

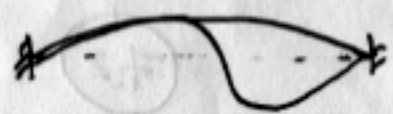
Chap 7.

Ondes Progressives

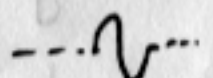
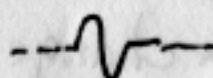
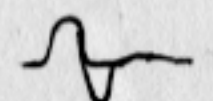
7.1. Introduction : ondes sont partout : onde sonore, onde d'eau, EM,...

• Nous distinguons entre les "ondes progressive" et les "ondes stationnaires"

↳ Ce chapitre
↳ Chapitre prochain

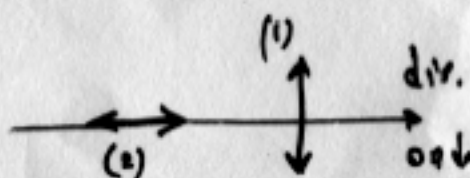


↳ Ce chapitre



• Les ondes progressives

- transversales (1)
- longitudinales (2)



(1) La variation de la grandeur physique (e.g. déplacement) se produit dans la dir. perpendiculaire à la dir. de propagation de l'onde

(2) le long de la dir. de propagation de l'onde

~ Les deux types des ondes sont des solutions de l'équation

d'onde", l'un des equs. plus fondamentales en physique.

~ Nous allons traiter les "ondes mécaniques" qui se propagent à travers certains matériaux ou "milieu". [e.g. ondes EM à travers vide]

• Description physique

~ Lorsque on observe une onde, il est clair que quelque chose, que on peut appelé une "perturbation", se déplace ou se propage d'une région d'un milieu à une autre, avec une vitesse définie v . Cependant, le milieu ne propage pas avec l'onde. [e.g. tige de métal solide et les ondes sonores]

milieu

ondes

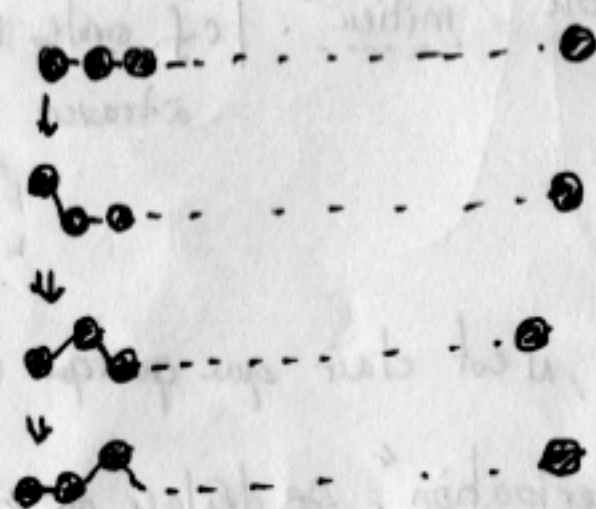
En fait, les particules du milieu se déplacent autour de leurs positions d'équilibre, auquel ils sont liés. (voir vibrations transversales).

~ On a aussi vu qu'un oscillateur peut transférer de tout de son énergie à un autre oscillateur à lequel il est couplé dans des conditions appropriées.

Alors :

une onde progressive à travers un milieu

≈ une ligne d'oscillateurs couplés [comme les atomes d'un 2D Crystal].



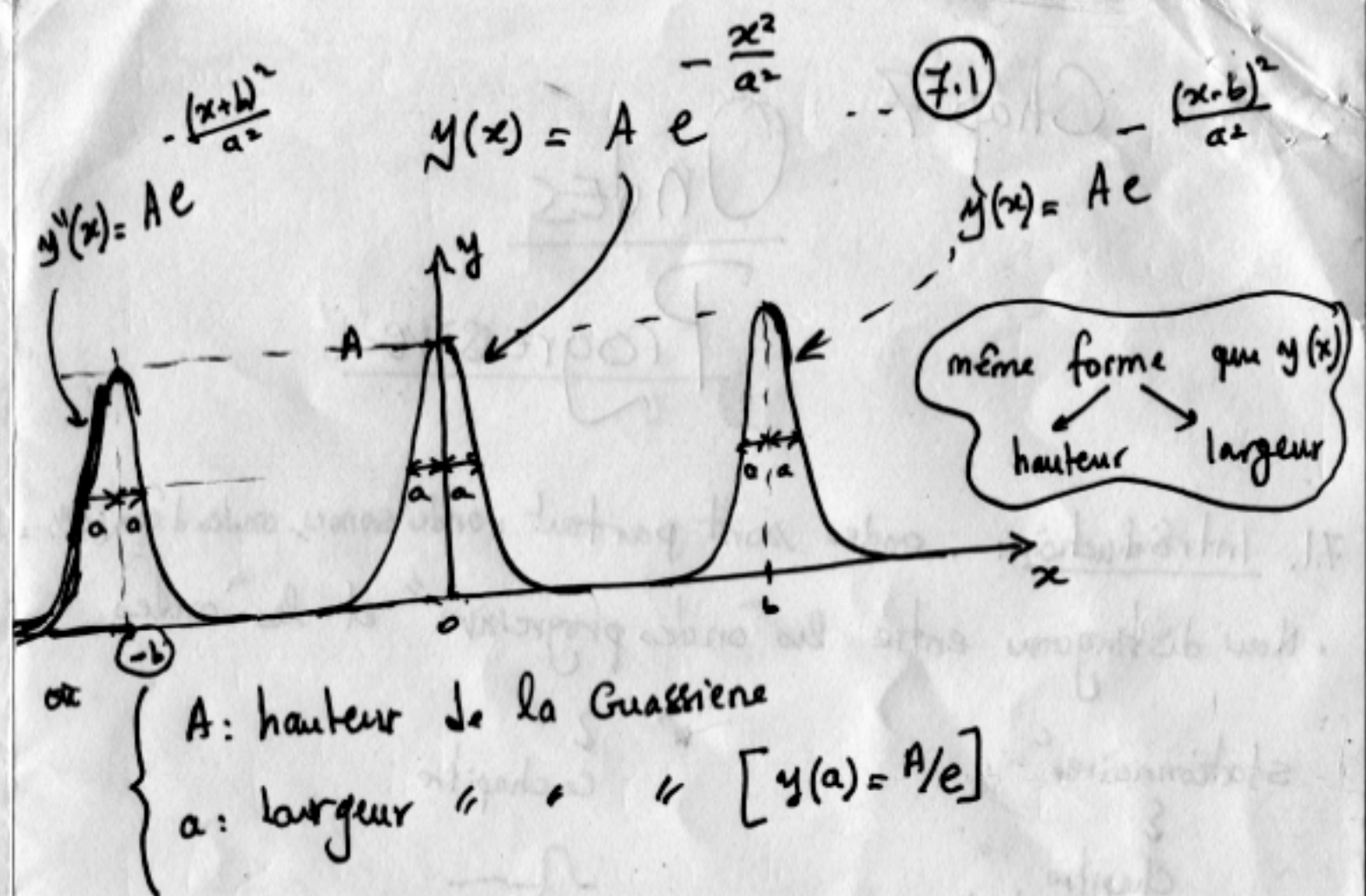
Énergie doit être mise dans le système pour provoquer la perturbation initiale, et elle est cette énergie qui est transmise par l'onde.

e.g. l'énergie solaire déposée sur la surface de la terre est environ de $1 \text{ kJ/m}^2/\text{s}$.

