$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Exemple 01 :

Soit M la matrice réelle 3*3 suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de M .

Solution :

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -2-2\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) \\ &= (1-\lambda)(\lambda + 4)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

La matrice M admet donc trois valeurs propres distinctes qui sont : 1; 2; et -4.

Exemple 02 : Soit A la matrice réelle 3*3 suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A .
2. Déterminer une base de vecteurs propres

Solution :

$$\begin{aligned} 1- \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 2) + 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

La matrice A admet donc deux valeurs propres distinctes qui sont : 1, 2.

2- on va déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Pour $\lambda=1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) x = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour $\lambda=2$

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) x = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$