

Chap. 8. Les Ondes

Stationnaires

Exemple des ondes stat.:

Les instruments de "musique"
Guitare : onde stat. ~~sur~~ les cordes

Instrument à vent : ondes sonores stat. dans les tubes
tambour : ondes stat. sur les peaux [skins]

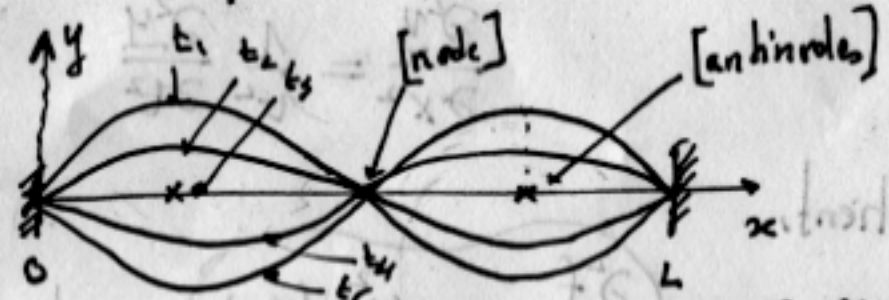
Les instruments transforment les vibrations dans ondes stationnaires en/aux des ondes sonores qui propagent à travers l'air

Mais allons voir que:

- (i) Ondes stat. peuvent considérer comme superposition de ondes progressives avec même fréq., même Amplitude et se propage dans directions opposées.
- (ii) ondes stat. sont les modes propres d'un système vibratoire.

8.1. Ondes stat. sur une corde

Considère ondes transversales sur une corde tendue, qui est de longueur L fixe au points $x=0$ et $x=L$.



Le déplacement y est toujours zéro à $x=0$ & $x=L$:

$$y(x=0, t) = y(x=L, t) = 0 \quad (8.1)$$

Puisque la corde est fixe à ces 2 points

- Les positions du maxima & minima ne se déplacent pas le long de l'axe x en fonc. de t → nom: ondes stationnaires
- Lorsque la corde vibre, toutes ses particule vibrent avec même fréquence mais diff. amplitudes le long [OHS] autour de ces position d'équilibre.

→ Ces caract. indiquent que le déplacement y peut être représenté comme par.

$$y(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \phi)$$

variation d'ampl. le long de l'axe x

OHS

(8.2)

~ On a séparé la dépendance de y on x et t .
 ~ Subst. (8.2) dans l'équ. d'onde à 1D:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (8.3)$$

on obtient,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f(x) \quad (8.4)$$

C.f. OHS à 1DDL:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

avec sol.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + B \sin(\omega t + \phi) \quad (8.5)$$

Alors, la soln. gén. d'équ. (8.4) est:

$$f(x) = A \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \quad (8.6)$$

où A & B sont constantes déterminées par les

Conds. aux bords/limites:

$$f(0) = 0$$

$$f(L) = 0$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$f(L) = 0 \Rightarrow B \sin\left(\frac{\omega}{v} L\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega L}{v} = n\pi \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.8a)$$

[$n=0$ est trivial: $f(x)=0$]

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad (8.8b)$$

pour chaque $n \sim \omega_n$ associée

~ Subst. (8.8b) dans (8.7),

$$f_n(x) = B_n \sin\left(\frac{\omega_n}{v} x\right) \quad (8.9)$$

et finalement le déplacement de la corde (8.2) est:

$$y_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos(\omega t + \phi) \quad (8.10)$$

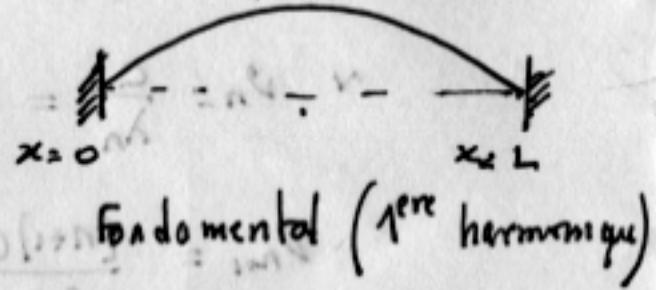
Cette équ. décrit les ondes stat. sur la corde, où chaque valeur de n correspond à un motif [pattern] d'onde stat. différente. Ces motifs sont encore appelés: "les modes de vibration de la corde".

↳ modes propres de la corde vibrante.

