Série de TD N°4

Exercice n°1 :

1. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$$
Montrer que $*$ est commutative, non associative et que 1 est élément neutre.
2. On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, x * y = \sqrt{x^2+y^2}$$
Montrer que $*$ est commutative, non associative et que 0 est élément neutre.
Montrer que $\mathbb{R}^{+*}$ n'a pas de symétrique pour $*$
3. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$$
Montrer que l'application $x \mapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.en déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice n°2 : la famille suivantes de vecteur est libre dans $\mathbb{R}^3$?

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

Exercice n°3 :

1. Montrer que les vecteurs $\vec{v_1} = (0,1,1), \vec{v_2} = (1,0,1), \vec{v_3} = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Trouver les composantes du vecteur $w = (1,1,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3)
2. Montrer que les vecteurs $\vec{v_1} = (1,1,1), \vec{v_2} = (-1,1,0), \vec{v_3} = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur
$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ et $w = (1,2,-3)$ $\vec{w} = (1,1,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Exercice n°4 : soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère dans E une famille libre de 4 vecteurs $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$

- Les familles suivantes de vecteurs de E sont-elle liées ?

1. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_2} + \vec{e_3}, \vec{e_4})$.

3. $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3})$.

4. $(2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1})$.

Exercice n°5 : *on considère le sous-espace vectoriel F_1 de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions du système suivant :*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Et le sous espace vectoriel F_2 de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (E'_1) \\ x_4 = 0 & (E'_2) \end{cases}$$

- *Préciser F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ et une base de ces trois sous-vectoriels de $\mathbb{R}^4$.*