vec{\mathrm{i}} + \frac{4}{\sqrt{50}}\vec{\mathrm{j}} + \frac{5}{\sqrt{50}}\vec{\mathrm{k}}$$

$$\vec{\mathrm{U}} = 0{,}424\vec{\mathrm{i}} + 0{,}565\vec{\mathrm{j}} + 0{,}707\vec{\mathrm{k}}$$

I.4 Les opérations sur les vecteurs

On considère des vecteurs tels que : $U_k = x_k\vec{\imath} + y_k\vec{\jmath} + z_k\vec{\mathcal{K}}$ dans une base orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\mathcal{K}})$.

I.4.1 Somme vectorielle

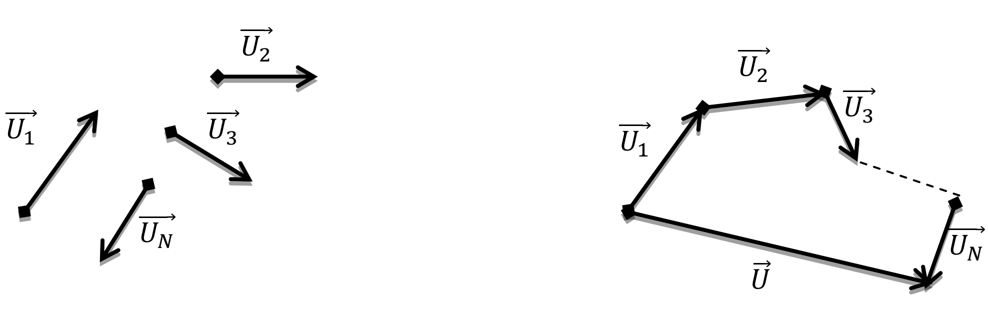
$\overrightarrow{U_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{\mathcal{K}}$

$\overrightarrow{U_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{\mathcal{K}}$

$$\vec{I} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2)\vec{\mathcal{K}}$$

Remarque : la somme est commutative ($\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_1}$) de façon générale.

$$\overrightarrow{U_1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{U}_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k\vec{\imath} + y_k\vec{\jmath} + z_k\vec{\mathcal{K}}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{\imath} + \sum_{k=1}^{n} y_k\vec{\jmath} + \sum_{k=1}^{n} z_k\vec{\mathcal{K}}$$



I.4.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

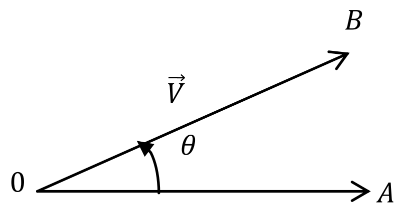
$\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda.\vec{U} = \lambda x_U\vec{\imath} + \lambda y_U\vec{\jmath} + \lambda z_U\vec{k} = \vec{U}'$

Les propriétés vectorielle de $\vec{U}'$

- Le module $\|\vec{U}'\| = \lambda\|\vec{U}\|$
- Le support de $\vec{U}'$est celui de $\vec{U}$
- Le sens est celui de $\vec{U}$ si $\lambda > 0$ et opposé à celui de $\vec{U}$ si $\lambda < 0$

I.4.3 Produit scalaire

Définition : le produit scalaire de vecteur $\vec{U}$ par le vecteur $\vec{V}$ est le scalaire noté $\overline{\vec{U}.\vec{V}}$ tel que : $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos(\vec{U},\vec{V})$



Propriétés du produit scalaire

- Le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$$

- Distributivité par rapport à l'addition :

$$\vec{U}.\left(\vec{V} + \vec{W}\right) = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$$

- Multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{U}.\vec{V})=(\lambda\vec{U}).\vec{V}=\vec{U}.(\lambda\vec{V})$$

- Si le produit scalaire est nul, alors :

$$\vec{U} = \vec{0} \; ou \; \vec{V} = \vec{0} \; ou \; \cos(\vec{U},\vec{V}) = 0 \; \Leftrightarrow \vec{U} \perp \vec{V}$$

Le produit scalaire nous permet donc de déduire la perpendicularité géométrique lors qu'il est de valeur nulle.

Expression analytique du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ définis dans le repère orthonormé $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\mathcal{K}})$tels que :

$$\vec{U} = U_1\vec{\imath} + U_2\vec{\jmath} + U_3\vec{\mathcal{K}}$$
$$\vec{V} = V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{\mathcal{K}}$$

Le produit scalaire s'écrit :

$$\vec{U}.\vec{V} = \left(U_1\vec{\imath} + U_2\vec{\jmath} + U_3\vec{\mathcal{K}}\right).\left(V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{\mathcal{K}}\right) = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3$$

Remarque :

- Dans une base orthonormée$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\mathcal{K}})$, les vecteurs sont normés donc :

$$\vec{\imath}.\vec{\imath} = 1,\ \ \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = 1,\ \ \vec{\mathcal{K}}.\vec{\mathcal{K}} = 1$$

- Les vecteurs de la base sont orthogonaux entre eux :

$$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0;\ \ \vec{\jmath}.\vec{\mathcal{K}} = 0;\ \ \vec{\mathcal{K}}.\vec{\imath} = 0$$