$n=1$

$$f_1(x) = B_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

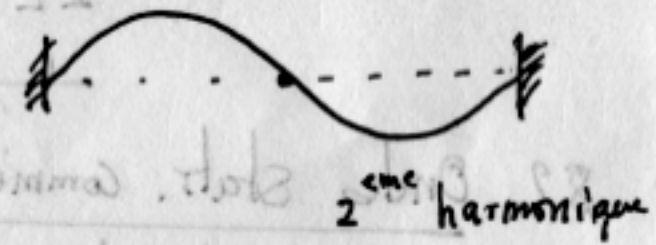
$$\omega_1 = \frac{\pi v}{L}$$



$n=2$

$$f_2(x) = B_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi v}{L}$$



$\vdots$

La période :

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{n\pi v/L} = \frac{2L}{nv}$$

(8.11)

anti-nœuds = n pour n^{me} harmonique.

Longueur d'onde λ d'une onde stat. est :

$$\lambda_n = \frac{v}{\nu_n} = \frac{v}{\omega_n/2\pi} = \frac{v 2\pi}{n\pi v/L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Leftrightarrow n \frac{\lambda_n}{2} = L$$

(8.12)

obtenir une onde stat. seulement si # entier de demi-longueur se situe entre les deux extrémités fixées de la corde.

nombre d'onde :

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}$$

(8.13)

Equ. (8.10) peut alors s'écrire comme :

$$y_n(x,t) = B_n \sin(k_n x) \cos(\omega t + \phi)$$

(8.14)

Remarque :

① Pour $n=1$:

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

(8.15)

La fréq. fond. d'une corde tendue dépend de L, T, μ .

Si on varie un des ces variables $\Rightarrow$ diff. ν_1 [Guitare!]

② On voit d'après equ. (8.8b) que :

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L} = n\omega_1$$

(8.16)

Les fréq. de tous les harmoniques d'une corde tendue sont des multiples exacts de la fréq. fond. ω_1 , et alors forment une "SÉRIE HARMONIQUE".

Mais : pour la plupart des systèmes de vibrations ce n'est pas le cas. Ces fréq. plus élevées sont appelées ["overtones"] pas harmoniques

③ Les ondes stats. se produisent dans des nombreuses situations physiques diff. et pas seulement cordes tendues.

e.g. * Micro-onde: ondes EM ~~reflèctent~~ réfléchissent à partir du four
les murs de la four pour former des ondes stats.

[reduce "cold spots" by rotating food]

* Mécanique Quantique, les niveaux d'énergie discrets d'atomes peuvent être considérés comme les ondes stats. solns. de l'équ. de Schrödinger.

Exemple. Un tube laser de helium-néon a une longueur $L=0.49$ m et fonctionne à une longueur d'onde $\lambda=633$ nm.

Quelle est la diff. de fréq. entre les ondes stats. adjacentes dans le tube?

Soln. La lumière dans le tube laser forme une onde stationnaire entre les 2 miroirs qui sont placés à des deux extrémités du tube.

on a: $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ et $\lambda_n \nu_n = v = c$

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$$

$$\nu_{n+1} = \frac{(n+1)c}{2L} \Rightarrow \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2L} = 3.75 \times 10^8 \text{ Hz}$$

8.2. Ondes stats. comme une superposition de deux ondes progressives

On a vu dans Chap. 7 que la soln. gén. de l'équ. d'onde 1D est:

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \quad (8.16)$$

Un exemple peut être:

$$y(x,t) = \frac{A}{2} \sin(kx - \omega t) + \frac{A}{2} \sin(kx + \omega t) \quad (8.17)$$

