Chapitre I : Dynamique des fluides et équations de transport

I.1 Caractéristiques des fluides

I.1.1 Continuité des milieux fluides

Un tel fluide est appelé un continuum, ce qui signifie simplement que la variation des propriétés est lisse de sorte que le calcul différentiel peut être utilisé pour analyser la substance. Les grandeurs T (température), ρ (masse volumique), U (vitesse) sont uniformes sur dV à chaque instant.

I.3.2 Viscosité des fluides

La viscosité est une propriété du fluide, elle se manifeste quand le fluide est en mouvement. Les fluides visqueux par rapport aux fluides idéaux peuvent être caractérisés par deux propriétés,

1. lorsqu'un fluide visqueux s'écoule le long d'une paroi, il adhère à la paroi, c'est-à-dire que la couche de fluide en contact immédiat avec la paroi n'a pas de vitesse par rapport à elle,
2. chaque fois que les particules de fluide sont déformées, des contraintes de cisaillement se produisent.

La force de frottement $\vec{F}$ qui s'exerce à la surface de séparation des deux couches, où les particules de la couche fluide avec une vitesse supérieure se glissent sur les particules fluides de la couche avec une vitesse inférieure, ces dernières et avec le frottement freinent les particules de la couche supérieur. Chaque couche fluide ne s'écoule pas à la même vitesse.

$$F = -A\mu\frac{du}{dy} = -A.\tau$$

La contrainte de cisaillement (τ) est donnée en fonction de la loi de Newton par :

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Tels que :

: Coefficient de viscosité ou viscosité dynamique [Pa.s].

du/dy : Gradient de vitesse.

: Contrainte de cisaillement [Pa].

A : Section [m^2].

La viscosité ne se manifeste évidement que s’il y a un mouvement du fluide.

La figure 1 illustre une couche de cisaillement ou couche limite, sur une plaque plane. La contrainte de cisaillement est proportionnelle à la pente du profil de vitesse et est la plus élevée au niveau de la paroi. En outre, au niveau de la paroi, la vitesse u est nulle par rapport à la paroi : c'est ce qu'on appelle la condition de sans glissement (avec frottement), c'est une caractéristique de tous les écoulements de fluide visqueux.

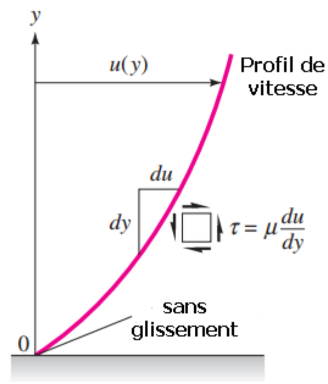


Fig. 1 : Couche limite d'un fluide visqueux près d'une paroi solide

Viscosité cinématique :

On définit la viscosité cinématique d'un fluide par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Cette grandeur, qui apparait dans les équations de la mécanique des fluides, possède une signification physique simple : la capacité de rétention des particules du fluide et quantifie sa capacité à s'épancher.

I.3.3 Écoulement incompressible

Un écoulement incompressible est un déplacement d'une quantité de fluide dont la masse volumique est considérée comme constante au cours du processus, soit une dérivée particulaire du champ scalaire de masse volumique négligeable (description eulérienne). Dans la pratique, on considère généralement que les écoulements liquides sont approximativement incompressibles.

$$\Longrightarrow \boldsymbol{div\,\vec{U} = 0}$$

I.3.4 Écoulement permanent

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire lorsque le champ de vecteurs vitesse est statique : il ne varie pas dans le temps. Plus rien ne dépend explicitement du temps.

$$\text{Écoulement permanent} \Longrightarrow \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0$$

I.2 Description du mouvement des fluides

Pour décrire le mouvement des fluides, il faut connaître les variations de grandeurs physiques telles que la densité, la vitesse, la pression, la température, les contraintes, …etc., en fonction du temps, partout dans une certaine région spatiale. Il existe deux manières de décrire le mouvement du fluide. L'une est appelé **Lagrangienne**, où l'on suit toutes les particules de fluide et décrit les variations autour de chaque particule de fluide le long de sa trajectoire, un peu comme le suivi des boules de billard. L'autre est **Eulérienne**, où les variations sont décrites à toutes les stations fixes en fonction du temps. Dans le second cas, différentes particules passent la même station à des moments différents.

