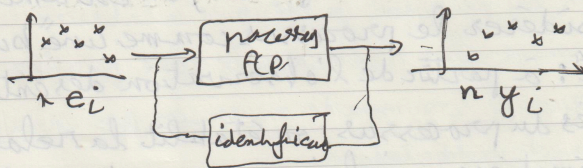


(23)

4) Méthode des Moindres carrés : 1) Introduction [Least square method] (LSM)

• Soit un processus dynamique donné par sa fonction de transfert $F(p)$. On cherche à identifier $F(p)$ par la méthode des moindres carrés.

* Pour faire l'identification de $F(p)$, nous allons donner au processus une entrée $e(t) = e(kT)$ sous forme discrète : une suite de N points : $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$.

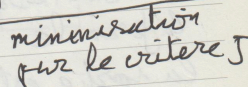


et nous allons obtenir (mesurer) à la sortie du processus N sorties (signal discret) :

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N).$$

* Nous allons voir par la suite que les N entrées, N sorties forment la base d'identification qu'on va appeler la matrice $\Phi(k)$.

S M T W T F S



z^{-1} : opérateur de retard de $y(n)$.

donc:

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \\ = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}$$

$$= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \quad \text{---} \quad n \neq m$$

- Puisque c'est un modèle d'identification
donc ces a_i, b_i sont en vérité des $\hat{a}_i, \hat{b}_i$
donc on écrit a_i, b_i juste pour simplifier
la formule

la sortie estimée sera :

$$y(k) = \Phi^T(k-d) \theta$$

T: matrice
transposéesi on néglige le retard on a : $y(k) = \Phi^T(k) \cdot \theta$

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m]$$

$$\Phi^T(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n), u(k-1), \dots,$$

$$u(k-m)]$$

$$\hat{y}(k) = \Phi^T(k) \cdot \hat{\theta} : \text{sortie estimée du processus}$$

• Dans la suite Nous allons donner une
autre description du modèle utilisé pour
dans les moindres carrés, mais ce modèle
décrit n'est pas utilisé il est seulement
symbolique.

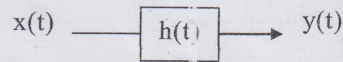
(26)

Méthodes quadratiques

L'identification d'un système ou identification paramétrique est une technique de l'automatique consistant à obtenir un modèle mathématique d'un système à partir de mesures. L'identification se fait par la mesure de l'erreur entre la sortie du système et celle du modèle.

1. Il s'agit de minimiser une fonction quadratique de l'erreur entre la sortie du système (y) et celle du modèle ($\hat{y}$).
2. Méthode utilisant des grandeurs échantillonnées pour réaliser la minimisation.

Soit un système défini par sa sortie :



$$y(t) = 1 + a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots + a_n t^n$$

On peut écrire cette équation par la forme suivante :

$$y(t) = \Phi^T \theta$$

ceci n'est pas un modèle réel du système

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^n \end{bmatrix}}_{\text{variables... par paramètre}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\text{paramètre}}$$

$$\Phi^T = [1 \quad t \quad \dots \quad t^n] \quad , \quad \theta = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n]^T$$

r : ordre du système

* On veut retrouver un vecteur estimé $\hat{\theta}$ de θ (paramètre) à partir de la mesure de : $y(1), \Phi(1) \quad y(2), \Phi(2) \quad \dots \quad y(n), \Phi(n)$

$$\left. \begin{array}{l} y(1) = \Phi^T(1) \cdot \theta \\ y(2) = \Phi^T(2) \cdot \theta \\ \vdots \\ y(n) = \Phi^T(n) \cdot \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow r = \text{dimension de } (\theta) \\ \rightarrow n \text{ mesures} \end{array}$$

Peuvent s'écrire sous la forme :

$$Y = \Phi \theta$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \vdots \\ \phi^T(n) \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(1) = [y(1) \quad u(1)]$$

3) Le critère d'identification

[J]

$$\phi = \begin{bmatrix} \text{r ordre} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \text{r ordre} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}} \right\} n \text{ mesures}$$