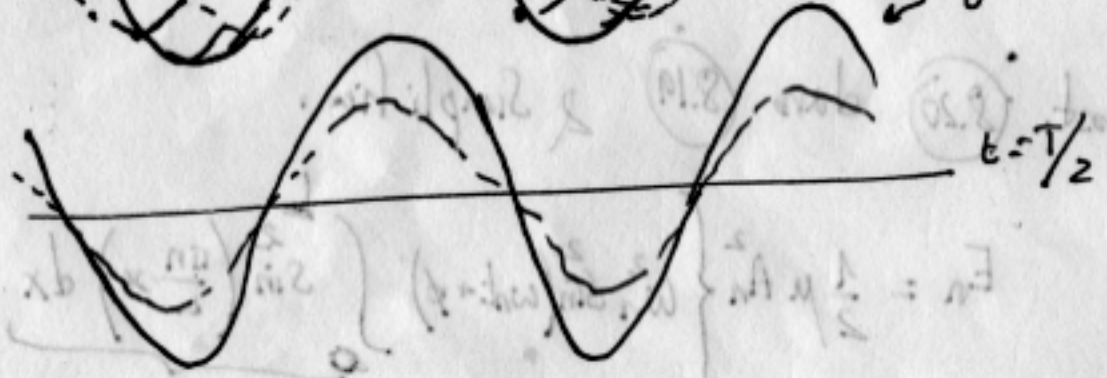
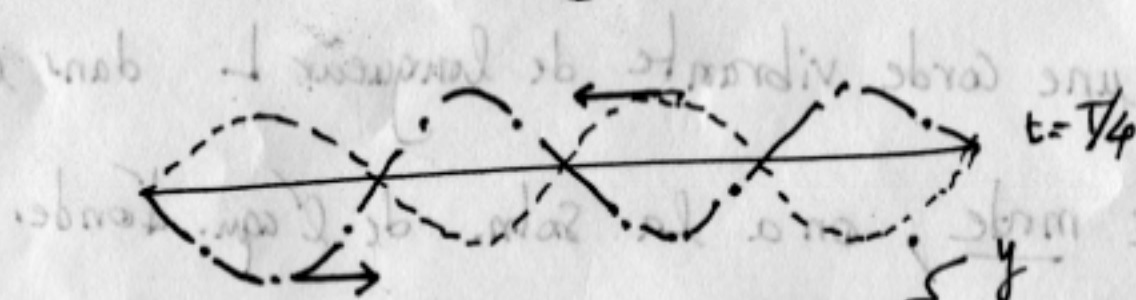
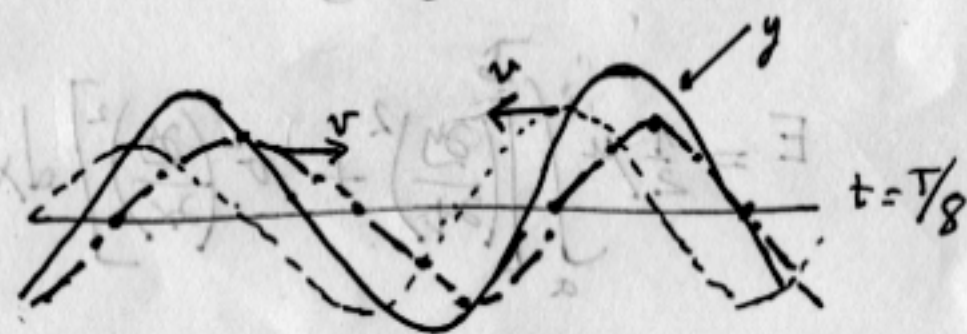
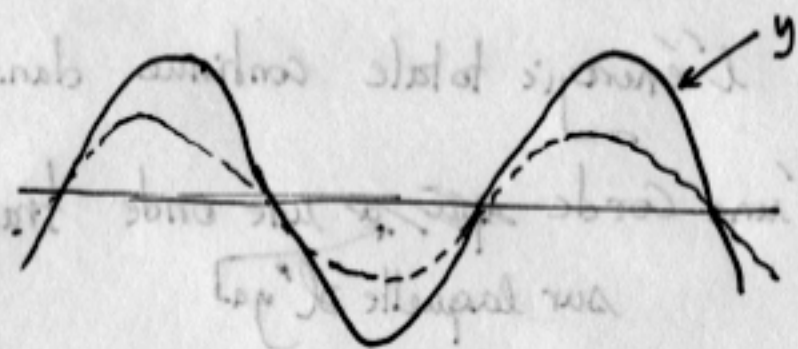
Utilisant l'identité:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

On a:

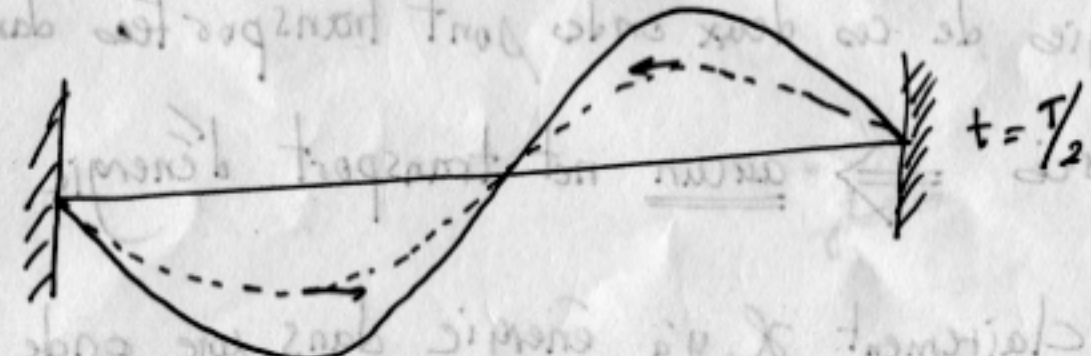
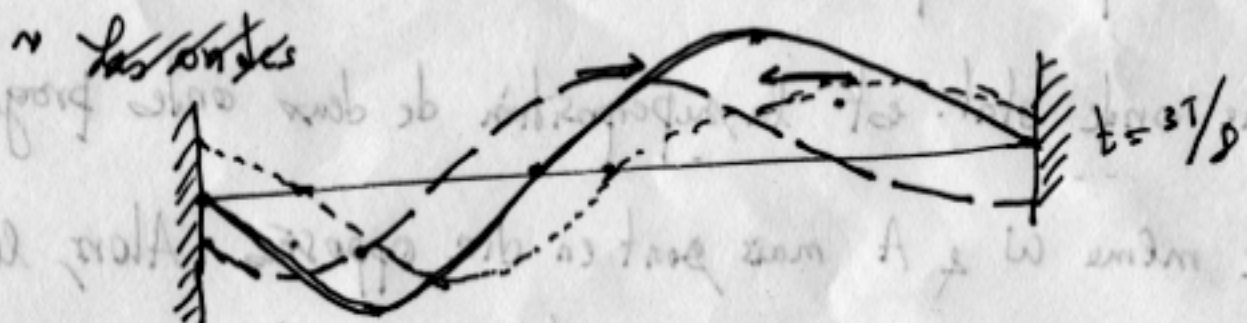
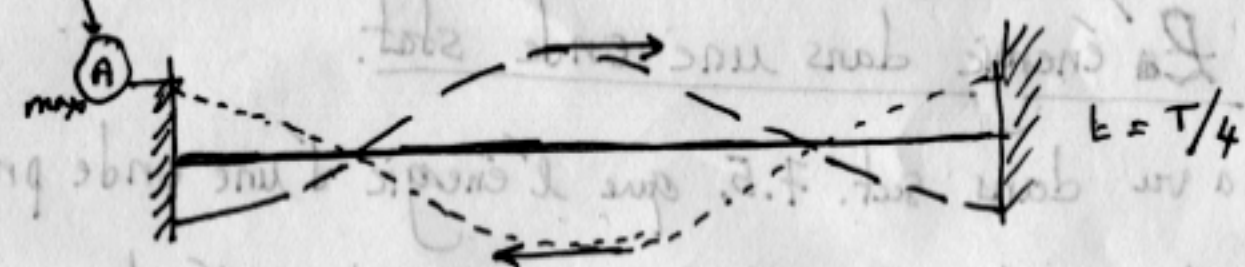
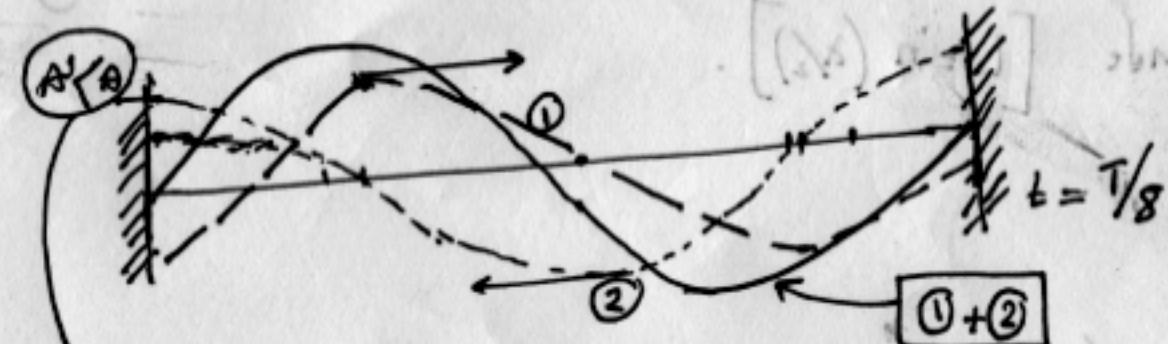
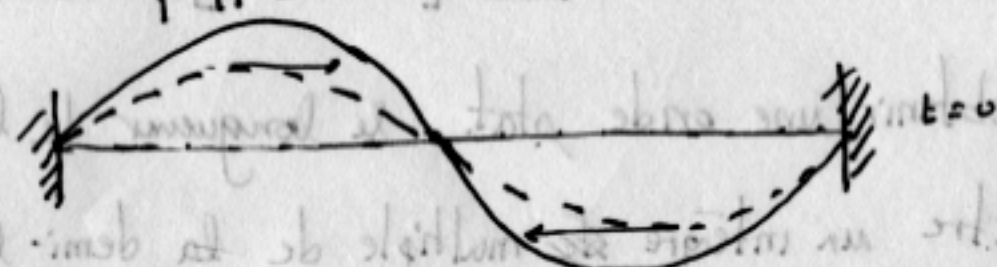
$$y(x,t) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (8.18)$$

c.f. équ. (8.10) ~~est~~ résultat important: onde stat. est la superposition de deux ondes prog. avec même fréq. & même amp. qui se propagent dans des dir. opposées.