7.2. Ondes progressives

Si on prend la fin d'une longue corde et déplace une des ses extrémités d'haut en bas rapidement on lance une impulsion d'onde le long de la corde, qui garde sa forme et se déplace avec une vitesse définie.

→ utiliser une "fonc. Gaussienne" pour modéliser cette impulsion d'onde progressive.



Suppose que on change le variable:

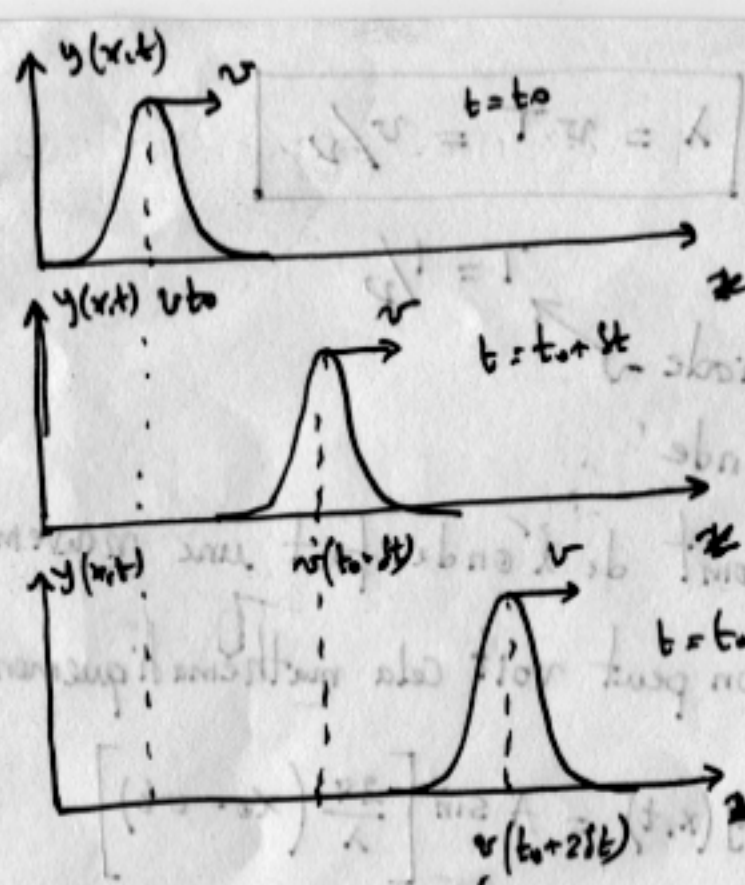
Equation (7.2): $b = vt$

Labels: v (distance/temp), t (temps)

alors,

Equation (7.3): $y(x,t) = A e^{-\frac{(x-vt)^2}{a^2}}$

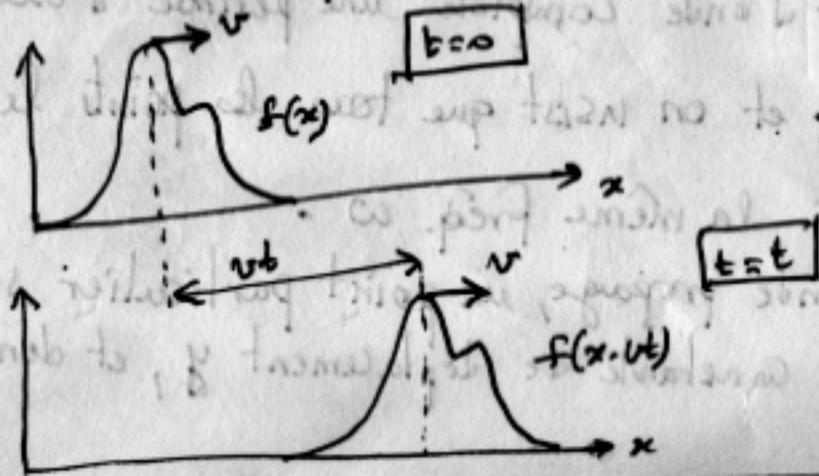
Equ (7.3) décrit une Gaussienne qui se déplace dans la dir. de "positif -x" à un rythme constant [tout comme l'impulsion d'onde sur la corde]



~ Généralisation: Lorsqu'une onde se propage dans la direction de x -positif, la dépendance de la forme de la corde sur x et t doit être de forme générale:

$$f(x-vt) \quad (7.4)$$

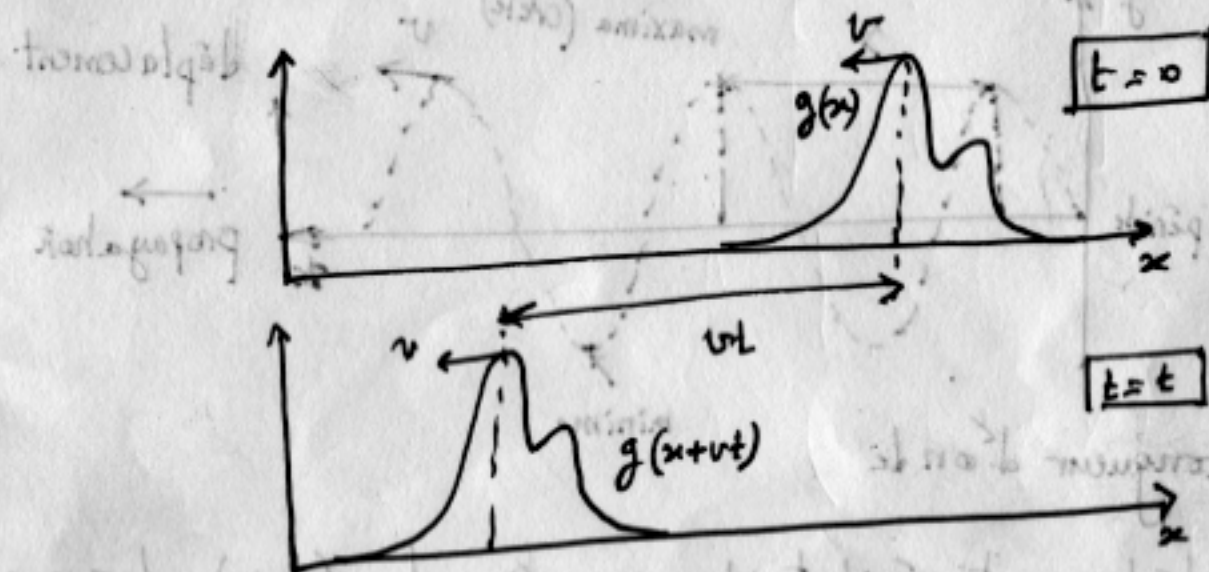
fonc. quelconque.