I.2.1 Description Lagrangienne

La description Lagrangienne consiste à suivre dans l'espace, la position d'une particule en fonction du temps (Fig. 2). On étudie les vecteurs positions, vitesse et accélération, et éventuellement la trajectoire ou le chemin suivi par la particule dans son mouvement en fonction du temps.

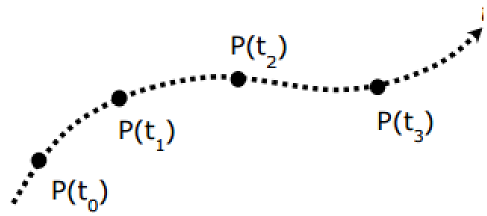


Fig.2 : Trajectoire de la particule P

Une particule est identifiée par sa position initiale au temps t_0,

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) = (t_0, x_0, y_0, z_0, t) \\ y(t) = (t_0, x_0, y_0, z_0, t) \\ z(t) = (t_0, x_0, y_0, z_0, t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ w = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_x = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \gamma_y = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ \gamma_z = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$$

I.2.2 Description Eulérienne

Dans la description Eulérienne de l'écoulement de fluide, les particules de fluide individuelles ne sont pas identifiées. Au lieu de cela, un volume de contrôle est défini. La pression, la vitesse, l'accélération et toutes les autres propriétés d'écoulement sont décrites comme des champs dans le volume de contrôle. Par exemple : le champ de pression, P=P(x, y, z, t).

Notez que la vitesse et l'accéliration sont des champs vectoriels.

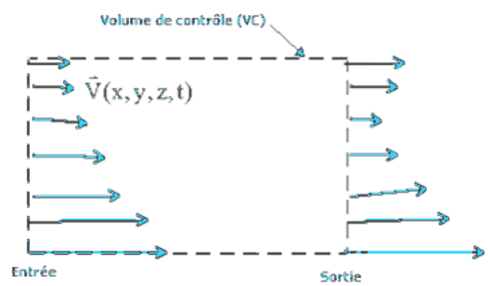


Fig. 3 : Champs des vitesses

Nous définissons à l'intérieure de l'élément de volume une variable de champs, des fonctions de l'espace et du temps. Par exemple, le champ de pression est une variable scalaire, P=P(x, y, z, t) pour les éléments du fluide, le champ de vitesse est une variable vectorielle, $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$.

$on\ a$: $P = P(x, y, z, t)$

L'équation différentielle de P est :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz + \frac{\partial P}{\partial t}dt$$

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(\frac{dt}{dt}\right)$$

avec (u, v, w) les coordonnées de la vitesse locale U.

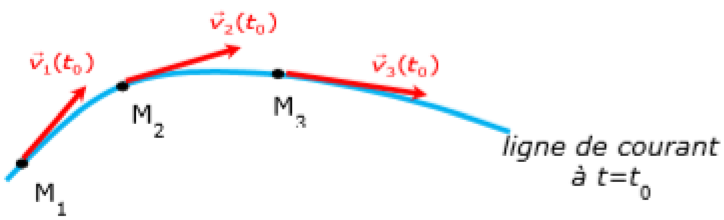
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}u + \frac{\partial P}{\partial y}v + \frac{\partial P}{\partial z}w + \frac{\partial P}{\partial t}$$

Forme différentielle de l'équation

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{U}.\overrightarrow{grad})P = \frac{\partial P}{\partial t} + U.\nabla P$$

1.1.4 Lignes de courant

On appelle ligne de courant « Streamline », toute courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à chaque instant et localement, colinéaire au vecteur vitesse du champ d'écoulement. C'est une courbe qui dérive de la description eulérienne.