Remarque :
 - Les deux ondes progs. qui on a considéré ci-dessus étaient en distances larges ($x \rightarrow \pm \infty$). Mais une corde tendue entre 2 bords/murs à une longueur finie, Mais elle peut support des ondes stat. ? Dans ce cas, c'est la réflexion à des deux bords/murs qui produise les deux ondes progs.

dans 2 dir. opposées. x [x] dans l'intervalle de la corde.



no Les ondes réfléchies à un "mur/bati fixe" à même amp. que les ondes incidentes [mais avec une déphasage de " π ".]
 no on voit que le déplacement de la corde est toujours zéro

à la position de les deux murs $[x=0, x=L]$

→ Pour obtenir une onde stat. la longueur de la corde doit être un entier ~~de~~ multiple de la demi-longueur d'onde $[L = n(\lambda/2)]$.

8.3. L'énergie dans une onde stat.

• On a vu dans sect. 7.5. que l'énergie d'une onde prog. est transportée par l'onde à ~~sa~~ la vitesse d'onde.

→ Une onde stat. est la superposition de deux ondes prog. avec même ω & A mais sont en dir. opposées. Alors, les énergies de ces deux ondes sont transportées dans dir. opposés $\Rightarrow$ aucun net transport d'énergie

Mais, clairement il y a énergie dans une onde stat. Une corde vibrante a E cinétique [mouvement] et E potentielle [due à la tension T].

→ l'appelé que l'énergie totale contenue dans un segment $a \leq x \leq b$ d'une corde ~~qui~~ une onde transversale est sur laquelle il y a

$$E = \frac{1}{2} \mu \int_a^b \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (8.19)$$

• Pour une corde vibrante de longueur L dans un seule mode, on a la soln. de l'équ. d'onde.

$$y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \phi) \quad (8.20)$$

→ substit. (8.20) dans (8.19) & simplifier.

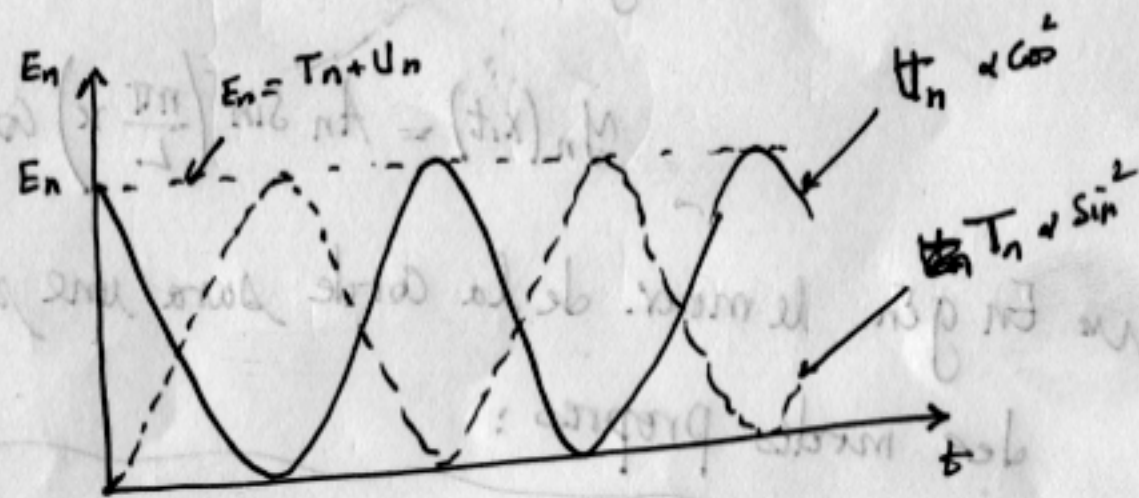
$$E_n = \frac{1}{2} \mu A_n^2 \left\{ \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \phi) \underbrace{\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}_{L/2} + v^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos^2(\omega_n t + \phi) \underbrace{\int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}_{L/2} \right\}$$

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} [1 - \cos 2\alpha]$

Donc:

$$E_n = \frac{1}{4} \mu L A_n^2 \omega_n^2 \left[\sin^2(\omega_n t + \phi) + \cos^2(\omega_n t + \phi) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \mu L A_n^2 \omega_n^2 \quad (8.21)$$



cf. OHS !!

• L'énergie est transférée entre T & U continuellement, avec E_{totale} restant constante.