~ La caractéristique importante de propagation des ondes est: que l'onde conserve sa forme quand elle se propage.

• De même, une onde progressive qui se propage dans la dir. de x -négatif peut être modéliser par une fonc. de la forme générale:

$$g(x+vt) \quad (7.5)$$

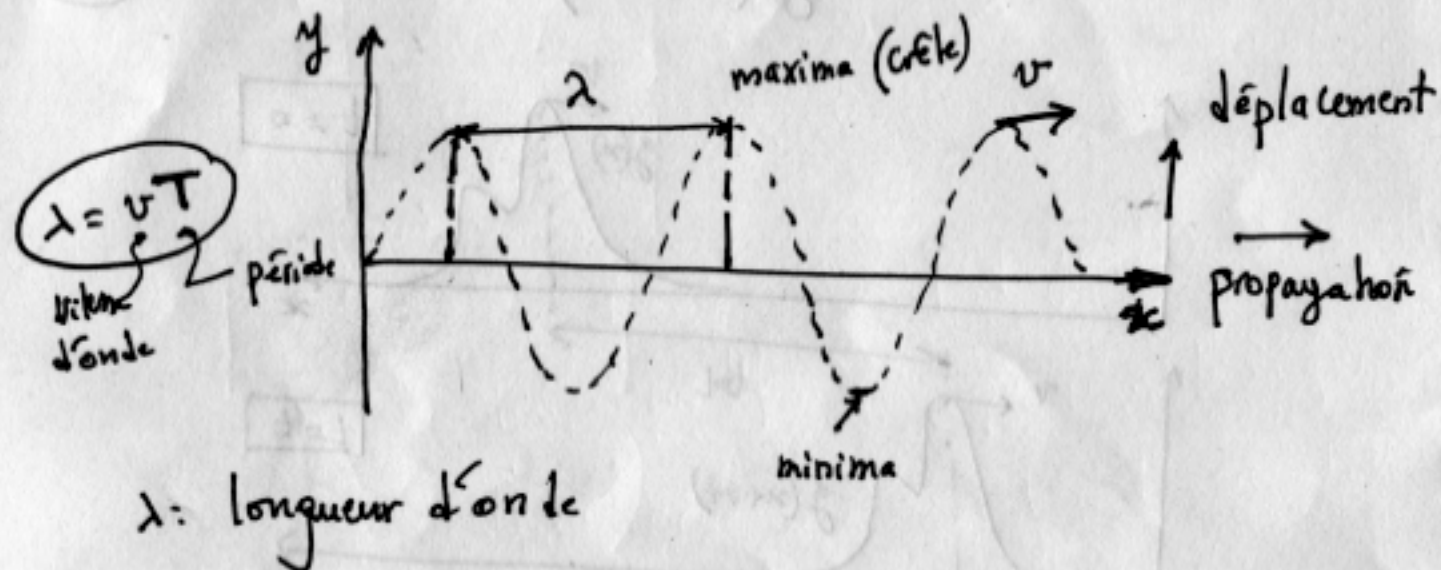


Conclusion: La forme générale d'une ~~onde~~ quelconque d'une onde de la corde peut être écrit comme une "superposition":

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \quad (7.6)$$

7.3. Ondes progressive Sinusoïdale

- importantes: (i) on les trouve dans plusieurs situations physique
ex. ondes EM
- (ii) Sommes des ondes plus compliquées peuvent être décomposées ~~en~~ ^{comme} des combinaisons des ondes sinusoïdale



Les déplacements résident dans un même plan (x-y), alors que on peut décrire les ondes comme "ondes de polarisation linéaire" dans ce plan.

$$y(x,t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \quad (7.7)$$

↑
amplitude

La fréquence ν : est le nombre de fois par unité de temps qu'une crête d'onde passe par un point fixe ($x = x_0$)

$$\lambda = vT = v/\nu$$

(7.8)

periode $\checkmark$
d'onde $T = 1/\nu$

Remarque: Chaque point de l'onde fait un mouvement harmonique simple. on peut voir cela mathématiquement comme suit,

prend x fixe
 $x = x_0$

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x_0 - vt) \right] \\ &= A \sin \left[-\frac{2\pi}{\lambda} (vt - x_0) \right] \\ &= -A \sin \left[\frac{2\pi v}{\lambda} t - \frac{2\pi x_0}{\lambda} \right] \\ &\stackrel{\text{c.f.}}{=} -A \sin \left(\omega t + \phi \right) \quad \text{"OHS"} \end{aligned}$$

↑
phase

fréquence angulaire

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = 2\pi \nu \quad (7.9)$$

Chaque point d'onde complète une période d'oscill. dans une période T , et on insiste que tous les points le long d'onde oscillent à la même fréq. ω .

Quand l'onde propage, un point particulier sur elle maintient une valeur constante de déplacement y , et donc de $(x - vt)$

$$y = \text{const} \rightarrow (x - vt) = \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = v \quad \text{vitesse d'onde}$$

On peut aussi écrire (7.7) comme :

$$y(x,t) = A \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi \nu}{\lambda} t \right) \\ = A \sin(kx - \omega t) \quad (7.10)$$

où, $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$: nombre d'onde

et aussi :

$$\nu = \lambda \nu = \frac{\lambda \omega}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi/\lambda} = \frac{\omega}{k}$$

$$\nu = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu$$

(7.11)

On peut également utiliser la fonction cosinus en équ. (7.10),

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (7.12)$$

ou fonc. exponentiel,

$$y(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (7.13)$$

NB. quantité physique est représentée par la partie réelle.