Les lignes de courant sont données en résolvant cette équation différentielle.

$$\boldsymbol{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$

I.2 Dérivée particulaire d'une grandeur matérielle

C'est le taux de variation de la grandeur matérielle lorsqu'on suit une particule dans son mouvement, elle est obtenue en dérivant cette grandeur par rapport au temps à un vecteur position constant. Elle représente la vitesse du changement d'une propriété quelconque du milieu (un accroissement par exemple) de cette propriété par unité du temps. Elle peut être décrite en mode de Lagrange ou en mode d'Euler. Soit φ(x, y, z, t) une fonction de point (scalaire, vecteur ou tenseur) de la grandeur matérielle :

– Avec la description de Lagrange : φ(x, y, z, t), (x, y et z) sont indépendantes du temps

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

– Avec la description d'Euler : φ(x, y, z, t), (x, y et z) sont dépendantes du temps

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\overrightarrow{grad}\varphi\right).\vec{V} = \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}_{dérivée\ locale} + \underbrace{v_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}_{dérivée\ advective}$$

I.4 Tenseurs des contraintes

Un tenseur est un tableau multidimensionnel de valeurs numériques qui peut être utilisé pour décrire l'état physique ou les propriétés d'un fluide ou matériau. La figure 4, illustre un cube unitaire avec des forces agissant sur lui en trois dimensions. En divisant par la surface sur laquelle les forces agissent, les contraintes sur le cube peuvent être obtenues. Tout état de contrainte arbitraire peut être décomposé en 9 composantes (σ_{ij} et τ_{ij}). Ces composants forment un tenseur de second rang; le tenseur des contraintes (figure 4).

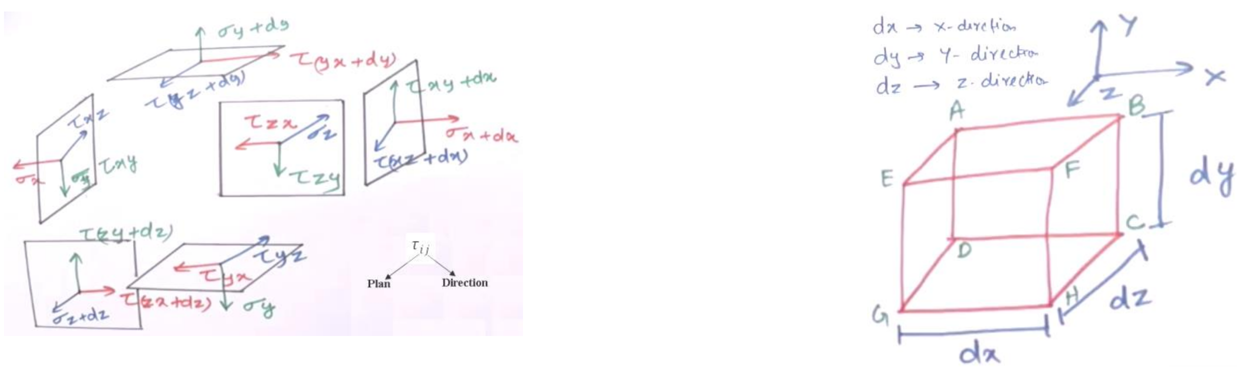


Fig. 4 : Notations utilisées pour les tenseurs des contraintes

$\sigma_x = \tau_{xx}$; $\sigma_y = \tau_{yy}$, $\sigma_z = \tau_{zz}$

F : Forces ; F= $\tau.S$,

Les forces élémentaires sur la facette ⊥ $\boldsymbol{x}$

$$\begin{cases} \delta F_{sx} = \left[-\sigma_x(dydz) + \sigma_{(x+dx)}(dydz)\right] \\ \quad +\left[-\tau_{yx}(dxdz) + \tau_{(yx+dy)}(dxdz)\right] \\ \quad +\left[-\tau_{zx}(dydx) + \tau_{(zx+dz)}(dydx)\right] \end{cases} \quad (1)$$

Un développement limité au premier ordre des quantités $(\sigma_{(x+dx)}, \tau_{(yx+dy)}, \tau_{(zx+dz)})$ conduit à :

$$\sigma_{(x+dx)} = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$$

$\tau_{(yx+dy)} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$

$\tau_{(zx+dz)} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$

Avec, $dV = dxdydz$

$$\begin{cases} \delta F_{sx} = \left[-\sigma_x(dydz) + \sigma_x(dydz) + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_x dxdydz\right] \\ + \left[-\tau_{yx}(dxdz) + \tau_{yx}(dxdz) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) dydxdz\right] \\ + \left[-\tau_{zx}(dydx) + \tau_{zx}(dydx) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) dzdydx\right] \end{cases} \quad (2)$$

Donc :

$$\delta F_{sx} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})\right) dV$$

Sur les trois faces :

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta F_{sx} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})\right) dV \\ \delta F_{sy} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy})\right) dV \\ \delta F_{sz} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z)\right) dV \end{cases} \quad (3)$$

Le tenseur des contraintes est :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Ce tenseur est symétrique, $\left(\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}\ et\ \tau_{zy} = \tau_{zy}\right)$.

