Solution -TD 2 -

Solution 1: Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrons que:

1) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

soit $x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin (B \cap C))$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge \overline{x \in (B \cap C)}) \Leftrightarrow (x \in A \wedge \overline{(x \in B \wedge x \in C)})$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

$\Rightarrow$) Supposons que $A \subset B$ et montrons que $A \cup B = B$

(i.e: Montrons que: $\begin{cases} A \cup B \subset B \\ B \subset A \cup B \text{ (évident)} \end{cases}$)

Reste à montrer que $A \cup B \subset B$

soit $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow (x \in A \subset B \vee x \in B$

$\Rightarrow (x \in B \vee x \in B) \Rightarrow x \in B$.

donc $A \cup B \subset B$. d'où $A \cup B = B$

$\Leftarrow$) Supposons que $A \cup B = B$ et montrons que $A \subset$

on sait que: $A \subset A \cup B$ et $A \cup B = B$ donc

$A \subset A \cup B = B$, d'où $A \subset B$.

Finalement: $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

3) $A\cup B = A\cap C \iff B\subset A\subset C$.

$\Rightarrow$) Supposons que $A\cup B = A\cap C$

On a : $B\subset A\cup B = A\cap C \subset A \subset A\cup B = A\cap C \subset C$

$\Leftarrow$) supposons que : $B\subset A\subset C$.

On a : 1) $A\cup B = A$ (car $B\subset A$)

2) $A\cap C = A$ (car $A\subset C$)

De 1) et 2) on trouve que : $A\cup B = A\cap C$.

Solution 02 :

Soient E, F deux ensembles et $f : E\to F$ une applica

Démontrons que :

1) $\forall A,B\in P(E),\ f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

soit $y\in f(A\cap B) \iff (\exists x\in(A\cap B) \wedge y=f(x))$

$\iff ((x\in A \wedge x\in B)\wedge y=f(x)) \iff (x\in A\wedge y=f(x))\wedge(x\in B\wedge y=f($

$\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} y\in f(A)\wedge y\in f(B) \iff y\in[f(A)\cap f(B)]$.

donc $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

2) $\forall A,B\in P(E),\ f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

Soit $y\in f(A\cup B)\iff (\exists x\in(A\cup B)\wedge y=f(x))$

$\iff ((x\in A\vee x\in B)\wedge y=f(x)) \iff (x\in A\wedge y=f(x))\vee(x\in B\wedge y=$

$\iff y\in f(A)\vee y\in f(B)\iff y\in[f(A)\cup f(B)]$.

donc $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

(car l'équivalence donne les deux inclusions)

3) $\forall A \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$

Soit $x \in f^{-1}(F\setminus A) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus A \Leftrightarrow f(x) \notin A$

$\Leftrightarrow \overline{f(x) \in A} \Leftrightarrow \overline{x \in f^{-1}(A)} \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A)$

$\Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A)$.

Solution 3 :

* Décrivons l'image directe de $\mathbb{R}$ par "exp" :

$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x / x \in \mathbb{R}\} =]0, +\infty[$ (car $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2$. Déterminons :

- $f([0,1[) = \{x^2 / x \in [0,1[\} = [0,1[$.
- $f(\mathbb{R}) = \{x^2 / x \in]-\infty, +\infty[\} = [0, +\infty[$ (car $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(]-1,2[) = f(]-1,0[\cup [0,2[) = f(]-1,0[) \cup f([0,2[)$

  $=]0,1[\cup [0,4[= [0,4[$
- $f^{-1}(\{3\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{3\}\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \in \{3\}\}$

  $= \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 3\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.
- $f^{-1}([0,1[) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [0,1[\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \in [0,1[\}$

  $=]-1, 1[$.

Solution 04 :

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une application telle que $f(x) = x^2 - 1$.

* Étudions la bijection de f :

a) Injectivité de f :

Soient $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ et $f(x_1) = f(x_2)$,

donc $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (car $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$)

donc f est bijective.

b) Surjectivité de f :

f est surjective $\overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall y \in [0, +\infty[, \exists x \in [1, +\infty[$ et $y = f$

Soit $y = f(x) \Rightarrow x^2 - 1 = y \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}$ existe $\forall y \in [1, +\infty$

donc f est surjective.

Comme f est injective et surjective alors f est une application bijective.

Solutions 5:

1) Soient $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose que $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injectif. Montrons que : $f_1 = f_2$

Soit $x \in E$, donc : $g \circ f_1 = g \circ f_2 \Leftrightarrow \forall x \in E \, (g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in E, g(f_1(x)) = g(f_2(x)) \xRightarrow{g \text{ injective}} \forall x \in E : f_1(x) = f_2(x)$

donc $f_1 = f_2$

2) Soient $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$ t.q : $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ et f surjective. Montrons que $g_1 = g_2$

~~on a~~ Soit $x \in E$: $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Leftrightarrow \forall x \in E : (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x)$

$\Leftrightarrow g_1(f(x)) = g_2(f(x))$

Comme f surjective : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

donc on peut remplacer tout $y \in F$ par $f(x)$ et alors :

$\forall x \in E, g_1(f(x)) = g_2(f(x)) \Rightarrow g_1(y) = g_2(y), \forall y \in F$

d'où $g_1 = g_2$.