7.4. L'équation d'onde

On a vu que la forme générale d'un mouvement d'une onde est donnée par (7.6)

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

soit $u = x - vt$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} ; \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{d^2 f}{du^2} ; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

puis :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \cdot \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = v^2 \frac{d^2 f}{du^2} ; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (7.14a)$$

et de même,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \quad (7.14b)$$

~ s'ajoute (7.14a) + (7.14b) pour obtenir,

Exercice :

Montrer les résultats

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.15)$$

Ce résultat est fondamental $\Rightarrow$ C'est l'équation d'onde à 1D (ED)

La soln. gén. de l'ED est de la forme:

$$y = f(x-vt) + g(x+vt) \quad (7.16)$$

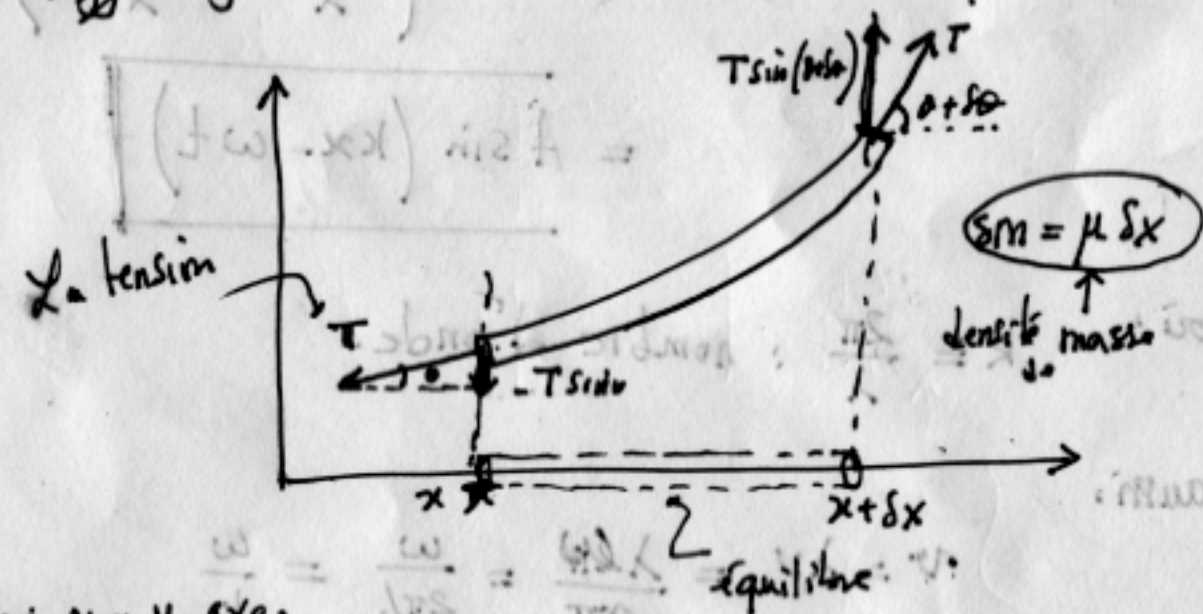
Remarque: L'équ. d'onde et sa soln. appliquent à toutes les ondes qui se propagent à 1D. e.g: ondes sonores dans un tube long avec $y \rightarrow P$ pression de l'air.

Exercice. Montrer que l'onde sinusoïdale $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$ est une soln. de l'équ. d'onde.

7.5. L'équation d'une Corde Vibrante

On dérive l'équ. de mouv. de vibrations transversales sur une corde tendue.

Considère une segment courte d'une corde et les forces qui agissent sur elle quand l'onde passe par.



Projection sur y-axe:

$$\sum F_y = \delta m a_y$$

$$T \sin(\theta + \delta\theta) - T \sin\theta = \delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.17)$$

on a $\sin\theta \approx \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$; pente à x

$\sin(\theta + \delta\theta) \approx \theta + \delta\theta$

$\approx \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta x$

$\approx \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta x$

$\approx \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta x$

petit déplacement y

(7.18b)

alors:

$$T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta x - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = \mu \delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta x = \mu \delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \dots \quad (7.19)$$

c.f. (7.15) on a:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

vitesse d'onde le long de la corde tendue

dépend de:

μ : masse/unité de longueur
 T : tension dans la corde.

(i) projection sur axe-x:

$$\sum F_x = \sum m a_x$$

$$T \cos(\theta + \delta\theta) - T \cos\theta = \sum m \cdot a_x$$

Mais:

$$\cos\theta \sim 1$$

$$\cos(\theta + \delta\theta) \sim 1$$

pour des valeurs petites de θ

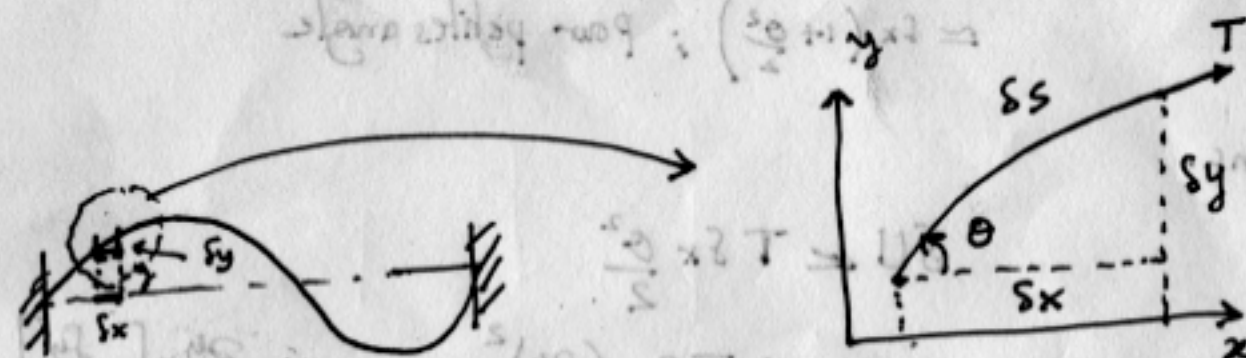
$\Rightarrow$

$$a_x = 0$$

7.6. L'énergie dans une onde

• Considère l'énergie qui est contenue dans une onde.