I.4.1 Les contraintes normales et les contraintes tangentielles :

On a :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

: La contrainte normale (pression hydrostatique).

δ_{ij}: Le symbole de Kronecker, $\begin{cases} \delta_{ij} = 1, pour\ i = j \\ \delta_{ij} = 0, pour\ i \neq j \end{cases}$

τ_{ij}: Le tenseur de contraintes visqueuses (contraintes de cisaillements),

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \eta\delta_{ij}e = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \eta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

μ et η sont deux paramètres caractérisant les propriétés visqueuses (le frottement interne) des fluides.

: Viscosité de dilatation ; $\eta = -\frac{2}{3}\mu$

ε: Le tenseur de taux de déformation ; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

: Le taux de dilatation

$$e = div\vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Les contraintes normales :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}\ avec\ i = j \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = -P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \sigma_{yy} = -P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \sigma_{zz} = -P + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases} \quad (4)$$

Les contraintes tangentielles :

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij}\ avec\ i \neq j \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{cases} \quad (5)$$

I.5 Théorème de Transport des contraintes de Reynolds :

Le théorème de transport des contraintes de Reynolds est une relation mathématique très utilisée dans la description du mouvement des fluides et le développement des équations.

- Le volume de contrôle (VC) est un volume dans l'espace (volume imaginaire), par lequel le fluide peut s'écouler. L'attention est portée sur les quantités physiques qui traversent la surface (fig. 5).
- La surface qui entoure le (VC) est appelée surface de contrôle (SC) et est une surface fermée (fig. 5).

La masse, la chaleur et le travail peuvent traverser la surface de contrôle et la masse et les propriétés physiques peuvent changer avec le temps dans le volume de contrôle.

Soit B grandeur physique (masse, volume, énergie).

Soit b propriété spécifique (la version intensive de B), ($b = B/m$)

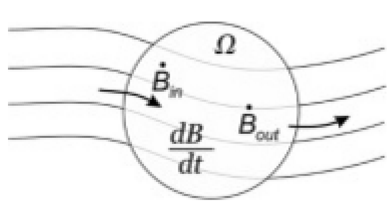


Fig.5 : Volume de contrôle pour un fluide en écoulement

Le débit net de $\dot{\boldsymbol{B}}$ à travers la surface de contrôle (SC) peut s'écrire :

$$\dot{B} = \sum\nolimits_{sc} b.\rho.U.A$$

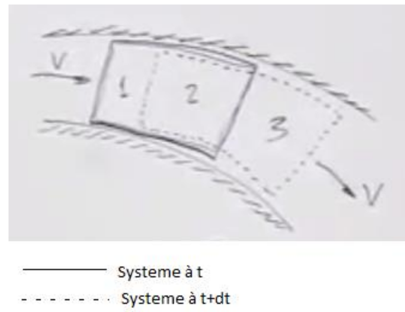
$$\dot{B} = \int_{sc} b.\rho.U.dA$$

Pour obtenir la variation temporelle de B on doit calculer :

$$\dot{B} = \left.\frac{dB}{dt}\right|_{sys} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\Delta t}\right]$$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{sys} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{(B_2 + B_3)_{t+\Delta t} - (B_1 + B_2)_t}{\Delta t}\right]$$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{sys} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{B_{2,t+\Delta t} - B_{2,t}}{\Delta t}\right]_{VC} + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{B_{3,t+\Delta t} - B_{1,t}}{\Delta t}\right]$$



Formulation du Théorème de transport de Reynolds

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{sys} = \left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{VC} + \dot{B}_{out} - \dot{B}_{in}$$

$\dot{B}_{out}$: Quantité de B s'écoulant à travers SC pendant δt.

$\dot{B}_{in}$: Quantité de B entrant par SC pendant δt.

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} b\rho dV + \int_{sc} b.\rho.U.dA \qquad (6)$$

I.6 Equations de bilan

I.6.1 Conservation de la masse (Equation de continuité) :

L'équation de continuité est l'expression d'un principe de conservation fondamental, à savoir celui de la conservation de la masse. C'est une déclaration que la masse fluide est conservée. Pour obtenir cette équation, nous considérons un volume de contrôle cubique à l'intérieur d'un fluide. La conservation de la masse nécessite que le débit net à travers le volume de contrôle soit nul.