Les écarts $\varepsilon(t) = y(t) - \phi^T(t) \cdot \theta$ sont appelés les résidus

On définit l'ecart quadratique (critère d'optimisation) :

$$J = \sum \varepsilon^2(t) = E^T \cdot E$$

Avec : $E = [\varepsilon(1) \quad \dots \quad \varepsilon(n)]^T$

L'estimation : $\hat{\theta} = \text{inv}(\Phi) \cdot Y$

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot Y$$

Démonstration :

$$J = \sum \varepsilon^2 = E^T \cdot E$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (E^T \cdot E)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} [(y - \phi \cdot \theta) \cdot (y - \phi \cdot \theta)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} [y^2 + \phi^T \phi \theta^T \theta - 2 \phi \cdot \theta y]$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 2 \phi^T \phi \theta - 2 \phi y$$

Minimiser l'erreur implique imposer $\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0$

Donc $\phi^T \phi \theta - \phi y = 0$

$$\theta = (\phi^T \phi)^{-1} \phi y$$

J : c'est le critère d'identification

$$J(k) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(k)$$

$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0$: est la procédure de minimisation

minimiser $\equiv$ une tpe d'une fonction $= 0$

Exercice 1

- a) On désire estimer les paramètres d'un procédé ayant la structure suivante :

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})y(k) = (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})u(k) + e(k)$$

Sachant que le procédé possède une constante de temps dont la valeur est connue, on désire contraindre le modèle à posséder un pôle à $z = 0.8$. Si on utilise les moindres carrés avec contrainte linéaire, donnez l'expression matricielle de la contrainte.

- b) Les paramètres du procédé ci-dessous sont estimés à l'aide de la méthode des moindres carrés avec contrainte linéaire.

$$(1 + a_1 z^{-1})y(k) = b_1 z^{-1}u(k) + e(k)$$

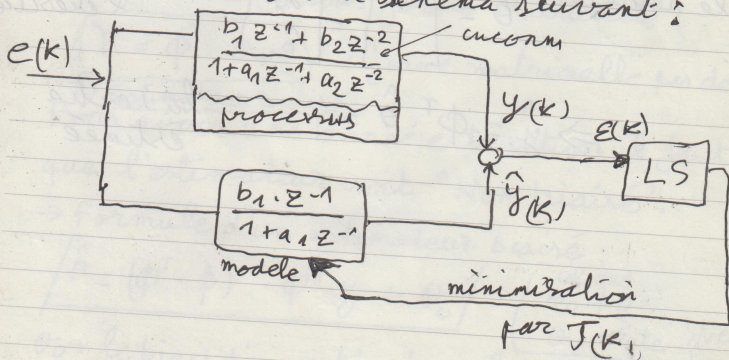
La structure du modèle est identique à celle du procédé et la contrainte $F\theta = G$ est :

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1.4 \\ -0.7 \end{bmatrix}$$

Handwritten notes: "F = -1 1", "G = 1.4 -0.7", "y", "F", "G", "theta", "F theta = G"

Solution exo 1

Donc nous avons le schéma suivant :



(29)

Nous avons donc le mode d'identification

$$y(k) = a_1 \cdot y(k-1) + b_1 \cdot u(k-1) + \varepsilon(k)$$

$$\rightarrow y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix}}_{\Phi^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Dans l'exercice :

$$\Phi = \begin{bmatrix} y_1(k-1) & 1 \\ y_2(k-1) & 0 \end{bmatrix}$$

première mesure de y : $y_1(k-1)$
 2^e mesure de y : $y_2(k-1)$
 première mesure de u : $u_1(k-1)$
 2^e mesure de u : $u_2(k-1)$

on calcul : $\hat{\theta} = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \cdot \Phi \cdot y$

le résultat : $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ G dans l'exercice

$\Rightarrow \hat{y} = \Phi^T \cdot \hat{\theta} =$ la sortie estimée