(i) Ceci est une caract. des systèmes oscillatoires (OHS)

(ii) Remarque que $E_n \propto \omega_n^2$ et $E_n \propto A_n^2$

$$m = \mu L$$

$$k = m \omega^2$$

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2} k A^2 \\ E_n = \frac{1}{4} \mu L \omega_n^2 A^2 \end{cases}$$

diff. est facteur $(1/2)!$

8.4. Ondes stats. Comme des modes propres d'une corde vibrante

• On a vu que la caract. import. d'un mode propre est que

① toutes les masses se déplacent dans une OHS à la même fréq.

② Les modes propres sont complètement indep. et la mouv. gen. du système est une superposition de ces modes propres.

→ Toutes ces propriétés sont présentes dans les ondes stats. sur une corde vibrante.

→ ondes stats. sont les modes propres de la corde vibrante.

8.4.1. Principe de Superposition :

Constate que, si $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ sont deux solns. quelconques de l'équ. d'onde, alors il en est toute combinaison linéaire

$$y(x,t) = A_1 y_1(x,t) + A_2 y_2(x,t); \quad A_1, A_2 \text{ constants}$$

• Ce résultat est une conséquence de la linéarité de l'équ. d'onde

$\left\{ \begin{array}{l} \text{pas de } y^n; n=2,3,\dots \\ \text{pas de } y(x_1/x_2), \dots \text{ etc} \end{array} \right.$

→ équ. d'onde est une équ. linéaire

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

A_1, A_2 constants

$$\Rightarrow A_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \left(A_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_1 y_1 + A_2 y_2] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [A_1 y_1 + A_2 y_2]$$

y y

(8.23)

Remarque: La superposition

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i y_i(x,t)$$

(8.24)

est aussi une soln. si $y_1, y_2, \dots$ sont des solns. de l'équ. d'onde

8.4.2. Superposition des modes propres

• On a trouvé que le mode propre $n^{\text{ème}}$ d'une corde vibrante de longueur L est,

$$y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \phi) \quad (8.24)$$

En gén. le mov. de la corde sera une superposition des modes propres:

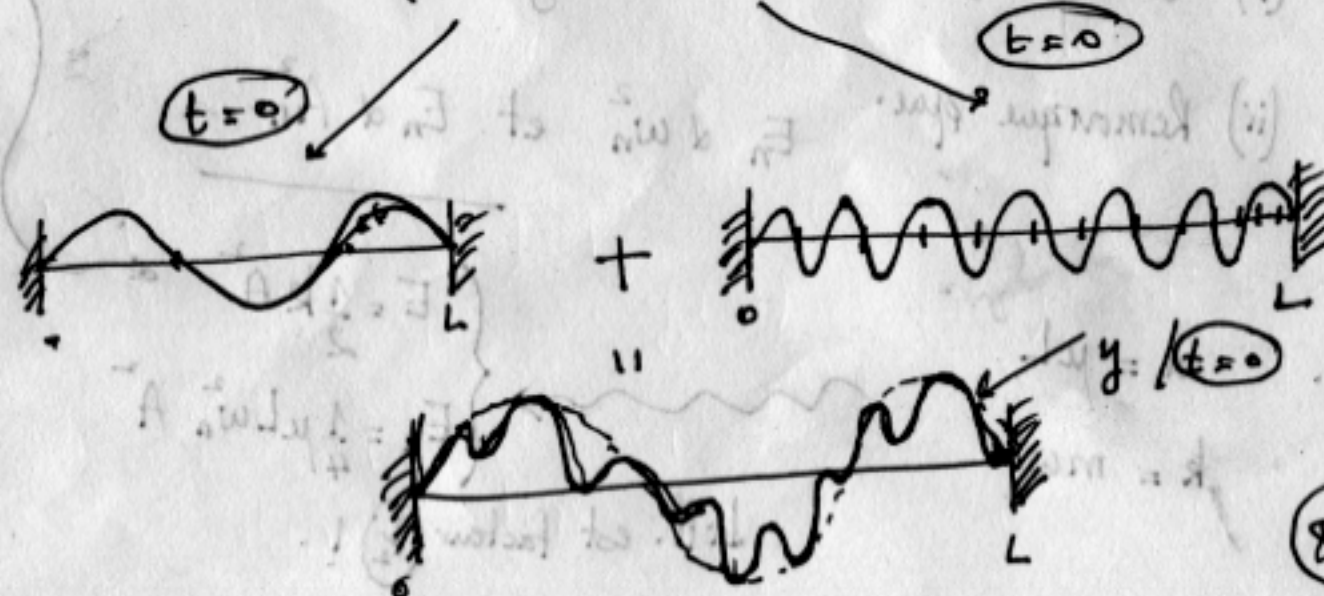
$$y(x,t) = \sum_n y_n(x,t) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \phi)$$