Variation de masse dans le volume (dxdydz) = débit sortant-débit entrant

Le principe de conservation de la masse impose

$$\left.\frac{dM}{dt}\right|_{sys} = 0$$

$$dM = \rho dV$$

Théorème de transport des contraintes de Reynolds :

$$\left.\frac{dM}{dt}\right|_{sys} = \left.\frac{\partial M}{\partial t}\right|_{VC} + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = 0 \qquad avec\ dV = dxdydz$$

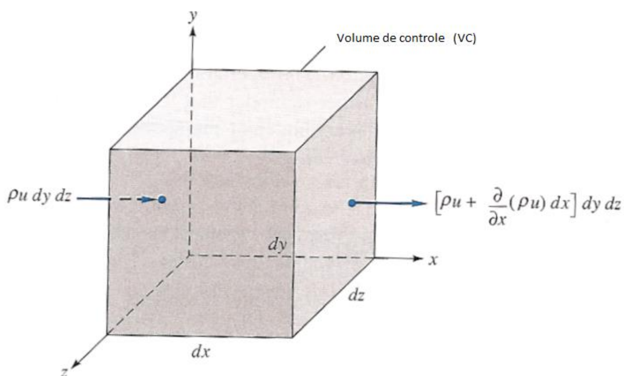
Axe	Masse entrante en dt ($\dot{m}_{in}$)	Masse sortante en dt ($\dot{m}_{out}$)
x	$\rho u\|_x = (\rho u)dydz$	$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydz$
y	$\rho v\|_y = (\rho v)dxdz$	$\left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dxdz$
z	$\rho w\|_z = (\rho w)dxdy$	$\left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz\right) dxdy$

Un développement limité au premier ordre conduit à :

$\rho u|_{x+dx} = \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydz$

$\rho v|_{y+dy} = \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dxdz$

$\rho w|_{z+dz} = \left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz\right) dxdy$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz + \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dxdz + \left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz\right) dxdy - (\rho u)dydz - (\rho v)dxdz - (\rho w)dxdy = 0$$

Avec $dxdydz = dV \neq 0$

On obtient donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad (7)$$

Forme différentielle de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{V} = 0$$

Régime Stationnaire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Fluide Incompressible $(\rho = Cste)$**:**

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \rightarrow \rho \frac{\partial(u)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} + \frac{\partial(w)}{\partial z} = 0$$

I.6.2 Conservation de la quantité de mouvement :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{volume} + \vec{F}_{surface}$$

On considère un petit élément de volume : dV=$\delta x \delta y \delta z$

$$\partial \vec{F}_{ext} = \partial m\vec{a} = \partial m \frac{d\vec{U}}{dt}; \qquad \vec{U} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$$

Les forces élémentaires sur un élément de volume dV et de masse $(\partial m = \rho dV)$

$$\partial F_p + \partial F_g + \partial F_v = \partial ma = \partial m \frac{dU}{dt} = (\rho dV) \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

∂F_g: Force de pesanteurs ou forces gravitationnelles (Force volumique) : $\partial F_g = \rho g dV$

∂F_p: Forces de pressions normales (Force surfacique) ;

∂F_v: Force de contraintes tangentielles (Force surfacique).

$(\partial F_p + \partial F_v)$ sur les trois faces sont les suivantes :

$$\begin{cases} \delta F_{sx} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})\right) dV \\ \delta F_{sy} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{zy})\right) dV \\ \delta F_{sz} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z)\right) dV \end{cases}$$

$$\begin{cases}\rho g_x dV + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})\right)dV = \rho dV\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\\ \rho g_y dV + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{zy})\right)dV = \rho dV\left(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ \rho g_z dV + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z)\right)dV = \rho dV\left(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}\right)\end{cases} \quad (8$$

Après simplification :

$$\begin{cases}\rho g_x + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\\ \rho g_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy})\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ \rho g_z + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z)\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}\right)\end{cases}$$

Utilisant les équations des contraintes (4) et (5) on obtient :

$$\begin{cases}\rho g_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(-P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\\ \rho g_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ \rho g_z + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-P + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}\right)\end{cases}$$