~ " le cas des ondes transversales dans une corde tendue.
 & imagine la corde à être divisée en courts segments
 de longueur δx & ~~de~~ de masse $\mu \delta x$, ou μ : masse/unité de longueur



~ Quand l'onde se propage le long de la corde ces segments vont couiller dans la dir. transversale:

$$\delta T \equiv \delta K = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu \delta x \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad ; y = y(x, t) \quad (7.21)$$

• Aussi les segments seront légèrement tendus quand ils ne sont pas à leur position d'équilibre. Puisque la corde est tendue (= sous tension T) puis les segments devraient d'énergie potentielle,

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

et pour un court segment δx ,

$$\delta U = \vec{F} \cdot \vec{\delta \ell}$$

Supposons T est approx. constant

$$= T(\delta s - \delta x)$$

où:

$$\delta s = \frac{\delta x}{\cos \theta} \approx \frac{\delta x}{1 - \frac{\theta^2}{2}}$$

$$\approx \delta x (1 - \frac{\theta^2}{2})^{-1}$$

$$\approx \delta x (1 + \frac{\theta^2}{2}); \text{ pour petites angles}$$

Donc,

$$\delta U \approx T \delta x \frac{\theta^2}{2}$$

$$\approx \frac{1}{2} T \delta x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2; \quad \theta \approx \frac{\partial y}{\partial x} \left[\approx \frac{\delta y}{\delta x} \right]$$

(7.22)

Alors, l'énergie totale dans une partie $a \leq x \leq b$ de la corde à l'instant t est,

$$E = \int_a^b (\delta U + \delta T) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \mu \int_a^b \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

(7.23)

$$\text{ou } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

L'équ. (7.23) est un résultat générale applicable à toute onde transversale sur une corde.

Exemple: une onde sinusoïdale

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t), \quad [a,b] = \lambda$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \mu \delta x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu \delta x \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} T \delta x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} T \delta x \cdot k^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

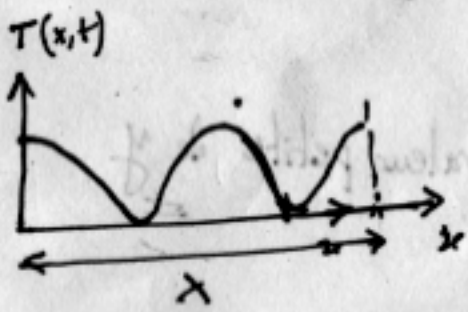
$$\downarrow \quad \omega = vk$$

$$= \frac{1}{2} \mu \delta x \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$= T(t)$$

Pour une partie $\delta x = \lambda$:

$$T_{\text{total}} = \int_a^b T(t) dx$$



$$= \int_0^\lambda \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) dx$$

$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Exercice
Démontrer
cet résultat

$$T_{\text{kin}} = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

$$= U_{\text{total}}$$

(7.24)

$$\Rightarrow E_T = T_{\text{kin}} + U_{\text{total}}$$

$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

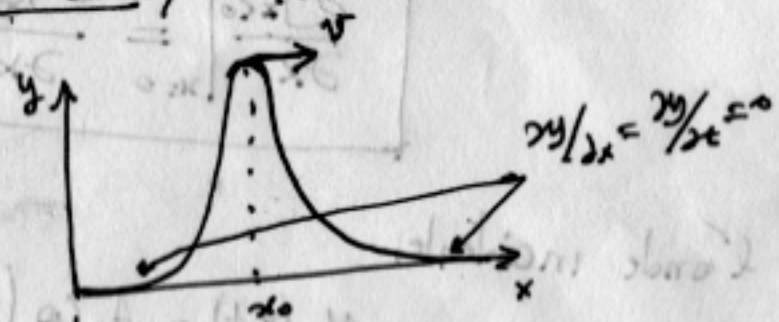
7.7. Le Transport d'énergie par une onde

Equ. (7.23):

$$E = \frac{1}{2} \mu \int_a^b \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

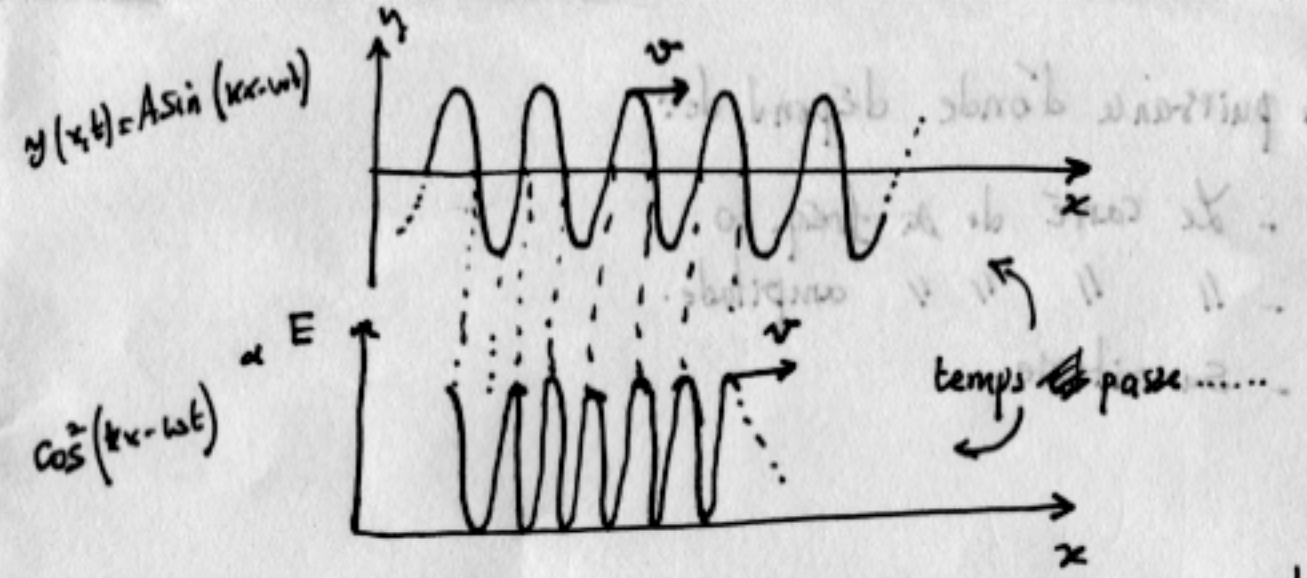
nous indique que l'énergie est associée à un dérivé du déplacement par rapport au temps, $\partial y / \partial t$, ou position, $\partial y / \partial x$.

$\Rightarrow$ Pour une impulsion d'onde, tel que Gaussienne



toute l'énergie doit être contenue dans l'impulsion et cette énergie est transportée à la vitesse de l'impulsion v .

$\Rightarrow$ Pour une onde sinusoïdale,



~ La figure illustre comment la distrib. d'énergie est portée avec l'onde à la vitesse v .

