Série 6 : Oscillations Couplées

Exercice 6.1. Deux pendules simples, chacun d'une longueur de 0.50 m et 5.0 kg de masse, sont couplés en attachant une ressort légère horizontale de constant de raideur $k = 20\,\mathrm{Nm}^{-1}$ à les masses.

(a) l'une des masses est maintenu à un déplacement horizontal $x_a = +5.0\,\mathrm{mm}$, tandis que l'autre masse est maintenue à un déplacement horizontal $x_b = +5.0\,\mathrm{mm}$. Les deux masses sont ensuite libérés de repos simultanément. En utilisant les expressions

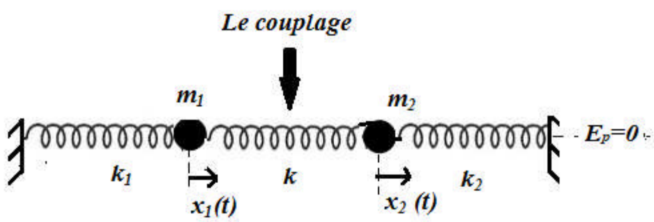
$$x_a = \frac{1}{2}\left[C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t\right], \qquad x_b = \frac{1}{2}\left[C_1 \cos \omega_1 t - C_2 \cos \omega_2 t\right]$$

ou ω_1 et ω_2 sont les fréquences propres. Trouver les valeurs de C_1 et C_2. Tracer x_a et x_b en fonction de temps sur l'intervalle du temps $t = 0$ à 10 s.

(b) Répéter la partie (a) pour les conditions initiales : (i) $x_a = +5.0\,\mathrm{mm}$, $x_b = -5.0\,\mathrm{mm}$, (ii) $x_a = +10\,\mathrm{mm}$, $x_b = 0\,\mathrm{mm}$ et (iii) $x_a = +10\,\mathrm{mm}$, $x_b = +5.0\,\mathrm{mm}$. (Supposer $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$).

Exercice 6.2. — Partie 1 :

On représente un système mécanique complexe, constitué par deux oscillateurs harmonique couplé par ressort de raideur k, comme le montre la figure ci-dessous.



(a) Quel est le nombre de degré de liberté ?

(b) Déterminer le Lagrangien du système.

(c) Etablir les équations différentielles du mouvement.

(d) En déduire les modes propres/fondamentales.

— Partie 2 :

Les deux sous-systèmes sont identiques. On pose alors les paramètres suivants : $k_1 = k_2 = k$ et $m_1 = m_2 = m$, et lance le système sans vitesses initiales avec les conditions initiales suivantes : $x_1(0) = C, x_2(0) = 0$.

(a) Etablir les nouvelles équations différentielles du mouvement.

(b) En déduire les pulsations propres.

(c) Donner les solutions générales.

(d) Quelle est la nature du phénomène étudié ?

— Partie 3 :
On impose une force sinusoïdale extérieure au premier sous-système de la forme suivante :

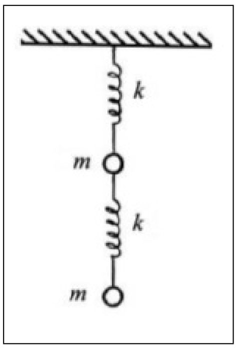
$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

(a) Déterminer les nouvelles équations du mouvement.

(b) En déduire le module des amplitudes.

(c) Quelle est la nature du phénomène étudié ?

Exercice 6.3. Deux masses égales sont connectés comme indiqué avec deux ressorts identiques sans masse de constant de raideur k.



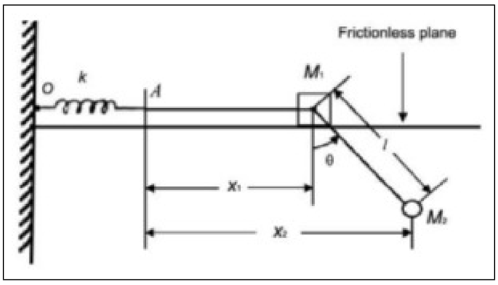
— Considérant que le mouvement est dans la direction verticale, montre que les fréquences angulaires des deux modes propres sont donnés par :

$$\omega^2 = \frac{(3 \pm \sqrt{5})k}{2m}$$

et donc que le rapport des fréquences des modes propres est $(\sqrt{5}+1)/(\sqrt{5}-1)$.

— Trouver le rapport des amplitudes des deux masses dans chaque mode.

Exercice 6.4. Le schéma ci-contre montre une masse M_1 sur un plan sans frottement relié à un bâti O par un ressort de constant de raideur k.



Masse M_2 est soutenu par un fil de longueur ℓ à partir de M_1. OA est la longueur du ressort détendu. x_1 et x_2 sont les positions de M_1 et M_2, respectivement, par rapport au point A. La figure n'est pas à l'échelle ; x_1 est beaucoup plus petite que OA.

(a) Etablir les équations différentielles du mouvement pour chaque masse.

(b) Pour $M_1 = M_2 = M$, calculer les pulsations propres (utiliser l'approximation de petites angles pour le pendule).

(c) Quels sont les rapports associés de l'amplitude des deux masses ?

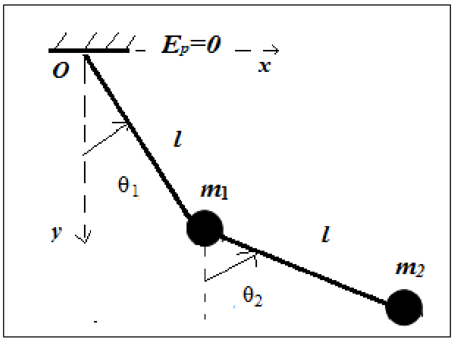
Exercice 6.5. Soit le système mécanique, constitué de deux pendules simples de longueur ℓ et de masses m_1, m_2 représentés dans la figure ci-dessous :

(a) Etablir le Lagrangien du système.