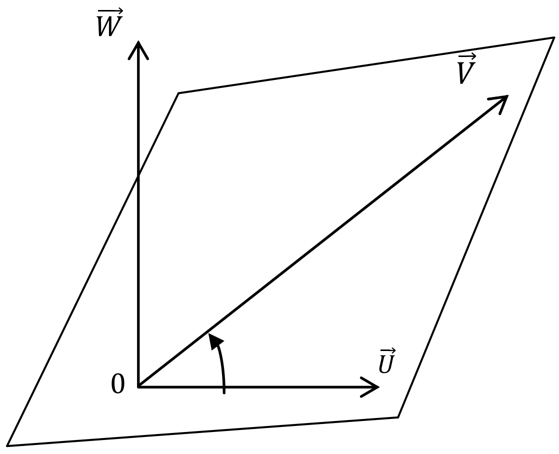
- On peut calculer l'angle compris les deux vecteur, soit :

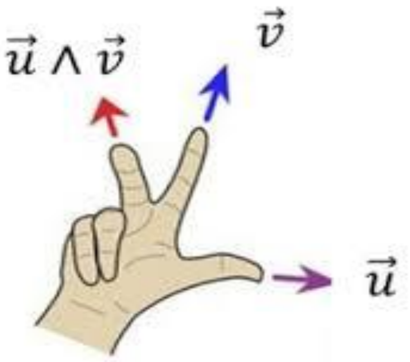
$$\left.\begin{aligned} \vec{U}.\vec{V} &= \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|\cos\theta \\ \vec{U}.\vec{V} &= U_1.V_1 + U_2.V_2 + U_3.V_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\theta = \frac{U_1.V_1 + U_2.V_2 + U_3.V_3}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}.\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}}$$

I.4.4 Produit vectoriel

Définition : Le produit vectoriel d'un vecteur $\vec{U}$ par un vecteur $\vec{V}$ est le vecteur $\vec{W}$ noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- Support du vecteur$\vec{W}$: perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ $(\vec{W} \perp \vec{U}\ \ et\ \vec{W} \perp \vec{V})$
- Sens du vecteur $\vec{W}$: le sens du vecteur $\vec{W}$ est donné par règle de la main droite.
- Module du vecteur $\vec{W}$: $\|\vec{W}\| = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|\sin(\vec{U}, \vec{V})$





Propriétés du produit vectoriel

- Anticommutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$

- Distributif par rapport à l'addition de vecteurs :

$$\vec{U} \wedge \left(\vec{V} + \vec{W}\right) = \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) + \left(\vec{U} \wedge \vec{W}\right)$$

- Associatif par rapport à la multiplication par un nombre réel :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \left(\vec{U} \wedge \vec{W}\right) = \left(\lambda \vec{U}\right) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge \left(\lambda \vec{V}\right)$$

- Non associatif : $\vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) \neq \left(\vec{U} \wedge \vec{W}\right) \wedge \vec{W}$
- Si $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \iff \vec{U} \,//\, \vec{V}$

Expression analytique du produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ définis par leurs composantes dans un repère cartésien $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\mathcal{K}}\right)$.

$\vec{U} = U_1\vec{\imath} + U_2\vec{\jmath} + U_3\vec{\mathcal{K}}$

$\vec{V} = V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{\mathcal{K}}$

$\vec{U} \wedge \vec{V} = ?$

On utilisant un déterminant d'ordre 3, de la manière suivante :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\mathcal{K}} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} U_1 & U_3 \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} + \vec{\mathcal{K}}\begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{\imath}(U_2V_3 - U_3V_2) - \vec{\jmath}(U_1\, V_3 - U_3V_1) + \vec{\mathcal{K}}(U_1V_2 - U_2V_1)$$

Exemple2

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2, 3, -3), B(5, 7, 2). Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Solution

$\mathrm{A}(2, 3, -3);\ \mathrm{B}(5, 7, 2)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 5-2 \\ 7-3 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3\vec{\mathrm{i}} + 4\vec{\mathrm{j}} + 5\vec{\mathrm{k}}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \Longrightarrow \sqrt{50} = 7{,}071$

La direction est détermine par les angles α, β et θ qu'il fait avec chacun des axes du repère.

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{i}): \ \overrightarrow{AB}.\vec{i} = AB.1.\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{i}}{AB} = \frac{3}{7{,}071} \Longrightarrow \alpha = 64{,}89°$$

$$\beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{j}): \ \overrightarrow{AB}.\vec{j} = AB.1.\cos\beta \Longrightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}.\beta}{AB} = \frac{3}{7{,}071} \Longrightarrow \beta = 55{,}54°$$

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \vec{k}): \ \overrightarrow{AB}.\vec{k} = AB.1.\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{k}}{AB} = \frac{3}{7{,}071} \Longrightarrow \theta = 44{,}99°$$

Exemple 03

Soit deux vecteurs $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Calculer : $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A}.\vec{B}$ et $\vec{A} \wedge \vec{B}$

$\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{B} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{A} + \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) - (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

$\vec{A}.\vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}).(4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 1.4 + 3.1 + (-1)(3) = 4$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \wedge (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}[3.3 - 1(-1)] - \vec{j}[1.3 - 4.(-1)] + \vec{k}[1.1 - 4.3]$$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = 10\vec{i} - 7\vec{j} - 11\vec{k}$