(8.25)

$$\omega_n = \frac{\pi n v}{L}$$

Exemple:

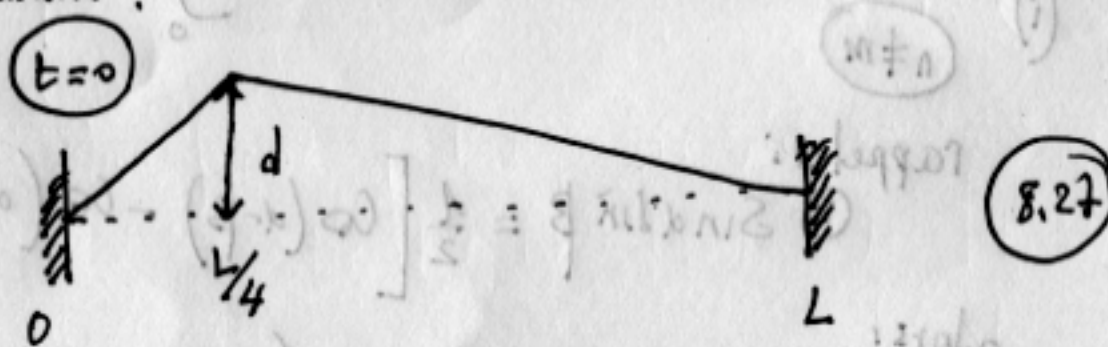
$$y = y_3(x,t) + y_{13}(x,t)$$



• Pour exciter les deux modes (y_2, y_3) de cette façon, nous aurions - en quelque sorte - avoir pour contrainte la forme de la corde comme dans fig. (8.26), puis le relâcher au

$t=0$
 Pas pratique!

ne pratiquement:



* La forme triangulaire ne correspond à aucune des formes des modes propres!!

* La chose remarquable est qu'il est possible de reproduire cette forme triang. en additionnant les modes propres de la corde avec des amps. appropriées

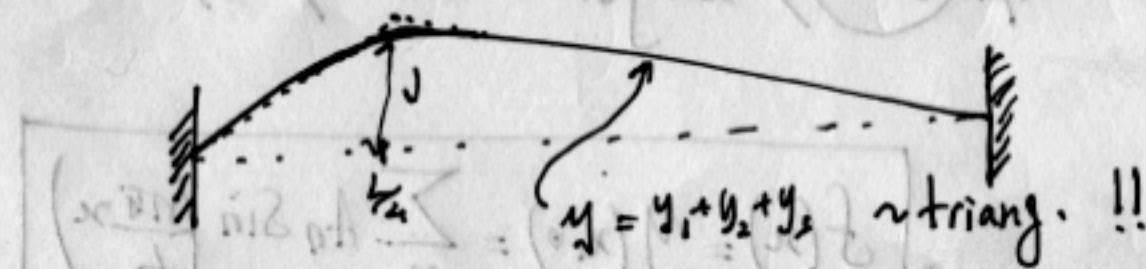
exemple: pour (8.27), on peut prend.

$$y = y_1(x,0) + y_2(x,0) + y_3(x,0)$$

ou

$$\begin{cases} A_1 = A = 32d/3\pi^2 \\ A_2 = \frac{A}{2\sqrt{2}} \\ A_3 = \frac{A}{9} \end{cases}$$

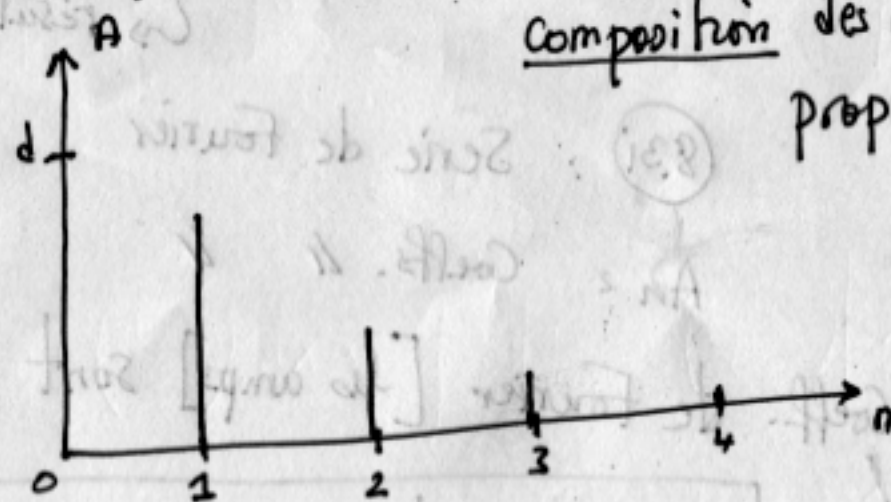
~ Voir Seriz de Fourier à Jossas (8.29)



Conclusion: ~~Quand~~ Lorsque on pince [pluck] une corde on excite beaucoup de ses modes propres, et le mouv. ultérieur de la corde est donnée par la superpos. de ces modes propres selon l'équ. (8.25).