L'énergie totale dans une longueur d'onde λ est:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

$\Rightarrow E_{\text{tot}}$ dans une longueur quelconque d est:

$$\lambda \rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

$$d \rightarrow E'_{\text{tot}} = \frac{d}{\lambda} E_{\text{tot}} \quad (7.25)$$

$\Rightarrow E'_{\text{tot}}$ pour d la distance propagée par l'onde dans une unité de temps.

$$d = v \cdot 1 = v \quad [t=1s]$$

est donné par:

$$E = \frac{v}{\lambda} E_{\text{tot}}$$

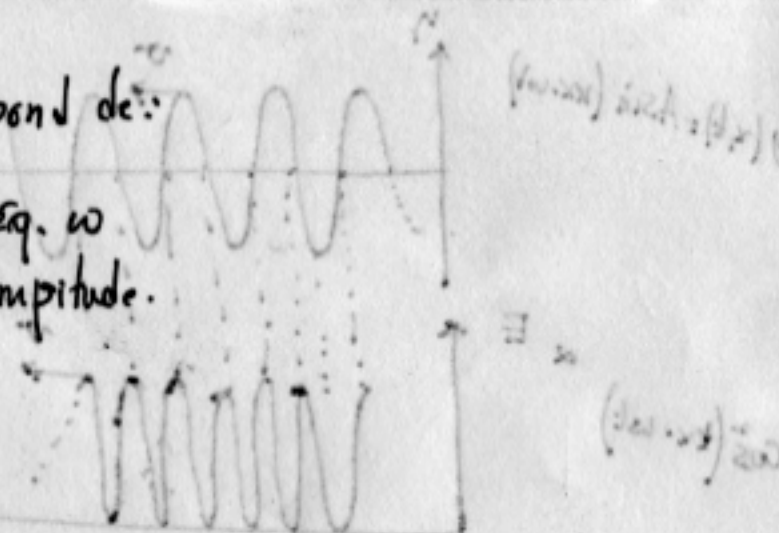
$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v = \frac{E}{\text{unit de temp}} = P$$

puissance d'onde

(7.26)

La puissance d'onde dépend de:

- Le carré de la freq. ω
- // // // amplitude.
- Sa vitesse.



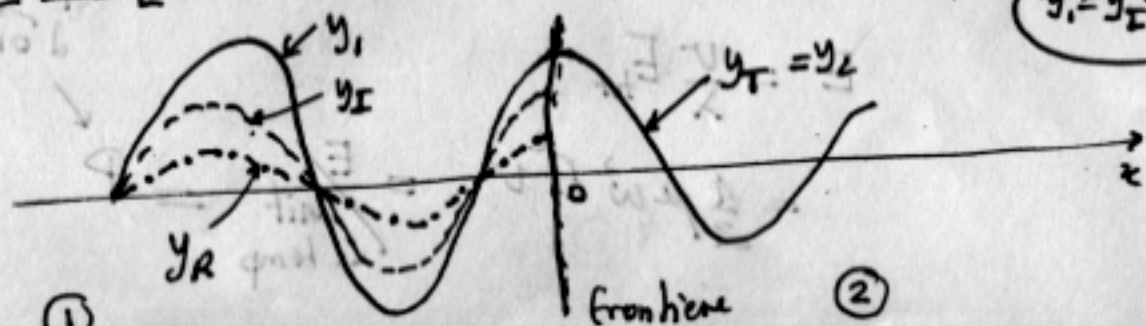
7.2. Ondes à discontinuités

Quand une onde rencontre une discontinuité à la frontière entre deux milieux différents, il y aura:

- une onde incidente
- // // transmise
- // // réfléchie

Nous allons examiner comment les amps. et phases relatives de ces trois ondes peuvent être déterminées.

Considérer 2 longs cordes reliées à $x=0$ avec une tension constante le long des cordes, et avec densité de masse linéaire μ différente [Source de discontinuité, $v = \sqrt{T/\mu}$].



$$y = y_I + y_R$$

Les conditions suivantes existent à la frontière:

- Les déplacements des cordes doit être le même pour $x=0$ pour tous les temps

$$y(x=0, t) = y(x=0, t)$$

$$\Rightarrow \omega_{x<0} = \omega_{x>0} = \omega$$

7.28a

NB: ω is the same as discontinuity is in space! what if in time? $\Rightarrow k$ is same ω diff. ?!

$$\text{mais } v_{x<0} \neq v_{x>0}$$

$$\text{et } \lambda_{x<0} \neq \lambda_{x>0}$$

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}$$

- Les pentes des cordes de chaque côté (milieu) doit être le même à $x=0$ pour tous les temps.

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0}$$

7.28b

Soit l'onde incidente,

$$y_I(x, t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega t) \quad (a)$$

Puis, l'onde transmise:

$$y_T(x, t) = A_2 \cos(k_2 x - \omega t) \quad (b)$$

L'onde réfléchie:

$$y_R(x, t) = B_1 \cos(k_1 x + \omega t) \quad (c)$$

7.29

→ l'onde résultante dans la cote gauche est,

$$y_1 = y_I + y_R$$

(7.30a)

$$y_2 = y_T$$

(7.30b)

• Appliquer les conditions à la discontinuité:

$$(i) \quad y_1(0, t) = y_2(0, t)$$

$$\Rightarrow A_1 \cos(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) = A_2 \cos(\omega t) \quad [m]$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 + B_1 = A_2} \quad (7.31a)$$

$$(ii) \quad \left. \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|_{x=0}$$

[choisi $t = \pi/\omega$]

$$\Rightarrow \boxed{k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2} \quad (7.32a)$$

→ Donc le rapport:

$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} \equiv T_{12} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}}$$

est le coefficient de transmission d'amp.

et le rapport:

$$\boxed{\frac{B_1}{A_1} \equiv R_{12} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}}$$

est le coefficient de réflexion d'amp.

Remarque: $\rightarrow T_{12} > 0$ toujours $\in [0, 2]$ en-phase

$\rightarrow \begin{cases} R_{12} > 0 & \text{si } k_1 > k_2 \end{cases}$ en-phase $\in [-1, 1]$

$\begin{cases} R_{12} < 0 & \text{si } k_1 < k_2 \end{cases}$ opp-phase

(7.32)

$$\rightarrow \boxed{T_{12} = 1 + R_{12}}$$

• Utilisant le fait que,

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \sqrt{\frac{\mu}{T}} \omega}$$

; T & ω sont identiques dans les 2 milieux

on trouve que:

$$T_{12} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$= \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$$

(7.33)

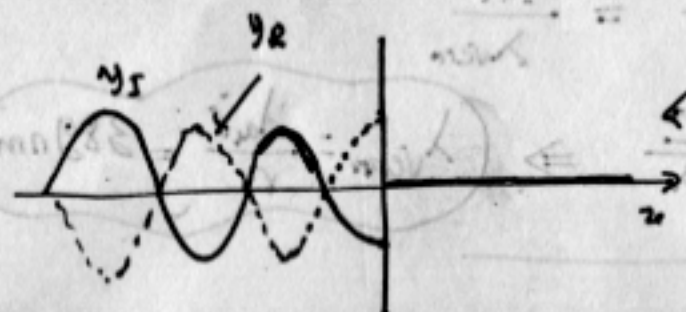
$$R_{12} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$= \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$$

Noté:

$$\text{Si } \mu_2 \rightarrow \infty: \begin{cases} T_{12} \rightarrow 0 \\ R_{12} \rightarrow -1 \end{cases}$$

aucune transmission
l'onde est totalement réfléchi!