(b) Donner les équations différentielles du mouvement pour des faibles oscillations.

(c) On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}, \qquad \mu = \frac{m_1}{m_2}$$

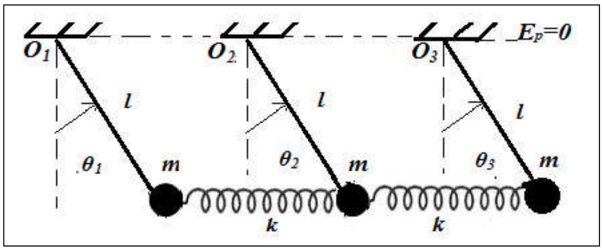


Déterminer dans ce cas les pulsations propres du système ω_1 et ω_2 en fonction des paramètres ω_0 et μ.

(d) Déterminer les solutions générales.

(e) Déterminer les périodes de les deux modes propres pour $l = 1.0\,\mathrm{m}$ et comparer les avec la période d'un pendule simple de cette longueur (Supposer $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$)

Exercice 6.6. On considère trois pendules simples identiques, de masses m, de longueur ℓ, présentés dans la figure ci-contre.



Les masses sont reliées entre elles par l'intermédiaire de deux ressorts identiques, de raideur k. A l'équilibre, les pendules sont verticaux, les trois masses sont équidistantes sur une même, et les ressorts ont leur longueur naturelle. Le système en mouvement est défini, à l'instant t, par les élongations angulaires, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, des pendules avec la verticale descendante. On posera les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \Omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

(a) Déterminer le Lagrangien du système.

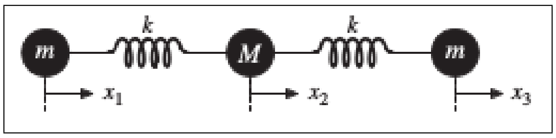
(b) Etablir les équations différentielles du second ordre vérifiées par les élongations angulaires $\theta_1(t), \theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$ pour les petites oscillations du système.

(c) Déterminer les pulsations propres du système.

(d) Application numérique :
On prend : $m = 1\,\mathrm{kg}, k = 10\,\mathrm{N/m}, \ell = 1\,\mathrm{m}, g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
Calculer les pulsations propres.

(e) Déterminer le rapport des amplitudes angulaire B/A et C/A pour chacun des modes propres de ce système.

Exercice 6.7. La figure montre deux masses identiques de masse m relié à une troisième masse de masse M par deux ressorts identiques de constant d'élesticité k.



Considérez vibrations des masses le long de la ligne joignant leurs centres où x_1, x_2 et x_3 sont leurs déplacements respectifs de l'équilibre.

(a) Sans aucun détail mathématique, utilisez votre intuition physique pour déduire la fréquence propre des vibrations symétrique-extensibles.

(b) Montrer que les équations du mouvement des trois masses sont :

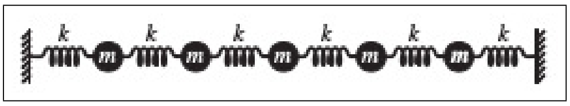
$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2(x_1 - x_2) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2(2x_2 - x_1 - x_3) = 0$$
$$\ddot{x}_3 + \omega_1^2(x_3 - x_2) = 0$$

ou $\omega_1^2 = k/m$ et $\omega_2^2 = k/M$.

(c) Montre que les fréquences propres du système sont $\sqrt{k/m}$ et $\sqrt{k(2m+M)/M}$.

(d) Détermine le rapport des fréquences propres pour $m/M = 16/12$ et compare avec les fréquences de vibrations du molécule CO_2 ($f_1 = 4 \times 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$, $f_2 = 7 \times 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$).

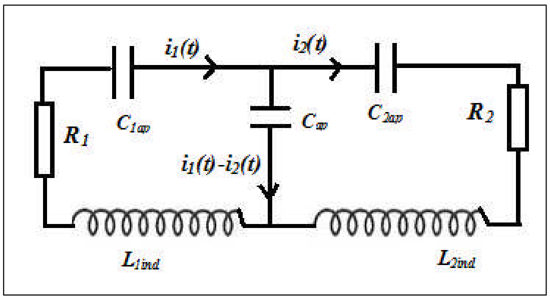
Exercice 6.8. Cinq masses identiques sont reliés par six ressorts identiques entre deux mures rigides, comme illustré sur la figure, et se déplacent sans frottement sur une surface horizontale.



Combien modes propres de vibration dans la direction transversale à le système ?
Dessinez ces modes propres ayant à l'esprit que les positions transversales des masses passent à travers des courbes sinusoïdales.

Exercice 6.9. — Partie 1 :

On considère deux circuits électriques (R, L, C) couplés par une capacité représentés par la figure ci-dessous



(a) Quel est le nombre de degré de liberté ?

(b) Donner les équations du variations du charges dans les deux condensateurs.

— Partie 2 :

On néglige les résistances des deux circuits. On prend les nouvelles grandeurs physiques telles que :

$$L_1 = L_2 = L, \qquad C_1 = C_2 = C, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

(a) Etablir les nouvelles équations différentielles du variations du charges.

(b) En déduire les pulsations propres du système en fonction de ω_0.

(c) Donner les solutions générales.

(d) Quel est le modèle mécanique équivalent ?