L'équation précédente devient :

$$\begin{cases}\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\\ \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + 2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}\right)\end{cases}$$

Après regroupement et réarrangement :

$$\begin{cases} \rho g_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) \\ \rho g_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w + \dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \\ \rho g_z - \dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w + \dfrac{\partial w}{\partial t}\right) \end{cases}$$

L’équation finale du mouvement dans les trois directions est donnée par :

$$\begin{cases} \rho g_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) \\ \rho g_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w + \dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \\ \rho g_z - \dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w + \dfrac{\partial w}{\partial t}\right) \end{cases} \quad (9)$$

D’après l’équation de continuité (loi de conservation de la masse): $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$\begin{cases} \rho g_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) \\ \rho g_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w + \dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \\ \rho g_z - \dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w + \dfrac{\partial w}{\partial t}\right) \end{cases}$$

Dans le cas d’un fluide parfait (**non visqueux**) : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

$$\begin{cases} \rho g_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} = \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) \\ \rho g_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w + \dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \\ \rho g_z - \dfrac{\partial P}{\partial z} = \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w + \dfrac{\partial w}{\partial t}\right) \end{cases}$$

Les équations ci-dessus sont appelées **Equations d’Euler**.

I.6.3 Equation de conservation d'énergie

L’équation de conservation d'énergie est la première loi de la thermodynamique qui stipule que la somme du travail et de la chaleur ajoutée au système entraînera l'augmentation de l'énergie totale du système :

$$dE_t = dQ + dW$$

Où dQ est la chaleur ajoutée au système, dW est le travail effectué sur le système et dE_t est l'incrément de l'énergie totale du système.

Considérons un élément de fluide, dans lequel nous appliquerons le principe de conservation de l'énergie, c'est-à-dire la 1ère loi de la thermodynamique :

a) **Taux de variation de l'énergie à l'intérieur de l'élément fluide :**

$$e = \frac{E}{M}$$

Tel que,

E : Energie interne ;
e : énergie spécifique (énergie cinétique) ;
M : masse.
Énergie cinétique spécifique :

$$e_k = \frac{E_k}{M} = \frac{\frac{1}{2}MU^2}{M} = \frac{U^2}{2},$$

E_k : énergie cinétique

L'énergie spécifique totale (par unité de masse de fluide):

$$e_t = e + e_k = e + \frac{U^2}{2}$$

L'énergie totale pour l'élément de volume :

$$E_t = e_t . m = \left(e + \frac{U^2}{2}\right)\rho dV = \left(e + \frac{U^2}{2}\right)\rho dxdydz$$

$$\frac{dE_t}{dt} = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{U^2}{2}\right)dxdydz$$

$$\frac{DE_t}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{u_i u_i}{2}\right)dxdydz \qquad (12)$$

b) **Flux de chaleur dans l'élément de fluie:**

Le flux net de chaleur dans l'élément fluide = Flux de chaleur volumétrique + transfert de chaleur à travers la surface dû aux gradients de température

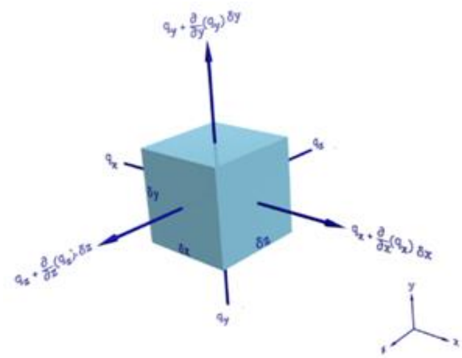
- Flux de chaleur volumétrique de l'élément fluide

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{M} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)$$

$$\dot{Q} = \dot{q}dm = \dot{q}(\rho dxdydz)$$

- Transfert de chaleur à travers la surface

Transfert thermique total par unité de temps dû à la conduction thermique à travers l'élément fluide (somme pour les 3 directions x, y et z) :



$$
\begin{aligned}
&\left(\dot{q}_x dydz + \dot{q}_y dxdz + \dot{q}_z dxdy\right) \\
&\qquad - \left(\left(\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx\right) dydz \right. \\
&\qquad + \left(\dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy\right) dxdz \\
&\qquad \left. + \left(\dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz\right) dxdy \right) \\
&= -\left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}\right) dxdydz = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_j} dxdydz
\end{aligned}
$$

$$
Flux\ de\ chaleur\ net\ dans\ l'\text{élément}\ fluide = \left[\rho \dot{q}_j - \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}\right)\right] dxdydz
$$