Exemple. Lumière de $\lambda = 584 \text{ nm}$ dans l'air est incident sur un bloc de verre d'indice de réfraction $n = 1.5$.

Déterminer:

- vitesse
- fréquence
- longueur d'onde

de la lumière à l'intérieur du bloc.

Solution.

(a) On rappelle que:

$$n = \frac{v_{\text{air}}}{v_{\text{verre}}}$$

$$\Rightarrow v_{\text{verre}} = \frac{v_{\text{air}}}{n} = \frac{c}{n} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(b) Fréq. d'onde à l'int. de verre = fréq. d'onde à l'ext. [transmise]

Condition au bord.

$$\omega_{\text{verre}} = \omega_{\text{air}} = v k = \frac{v 2\pi}{\lambda} = 2\pi v$$

$$\Rightarrow \frac{v}{\lambda_{\text{verre}}} = \frac{c}{\lambda_{\text{air}}} = \frac{2 \times 10^8}{584 \times 10^{-9}} = 5.14 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

(c) On a:

$$v_{\text{verre}} = \frac{v_{\text{verre}}}{\lambda_{\text{verre}}} = \frac{c}{\lambda_{\text{verre}}}$$

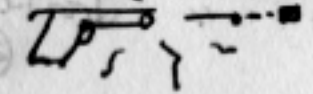
$$= \frac{v_{\text{air}}}{\lambda_{\text{air}}} = \frac{c}{\lambda_{\text{air}}} \Rightarrow \lambda_{\text{verre}} = \frac{\lambda_{\text{air}}}{n} = 389 \text{ nm}$$

7.9. Les ondes dans 2 et 3 dimensions

• e.g. 2D: ondulation sur un étang [water ripples]

3D: onde produite par un

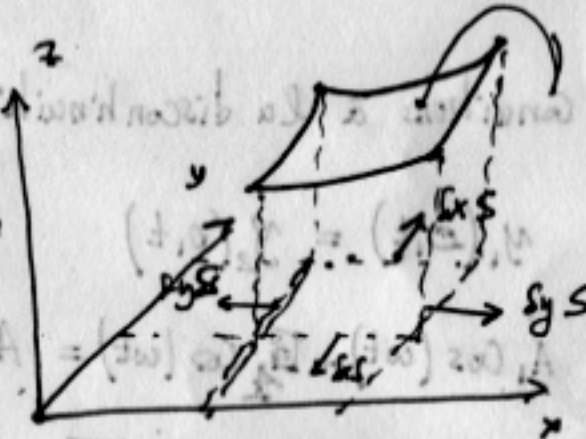
coup de fusil



• Considérer des ondes sur une membrane tendue (analogue d'une corde tendue)

σ : masse densité surfacique

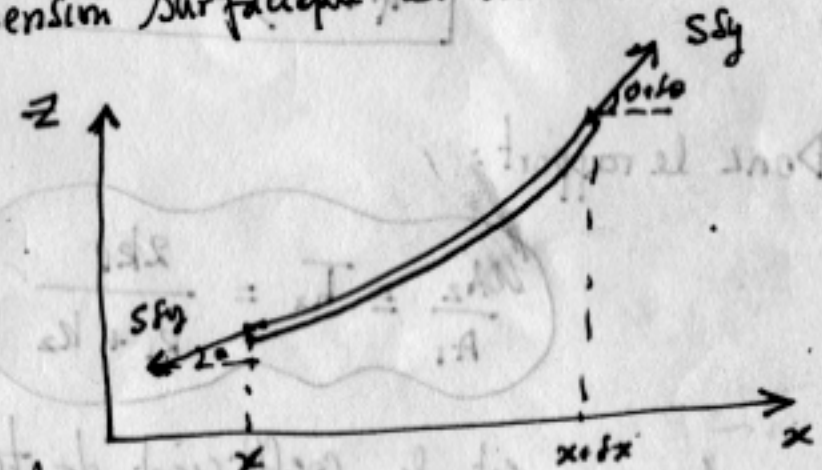
S : tension surfacique [N/m]



élément d'une membrane

À l'équilibre la membrane est dans le plan x-y

• Supposons que: (i) l'élément de la membrane se déplace seulement dans la dir. transverselle [pour de petits déplacements]
(ii) Tension surfacique est constante



on obtient la équ. d'onde

à 2D

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$v^2 = \frac{S}{\sigma}$$

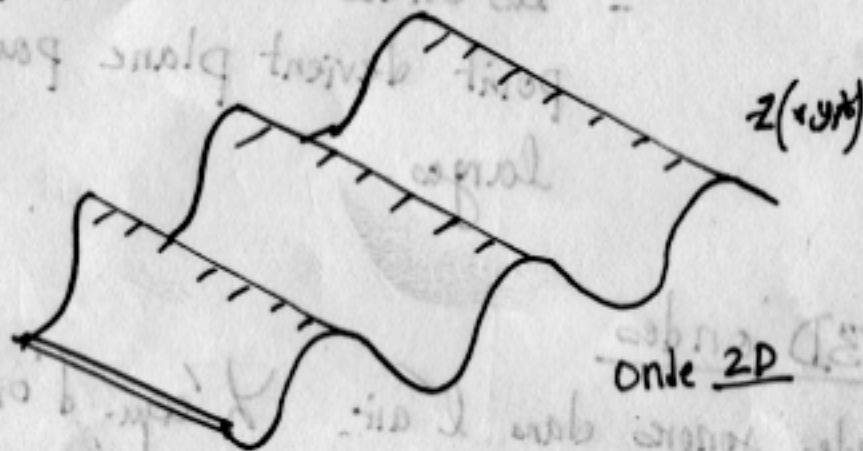
Ex: Pour une onde sinusoidale à 2D, la soln. d'équ. d'onde est donnée par,

