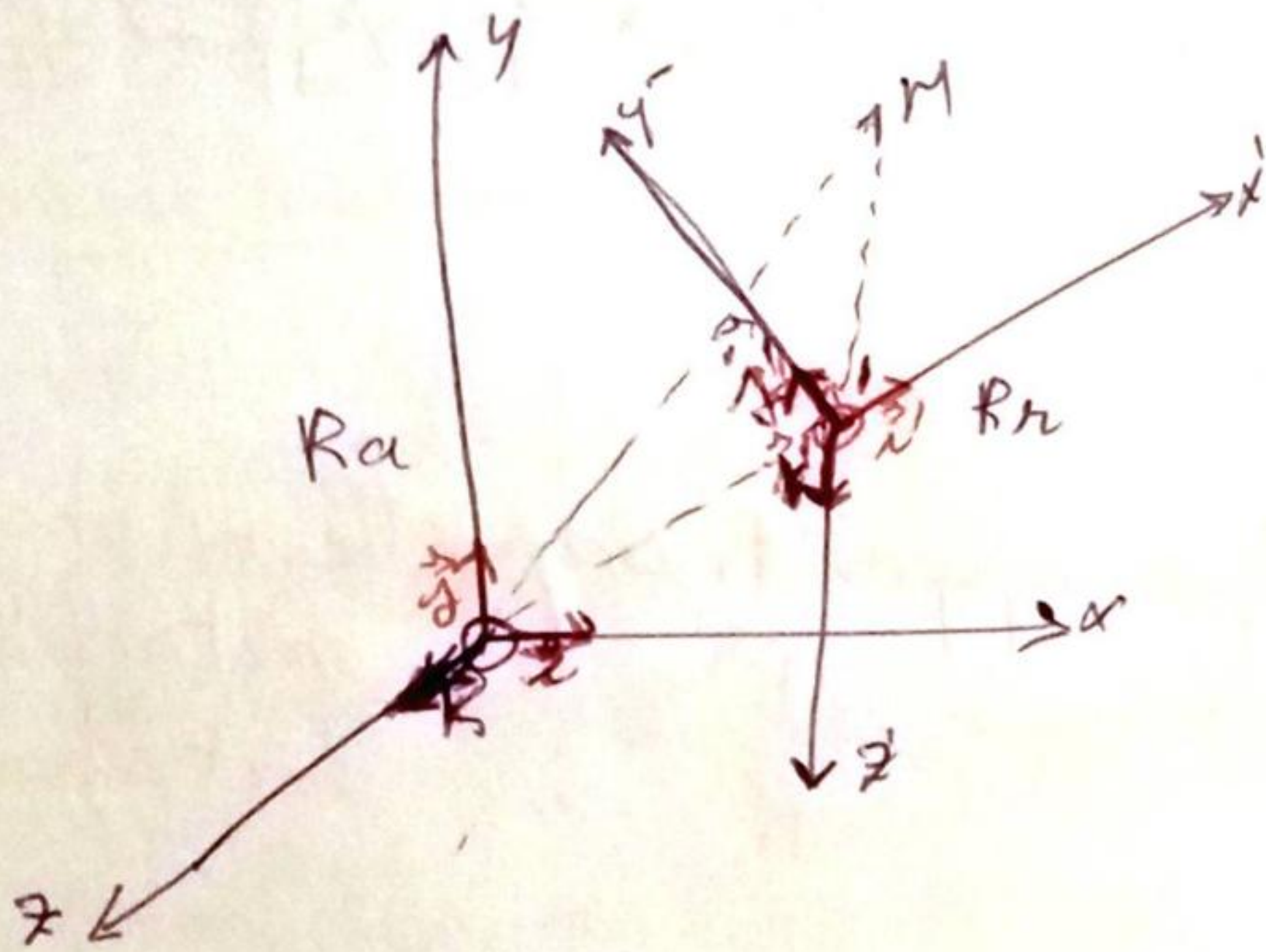


## mvmt relatif

### 1) Mouvement relatif

- Le mouvement d'un solide est dit relatif, s'il est défini ou décrit par rapport à un référentiel relatif
- Un référentiel en mvmt est un référentiel relatif
- A la notion de mvmt relatif, correspondent les notions de vitesse relative et d'accélération relative.