~ Spectre de fréquence

Composition des modes propres.



N.B. $y_4 \propto \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) = 0$ pour $x = \frac{L}{4}$ $\rightarrow y_4$ n'est pas excité!!

8.4.3. Les amps. des modes propres & l'analyse de Fourier

D'après Equ. (8.25), la forme initiale, $t=0$, de la corde est.

$$f(x) = y(x, 0) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (8.31)$$

En fait : Une forme quelconque, $f(x)$, de la corde avec des extrémités fixées [$f(0) = f(L) = 0$] peut être écrite comme une superposition de ces fonctions sinusoïdale (sinus) avec des valeurs appropriées pour les coeffs. $A_1, A_2, \dots, A_n$.
 ↳ résultat par Fourier

(8.31) : Série de Fourier

A_n : Coeffs. " "

Les Coeff. de Fourier [les amps] sont donnés par.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x) dx ; n=1, 2, \dots \quad (8.32)$$

Proof:

$$f(x) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ; n, m, \text{ intégros}$$

$$\Rightarrow \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \sum_n A_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

(i) $n \neq m$

rappel :

$$\textcircled{1} \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

alors :

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] - \cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right] \right\}$$

$$\textcircled{2} \int_0^L \cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] dx = \frac{L}{\pi(n-m)} \sin\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]_0^L$$

= 0

(ii) $n = m$

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right] dx$$

$$= \frac{L}{2} - \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{L}{2}$$

Donc,

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \delta_{nm} \frac{L}{2}.$$

$$\Rightarrow \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \sum_n A_n \delta_{nm} \frac{L}{2} = A_m \cdot \frac{L}{2}$$

Remarque: Pour la résolution de l'équ. du mur. on a besoin de les cond. initiales.

~ Pour une corde, on a un continuum de particules, on les cond. initiales sont la position initiale et la vitesse initiale de chaque point de la corde.

$\Rightarrow$ Nous allons traiter le cas particulière

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \\ y(x,t) \Big|_{t=0} = f(x) \end{cases}$$

(8.33)

• Autre Cond. Inits. donne autre série de Fourier.

Exemple.

(t=0)



Trouver les trois premiers modes propres qui sont excités & les ampr. en terme de la dépl. initiale d.

Soln.

on a, $y(x,0) = f(x)$

où

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2d}{L}x; & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{2d}{L}x + 2d; & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

alors,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2d}{L}x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L \left[-\frac{2d}{L}x + 2d\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{4d}{L^2} \int_0^{\frac{L}{2}} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{4d}{L^2} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

remarque que:

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

$$\int x \sin(ax) dx = -\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a} \int \cos(ax) dx$$

avec $u = x$ et $v = \sin(ax)$
 $u' = 1$ et $v' = a \cos(ax)$

$$= -\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax)$$

Donc:

$$\begin{cases} \int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \int_{L/2}^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L^2}{n\pi} \cos(n\pi) - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ -L \int_{L/2}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = +\frac{L^2}{n\pi} \cos(n\pi) \end{cases}$$

Finalement,

$$A_n = \frac{8d}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$\neq 0$ si n est impaire $= 1, 3, 5, 7, \dots$

$= 0$ si n est paire $= 2, 4, 6, \dots$
 (node à $L/2$)

$$y_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

avec $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$, $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

8.4.4. L'énergie d'une corde vibrante

Rappel que:

$$E = \frac{1}{2} \mu \int_a^b dx \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]$$

car $y(x,t) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$

alors,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= \left[\sum_n A_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t) \right] \cdot \left[\sum_m A_m \omega_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right]$$

Mais les termes croisés

$m \neq n$

$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ et $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

sont ~~zero~~ après l'intégration.
 → l'énergie totale E est.

$$E = \frac{1}{2} \mu \int_0^L \sum_n A_n \left[\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin^2(\omega_n t) \omega_n^2 + \underbrace{v_s^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}_{\omega_n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos^2(\omega_n t) \right] dx$$

$$E = \frac{1}{4} \mu L \sum_n A_n^2 \omega_n^2 \quad (8.34)$$

La caract. la plus intéressante de ce résultat est que chaque mode propre contribue une énergie

$$E_n = \frac{1}{4} \mu L A_n^2 \omega_n^2 \quad (8.35)$$

indépendamment des autres modes.

↑ typique pour les modes propres.