À partir de la loi de Fourier, on peut exprimer le taux de flux thermique comme suit :

$$
\dot{q}_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \dot{q}_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad \dot{q}_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}
$$

$$
\dot{Q} = \left[\rho \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)\right] dV \tag{13}
$$

c) **Taux de travail effectué sur un élément fluide en mouvement $\dot{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{b}}$**

Taux de travail effectué par la force de volume, F_b, $(\dot{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{b}})$:

$$
\dot{W}_b = \vec{U}.\vec{F}_b = m\vec{g}\vec{U} = \vec{g}.\vec{U}\rho dxdydz = \left(ug_x + vg_y + wg_z\right)\rho dxdydz
$$

$$
\dot{W}_b = \rho u_i g_i dV
$$

Taux de travail effectué par les forces de surface (force de pression et forces de cisaillement) $(\dot{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{s}})$:

$$
\begin{aligned}
\dot{W}_s = -\Bigg[&\left(\frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(vP)}{\partial y} + \frac{\partial(wP)}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \\
&+ w\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)\Bigg] dxdydz
\end{aligned}
$$

$$
\dot{W}_s = u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV
$$

$$
\dot{W} = \dot{W}_b + \dot{W}_s = \left[\rho u_i g_i + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right] dV
$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{u_i u_i}{2}\right) = \rho \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \rho u_i g_i + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{14}$$

L'équation ci-dessus est appelées l'équation d'énergie totale.

I.7 Les équations de Navier Stokes :

Les équations de Navier-Stokes, en mécanique des fluides, sont des équations différentielles partielles qui décrivent l'écoulement des fluides **incompressibles**. C'est une généralisation de l'équation conçue par le mathématicien suisse Leonhard Euler au 18ème siècle pour décrire l'écoulement des fluides incompressibles et sans frottement.

On a :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \rho g - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

D'après l'équation de continuité (loi de conservation de la masse) : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Les équations de mouvement dans les directions, x, y et z, s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}\right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases} \tag{15}$$

Les équations ci-dessus sont appelées les équations de **Navier Stokes** pour les fluides visqueux incompressibles.

Forme vectorielle des équations de Navier Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U}\nabla\vec{U}\right) = \rho\vec{g} + \nabla P + \mu\nabla^2\vec{U}$$

$\vec{U}\nabla\vec{U}$: Terme convectif.

$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$: Terme instationnaire.

$\rho\vec{g}$: Force de volume de pesanteurs ;

∇P : Force de surface de pression ;

$\mu\nabla^2\vec{U}$: Force de viscosité (force visqueuses).

I.8 Elément de rhéologie

I.8.1 Les déformations

Un fluide étant un milieu continu déformable, il est d'abord nécessaire d'exprimer les déformations subies au cours du mouvement, en tenant compte de la propriété de continuité.

Le tenseur gradient du champ des vitesses $grad\vec{V}$s'écrit :

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{16}$$

Pour bien séparer les différentes composantes du mouvement relatif des deux particules, il est commode de décomposer le tenseur $grad\vec{V}$en une somme d'un tenseur symétrique $(\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji})$et d'un tenseur antisymétrique$(\omega_{ij} = -\omega_{ji}\ et\ \omega_{ii} = 0)$, en remarquant que :

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) \tag{17}$$

On pose :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

Avec i, j=1, 2, 3 (ou x, y, z)

I.8.2 Taux de dilatation volumique

Après les déformations linéiques et angulaires, envisageons maintenant les déformations volumiques du fluide.

Pendant un petit intervalle de temps ***dt***, le volume ***V*** varie de ***dV***

$$\frac{dV}{dt} = \int_D div\,\vec{V}\ \ dv \tag{18}$$

dv: Élément de volume

I.8.3 Les contraintes

Le problème est d'évaluer les efforts exercés sur la frontière ***S*** du domaine ***D***.