### 1.1 Le vecteur de position



Le vecteur de position  $\vec{OM}$  définit la position, à l'instant  $(t)$  du point  $(M)$  par rapport au repère de référence (fixe)  $R(O, x, y, z)$

$$\vec{OM}|_R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur de position  $\vec{O'M}$  définit la position, à l'instant  $(t)$  du point  $(M)$  par rapport au repère de référence (mobile)  $R'(O', x', y', z')$

$$\vec{O'M}|_{R'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Le vecteur position  $\vec{O'O}$  définit la position, à l'instant  $(t)$  du repère (mobile)  $R'(O', x', y', z')$  par rapport au repère de référence (fixe)  $R(O, x, y, z)$

$$\vec{O'O} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

vecteur de position:

vecteur de position  $\vec{OM}$

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \left[ \frac{d(x')}{dt} \vec{i} + \frac{d(y')}{dt} \vec{j} + \frac{d(z')}{dt} \vec{k} \right] + \left[ x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left[ \frac{d(x')}{dt} \vec{i} + \frac{d(y')}{dt} \vec{j} + \frac{d(z')}{dt} \vec{k} \right] + \left[ x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \left[ \frac{d(x')}{dt} \vec{i} + \frac{d(y')}{dt} \vec{j} + \frac{d(z')}{dt} \vec{k} \right] + \left[ \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} \right]$$

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e}$$

- Mouvement du point  $M$  par rapport  $R$  s'appelle mv absolute
- " " " " "  $R'$  " mv relative
- " " " " "  $R$  " mv entrainement

Mouvement de rotation:

cas de mv de rotation:

$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  car  $\omega$  est variable avec le temps, alors

$\omega(t) = \omega(t) \vec{k}$  représente de rotation instantanée

la vitesse absolue

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R$$

la vitesse absolue nous renseigne sur le mt (M) par rapport au repère fixe R(Oxyz)

la vitesse relative,  $\vec{v}_r$  nous décrit le mt de (M) par rapport au repère mobile

$$\vec{v}_R = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{R'} = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \quad R'(O'x'y'z')$$

l'accélération relative:

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k}'$$

la vitesse relative d'entraînement:

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} \Big|_R + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

La  $\vec{v}_e$  nous permet de déterminer la nature du mt du repère mobile  $R'(O'x'y'z')$  par rapport au repère fixe  $R(Oxyz)$ .

• Lorsque il y a un vecteur de rotation  $\vec{\omega}$  lié au repère de rotation, la formule de Poisson nous permet d'écrire:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i}') + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j}') + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k}')$$

$$\frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left[ \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') \right]$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\vec{OP}}{dt} + [\vec{\omega} \wedge \vec{OP}]}$$

a. Lorsque  $P$  a translation et rotation

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M})$$

b. Lorsque  $P$  a translation pure car il n'y a pas de rotation

$$(\vec{\omega} = \vec{0}) \quad \vec{V}_e = \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_R$$

c. Lorsque  $P$  a rotation pure;

Les deux repères sont superposés, ils ont la même origine

$$(\vec{O} = \vec{O'} \Rightarrow \vec{OO'} = \vec{0}) \quad \vec{V}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{O'M} \Big|_{R'}$$

Vecteurs accélération:

Accélération absolue:

$$\vec{Y}_a = \left. \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right|_R = \left. \frac{d\vec{V}_a}{dt} \right|_R$$

Accélération relative:

$$\vec{Y}_r = \left. \frac{d^2 \vec{O'M}}{dt^2} \right|_{R'} = \left. \frac{d\vec{V}_r}{dt} \right|_{R'}$$

Accélération d'entraînement:

$$\vec{Y}_e = \left. \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} \right|_R + \left. \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} \right) \right|_{R'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) \Big|_{R'}$$

