Université de RELIZANE

Faculté des Sciences et Technologies

1er année Sciences de la matière

Test de Math 1

Exercice n°1: soit $g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 \\ n \mapsto (n,(n+1)^2) \end{array}$ une application

1) g est-elle injective ? 2) Déterminer l'image réciproque de {(1 ,1)}. 3) Que peut-on dire quand à la surjection de g ?

Exercice n°2 : on considère la relation $\Re$ sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ définie par : $(a,b)\Re(c,d) = bc$

- Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
- Donner les classes d'équivalence des couples (0,b) et (a, a-b).

Exercice n°3 :

1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x}$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^4+x}$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)$

Exercice n° 1 : (03,5 pts)

1) g est injective $\Rightarrow g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ 0,5

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1, (n_1+1)^2) = (n_2, (n_2+1)^2)$

$\Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \end{cases}$ 0,5

$\Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ n_1 = n_2 \end{cases}$ 0,5 Donc g est injective

2) l'image réciproque de $\{(1,1)\}$:

$(n, (n+1)^2) = (1,1)$

$\begin{cases} n = 1 \\ (n+1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n^2+2n+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n^2+2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n(n+2) = 0 \end{cases}$ 01

Ce qui est faux. Donc l'image réciproque de l'ensemble

$\{(1,1)\}$ est vide.

③ la surjection : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \ni y = f(x)$.

d'aprés la qst précédente, g n'est pas surjective. 01

Exercice n°2 : (04.5 pts)

1. On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ défini par

$(a,b) \mathcal{R} (c,d)$ éq : $ad = bc$. 01

① $\mathcal{R}$ est réflexive : en effet, $ab = ba$ d'où $(a,b) \mathcal{R} (a,b)$.

② $\mathcal{R}$ est symétrique, en effet, si $(a,b) \mathcal{R} (c,d)$ alors $ad = bc$

d'où $cb = da$ donc $(c,d) \mathcal{R} (a,b)$ 01

③ $\mathcal{R}$ est transitive : en effet, si $(a,b) \mathcal{R} (c,d)$ et $(c,d) \mathcal{R} (e,f)$

alors on a : $ad = bc$ et $cf = de$. Multiplions les deux

membres de la 2ème équation par b qui est non nul, d'où

$bcf = bde$ donc : $adf = bde$. 01

$d \neq 0$ alors $af = be$, donc $(a,b) \mathcal{R} (e,f)$.

2. Classes d'équivalence des couples $(0,b)$ et $(a, a-b)$:

On a : $Cl((a,b)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ tel que } (a,b) \mathcal{R} (x,y)\}$.

1. $(0,b) \mathcal{R} (x,y)$ éq : $bx = 0$, donc $x = 0$. 0,75

Soit $Cl((0,b)) = \{(0,y), y \in \mathbb{Z}^*\}$.

2. $(a, a-b) \mathcal{R} (x,y)$ éq : $(a-b)x = ay$. Soit ~~Cl((a,a-b))~~ $x = \frac{ay}{a-b}$

$$Cl((a,a-b)) = \left\{\left(\frac{ay}{a-b}, y\right), y \in \mathbb{Z}^*\right\}.$$ 0,75

Exercice n°3 : (02 pts)

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ 0,5

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) = 1$. 0,5

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 + x} = 0$ 0,5

4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) = 0$. 0,5