On définit le tenseur des contraintes T au point M par la relation :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{19}$$

Si ***ds*** est perpendiculaire à l'axe Ox (figure 6)

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix}$$

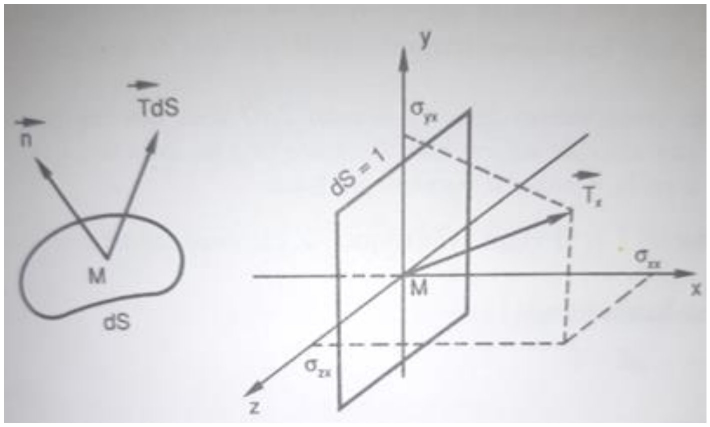


Fig. 6 : Tension sur un élément de surface ⊥ à la direction x

I.8.4 Fluides Newtoniens et fluides non Newtoniens :

Tous les fluides peuvent être décomposés en deux types de base, newtonienne et non newtonienne.

a) Fluides Newtoniens

La viscosité d'un fluide newtonien reste constante, quelle que soit la quantité de cisaillement appliquée pour une température constante. Ces fluides ont une relation linéaire entre la viscosité et la contrainte de cisaillement.

Exemples : L'eau, Huile minérale, l'essence, l'alcool…

Contrainte de cisaillement = viscosité × taux de cisaillement

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} * \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dy}}$$

b) Fluides non Newtoniens

Les fluides non newtoniens sont l'opposé des fluides newtoniens. Lorsque le cisaillement est appliqué à des fluides non newtoniens, la viscosité du fluide change. Le comportement du fluide peut être décrit de quatre manières :

- **Dilatant (Rhéo épaississant):** La viscosité du fluide augmente lorsque le cisaillement est appliqué. Par exemple : sable mouillé, Maïzena et eau,
- **Pseudo-plastique (Rhéo fluidifiant) :** Le pseudo plastique est l'opposé du dilatant ; plus le cisaillement est appliqué, il devient moins visqueux. Par exemple : Ketchup.

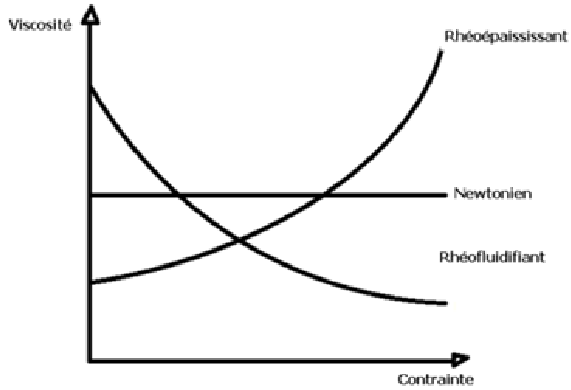


Fig. 7 : Courbes théoriques de la viscosité de plusieurs types de fluides en fonction de la contrainte de cisaillement

- **Thixotrope :** Les fluides aux propriétés thixotropes diminuent en viscosité lors de l'application du cisaillement. Il s'agit également d'une propriété dépendante du temps. Par exemple : yaourt, au fur et à mesure qu'on le remue il devient de plus en plus liquide, il s'agit donc d'un liquide thixotrope.
- **Anti-Thixotropes :** les fluides Anti thixotropes (aussi appelés fluides Rhéo pèxes) sont des fluides qui deviennent de plus en plus solides au fur et à mesure qu'on leur applique une contrainte de cisaillement. Par exemple :la crème fraîche devient de plus en plus épaisse quand on la remue …

Référence :

M. Frank White, Fluid Mechanics, 7eme edition, University of Rhode Island, 2009.

Comolet, Mécanique expérimentale des fluides

R. von Mises K. O. Friedrichs, Fluid Dynamics, 1971.

Viscous Fluid Flow, Chapter 5, Source : Ioannis Philoponos, Physics, 215 a22, (490–570 A.D.)

L. Boukhris, Mecanique des fluides II, polycopié