Accélération de Coriolis:

cette accélération est due à l'effet de rotation du repère  $R'$

$$\vec{Y}_c = \left. (2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r) \right|_{R'}$$

Relation entre les accélérations:

$$\underbrace{\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}}_{\vec{y}_a} \Big|_R = \underbrace{\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}}_{\vec{y}_r} \Big|_{R'} + \underbrace{\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2}}_{\vec{y}_e} \Big|_R + \underbrace{\left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} \right)}_{\vec{y}_c} \Big|_R + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \Big|_{R'}$$

$$+ \underbrace{2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r}_{\vec{y}_c} \Big|_{R'}$$

$$\boxed{\vec{y}_a = \vec{y}_r + \vec{y}_e + \vec{y}_c}$$

Démonstration:

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right) \right\} + \left\{ \frac{d}{dt} \left( x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) \right\}$$

$$= \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + \left\{ \left( \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' \right) + \left( \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \left( \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \left( x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right) \right\}$$

$$\underbrace{\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}}_{\vec{y}_a} = \underbrace{\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + \left( x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right)}_{\vec{y}_e} + \underbrace{\left( \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' \right)}_{\vec{y}_r} + \underbrace{\left\{ 2 \left( \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) \right\}}_{\vec{y}_c}$$

$$\begin{aligned}
 x' \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} &= x' \frac{d}{dt} \left( \frac{d \vec{i}}{dt} \right) + y' \frac{d}{dt} \left( \frac{d \vec{j}}{dt} \right) + z' \frac{d}{dt} \left( \frac{d \vec{k}}{dt} \right) \\
 &= x' \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_1 \vec{i}) + y' \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_1 \vec{j}) + z' \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_1 \vec{k}) \\
 &= \left( \frac{d\omega_1}{dt} x' \vec{i} \right) + \left( \frac{d\omega_1}{dt} y' \vec{j} \right) + \left( \frac{d\omega_1}{dt} z' \vec{k} \right) \\
 &\quad + (x' (\vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 \vec{i})) + (y' (\vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 \vec{j})) + (z' (\vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 \vec{k}))) \\
 &= \left[ \frac{d\omega_1}{dt} (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}) \right] + \left[ \vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k})) \right] \\
 &\quad + (\vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k})))
 \end{aligned}$$

$$= x' \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}$$

$$= \left[ \frac{d\omega_1}{dt} (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}) \right] + \left[ \vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k})) \right]$$

$$\vec{y}_R = \left( \frac{d\omega_1}{dt} \vec{0}' \right) + (\vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 \vec{0}'))$$

$$\begin{aligned}
 2 \left[ \frac{dx'}{dt} \frac{d \vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d \vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d \vec{k}}{dt} \right] &= 2 \left[ \frac{dx'}{dt} (\vec{\omega}_1 \vec{i}) + \frac{dy'}{dt} (\vec{\omega}_1 \vec{j}) + \frac{dz'}{dt} (\vec{\omega}_1 \vec{k}) \right] \\
 &= 2 \left[ \vec{\omega}_1 \frac{dx'}{dt} \vec{i} + \vec{\omega}_1 \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \vec{\omega}_1 \frac{dz'}{dt} \vec{k} \right] \\
 &= 2 \left[ \vec{\omega}_1 \left( \frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} \right) \right] \\
 \vec{y}_c &= 2(\vec{\omega}_1 \vec{V}_R)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{also } \vec{y}_a &= \vec{y}_R + \left\{ \frac{d^2 \vec{0} \vec{0}'}{dt^2} + \left[ \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{0}' \right) + (\vec{\omega}_1 (\vec{\omega}_1 \vec{0}')) \right] \right\} \\
 \vec{y}_a &= \vec{y}_R + \vec{y}_e + \vec{y}_c \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \vec{0}' = a t \vec{i} \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \vec{0} \vec{M} = \frac{1}{2} a t^2 \\ \vec{0} \vec{M} = b t^2 \vec{j} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{k} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$