Chapitre 3 : Méthode des Variables Instrumentales

3-1) Introduction / Révision MMC (methode moindre carré)

Nous avons vu dans les cours précedent la formule de l'estimation par moindres carrés : $\hat{\theta}$

$$\boxed{\hat{\theta} = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi^T y}$$

- $\hat{\theta}$: estimateur
- ϕ : matrice des mesures y_i ; u_i
- y : sortie du système réel

Nous avons donc les formules :

$$(*) \quad y(k) = \phi^T \cdot \theta + z(k) \longrightarrow \text{sortie du processus}$$

$$\hat{y}(k) = \phi^T \cdot \hat{\theta} \longrightarrow \text{sortie estimée}$$

$z(k)$: le signal de perturbations.

La formule $(*)$ sous forme Matricielle :

$$\boxed{Y = \phi^T \cdot \theta + Z}$$: forme matricielle pas de (k)

2) Estimateur biaisé :

Pour avoir une bonne estimation il faut que l'estimateur soit "Non biaisé".

→ Formule d'un estimateur biaisé :

$$\hat{\theta} = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi^T \cdot y + \theta_0$$

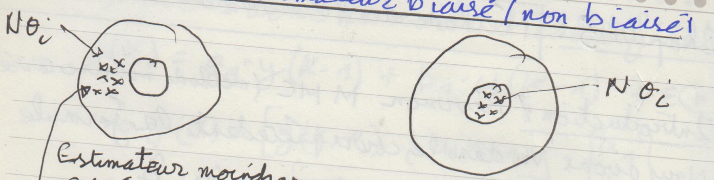
tel que
$\theta_0 \neq 0$
$\theta_0 = cte$ {vecteur}

θ_0 : le biais d'un estimateur biaisé

→ θ_0 vecteur possede une variation à moyenne non nulle.

3N

Schéma d'un estimateur biaisé / non biaisé



Estimateur moindres carrés biaisé $\theta_0 \neq 0$

Fig 3-1: biais d'un MC

Estimateur moindres carrés non biaisé $\theta_0 = 0$ $\Rightarrow$ estimateur précis

~~dans une estimation on a N mesure de y dans la matrice Φ, donc on a N valeurs estimés dans $\hat{\Theta} = [N \text{ points}]$~~ → faux

Nous avons :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \cdot y$$

$$y = \underbrace{\Phi^T \cdot \theta + z}_{\text{corrélation}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = f(z)}$$

$$\hat{\theta} = f(\Phi, z)$$

de la qualité / Nature du bruit z, dépend la qualité de l'estimateur s'il est biaisé ($\theta_0 \neq 0$) ou non ($\theta_0 = 0$) :

a) $\boxed{\theta \neq 0}$: si $z(k)$ est un signal non corrélé avec la donnée, soit $\phi(k) = \begin{bmatrix} y_1 & \vdots \\ y_2 & \vdots \end{bmatrix}$

→ si $z(k)$ bruit blanc de moyenne nulle $\Rightarrow$ l'estimateur est sans biais.

3) Méthode des Variables Instrumentales : (VI)

Cette méthode utilise ~~utilise~~ le même concept de la méthode des moindres carrés (MC), donc la ~~f~~ même formule générale :

$$\boxed{\hat{\theta} = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi^T \cdot y}$$

sauf que : le vecteur de regression (d'identificat… $\phi(k)$ est remplacé dans cette méthode par un vecteur définit (choisit) par l'utilisateur.

- le nouveau vecteur (à la place de $\phi(k)$) est appelé $z(k)$: "vecteur d'instrumentation".
- Pour le calcul du vecteur de paramètres estimé $\hat{\theta}$, seul le vecteur colonne $\phi(k)$ est remplacé dans les deux termes de l'équation : $\hat{\theta} = (\phi\,\phi)\,\phi\,y$

soit : $$\boxed{\hat{\theta} = (z(k) \cdot \phi(k))^{-1} (z(k))^T\, y(k)}$$

- Pour que cette méthode ~~d'~~ identification par VI donne un bon résultat, il faut que le vecteur d'instrument $z(k)$ ne soit pas corrélé avec l'erreur de l'équation $\varepsilon(k)$

$\Rightarrow$ bien choisir $z(k)$? $\rightarrow$ page suivante...

34

- Le choix de $Z(K)$ se fait par : entrées du Σ

$$Z(K) = \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} \cdot \hat{u}(K)$$

$\hat{A}$ et $\hat{B}$ deux polynomes en $f(z^{-1})$ qui seront estimés par identification préalable par moindres carrés (en plus de $\hat{\Theta}$ une MC, (A) et (B) aussi identifiés par MC).

```
f=[1 0;1 1;1 3;1 4;1 5.3;1 6.8;1 8.1;1 9]
y_mes=[1 ;9 ;9 ; 21; 23; 25; 28; 30]

%indetification par
teta_estim=inv(f'*f)*f'*y_mes
y_estim=f*teta_estim
e=y_mes-y_estim

%plotter
pause
plot(y_mes);hold on;plot(y_estim,'r');
pause
clear fig
pause

%indetification par variables instrumentales
f2=[f(:,1) f(:,2)+.5*e*rand]
teta_estim2=inv(f2'*f)*f4'*y_mes
y_estim2=f2*teta_estim2
e2=y_mes-y_estim2

%plotter
plot(y_mes);hold on;plot(y_estim,'g');hold
on;plot(y_estim2,'r');
```

Exercices 1 :

Soit le système discret identifié par les points suivants:

n	0	1	2
u(n)	1	-1	1
y(n)	1,04	-0,52	0,74

On veut identifier ce système en utilisant le modèle suivant :

$y(n) = -a_0 * y(n-1) + b_0 * u(n) + \eta$ avec η : signal de perturbations.

Première partie :

1) Calculer la matrice d'estimation selon l'ordre suivant : $\phi = \begin{bmatrix} yi & ui \\ \vdots & \vdots \\ YN & uN \end{bmatrix}$
2) Définissez la dimension du vecteur $\hat{\theta}$ et de quoi est composé le vecteur $\hat{\theta} = [???]$.
3) Calculer l'estimation des paramètres $\hat{\theta}$. par la methode des moin...
   Aide pour le calcul numérique, on donne : $inv(\phi^T * \phi) * \phi^T = \begin{bmatrix} -1.92 & -1.92 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
4) Calculer la fonction de transfert discrète du système : $G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}$
5) Calculer la sortie estimée $\hat{y}$ et l'erreur d'estimation : $e = y - \hat{y}$

Deuxième partie :

On va supposer que l'erreur d'estimation pour cet exercice n'est pas celle que vous avez calculer et on va imposer une nouvelle valeur de l'erreur $e = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$.

6) Calculer les erreurs d'estimation e(1) et e(2). (L'erreur pour n = 1 et n = 2).
7) Calculer la nouvelle valeur de la sortie estimée : $\hat{y}_2$ et le critère d'estimation J.
8) Dessiner les deux signaux suivants : la sortie du système y et la nouvelle valeur de la sortie estimée $\hat{y}_2$.
9) Calculer : y(3) et y(4) ainsi que $\hat{y}_2(3)$ et $\hat{y}_2(4)$ pour u(3) = -1 et u(4) = 1.