$$z(x,y,t) = A \cos(k_1 x + k_2 y - \omega t) \quad (7.35)$$

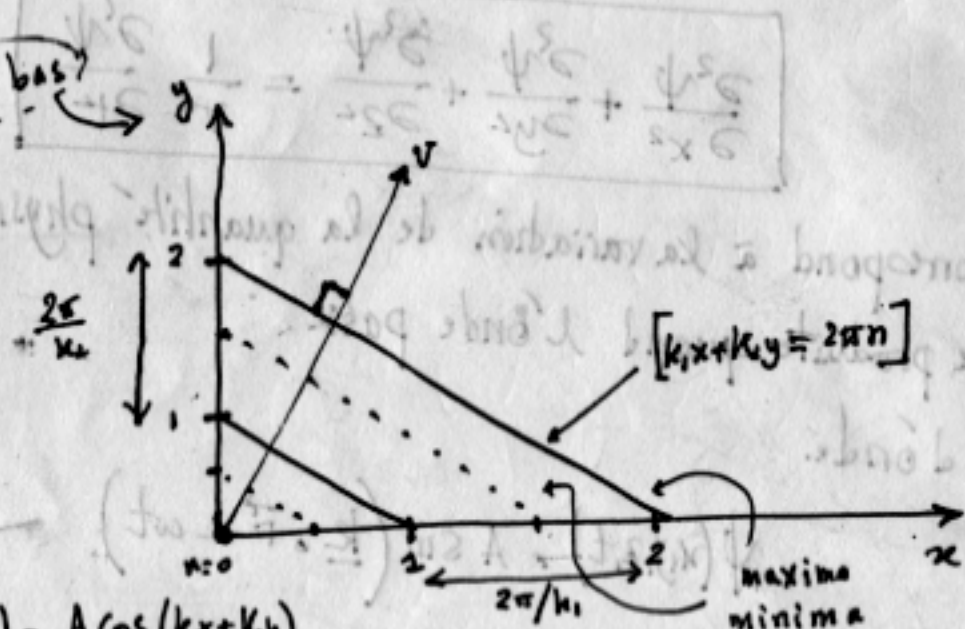
Subst. dans (7.34) Equ. d'onde:

$$k_1^2 + k_2^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad ; \quad k_1 = k_x, k_2 = k_y \quad (7.36)$$

et $\vec{k} = (k_1, k_2)$ est le vecteur d'onde à 2D.



vu. haut en bas
 $z \perp (x,y)$



$$(i) z(x,y,0) = A \cos(k_1 x + k_2 y)$$

= const $\forall x,y$ iff: $k_1 x + k_2 y = \text{const}$

$$(ii) z = z^{\text{max}} \text{ if } k_1 x + k_2 y = 2\pi n \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi n / k_1, y = 0 \\ y = 2\pi n / k_2, x = 0 \end{cases}$$

Les lignes définies par:

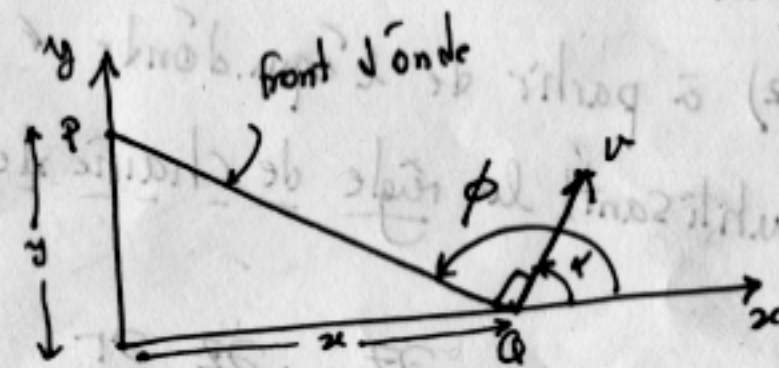
$$k_1 x + k_2 y = 2\pi n$$

$$\text{ou } z(x,y) = \text{const. [valeur \& phase]} \quad (7.38)$$

sont appelées: fronts d'onde

~ Lorsque les fronts d'onde sont des droites, cette onde est appelée "onde plane".

~ On peut trouver la direction de propagation comme suit,



on a pour un front d'onde la condition:

$$k_1 x + k_2 y = 2\pi n$$

$$\Rightarrow y = -\frac{k_1}{k_2} x + \frac{2\pi n}{k_2}$$

$$\tan(\pi - \phi) = \tan \phi = -\frac{k_1}{k_2}$$

Mais,

$$\alpha = \phi - \pi/2 \quad \tan \alpha = \tan(\phi - \pi/2) = -\frac{1}{\tan \phi}$$

dir. de propagation:

$$\tan \alpha = \frac{k_2}{k_1} \quad (7.39)$$

Donc, k_1 & k_2 déterminent la dir. de prop. et la vitesse v

7.9.1. Les ondes de symétrie circulaire/cylindrique

& Sphérique

• Pour les ondes circulaires, z a même valeur pour tous les angles $\theta \sim z = z(r, t)$ seulement.

$\Rightarrow$ On peut obtenir l'équ. d'onde dans les coords. cylindriques (r, θ, z) à partir de l'équ. d'onde $\nabla^2 z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ Cartésiennes en utilisant la règle de chaîne de dérivée.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ z = z \end{cases}$$

on trouve,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{r^3}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{r^3}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$

Exercice
Preuve les
expressions

alors,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} r$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (7.40)$$

Les solutions de l'équ. d'onde (7.40) sont les fonctions de Bessel.

• Pour des valeurs grand de r ,

$$(7.40) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \approx \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (7.41)$$

avec soln.

$$z(r, t) = A \cos(kr - \omega t)$$

et $v = dr/dt$ est la vitesse radiale.

$\therefore$ les ondes circulaire produisent ~~par~~ à un point devient plane pour des distances larges.

7.9.2. 3D ondes

eg. ondes sonores dans l'air. L'équ. d'onde s'écrit,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7.42)$$

ψ : correspond à la variation de la quantité physique qui se produit quand l'onde passe.

• Soln. d'équ. d'onde.

$$\psi(x, y, z, t) = A \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) \quad (7.43)$$

$$\text{or} \quad \underline{k} = (k_x, k_y, k_z) \quad \underline{r} = (x, y, z) \quad v = \frac{\omega}{k} \quad \text{ou} \quad k = |\underline{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

* Les ondes Sphériques

- En raison de symétrie, la onde sphérique la soln.

$$\psi = \psi(r, t).$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

(7.44)

- Pour trouver la soln. on peut écrit.

$$u(r, t) = r \psi(r, t)$$

Exercice.

Preuve équation
dans les ondes
sphériques

$$\leadsto \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]$$

soln.

$\leadsto$

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t)$$

(7.45)

amplitude diminuée comme $1/r$