

## Chapitre II : Oscillations libres des systèmes amorties

### II.1. Oscillations libres des systèmes amorties

La présence de frottements implique une dissipation d'énergie sous forme de chaleur ; on observe alors :

- soit des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps,
- soit un retour à l'équilibre sans oscillation.

On parle alors d'**amortissement**. L'expression de la force de frottement visqueux est la suivante :

$$\mathbf{F}_q = -\alpha \dot{\mathbf{q}}$$

Tel que :

$\alpha$  : est le coefficient de frottement visqueux.  $\alpha : [N. s/m]$ .

$q$  : la coordonnée généralisée du système ;

$\dot{q}$  : La vitesse généralisée du système. Le signe moins (-) vient du fait que cette force s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire à la vitesse. Dans un mouvement unidimensionnel  $x$  la force s'écrit sous la forme :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}$

### II.2. Equation de Lagrange dans un système amorti :

En tenant compte de la force de type frottement fluide (coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ ), l'équation de Lagrange dans ce cas devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q$$

Sous l'action des forces de frottements, le système dissipe (perde) de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, il y a donc une relation entre la force  $\mathbf{F}_q$  et la fonction de dissipation  $\mathbf{D}$  d'un côté et la fonction de dissipation et le coefficient de frottement visqueux  $\alpha$  :

$$F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$$

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

#### II.2.1. Equation différentielle : système masse-ressort-amortisseur

Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple). L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant la force de frottement visqueux.

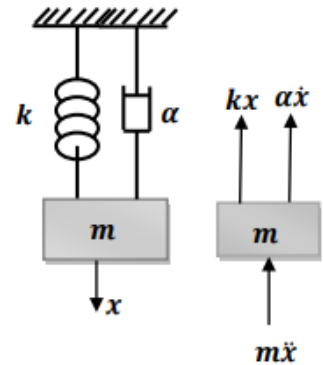
A une dimension, l'équation de Lagrange s'écrit :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$

L'énergie cinétique du système :  $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système :  $U = \frac{1}{2} k x^2$

La fonction de dissipation :  $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

La fonction de Lagrange :  $L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$



$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = m \ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \alpha \dot{x} \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{En remplaçant dans l'équation de Lagrange}} m \ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

- Souvent l'équation différentielle est écrite sous une forme dite réduite :  $\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ .

### II.2.2 La solution de l'équation différentielle : Système masse-ressort-amortisseur

L'équation différentielle du mouvement :  $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.

La fonction  $x(t) = D e^{st}$  est une solution particulière de cette équation différentielle à condition que  $s$  soit une des deux racines  $s_1$  et  $s_2$  de l'équation du second degré, appelée équation caractéristique.  $s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 = 0$

La solution générale de l'équation prend la forme :  $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

Tel que :  $\begin{cases} s_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases} \Rightarrow$  on voit bien que la solution dépend des valeurs de  $\delta$  et  $\omega_0$ .

**1<sup>er</sup> cas :**  $\delta < \omega_0$  ( $0 < \xi < 1$ ) : système sous-amorti ou faiblement amorti  $\Rightarrow \delta^2 - \omega_0^2 < 0$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -\delta + \sqrt{j^2(\delta^2 - \omega_0^2)} = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta + j\omega_a \\ s_2 = -\delta - \sqrt{j^2(\delta^2 - \omega_0^2)} = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta - j\omega_a \end{cases}$$

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  : c'est la pulsation des oscillations amorties

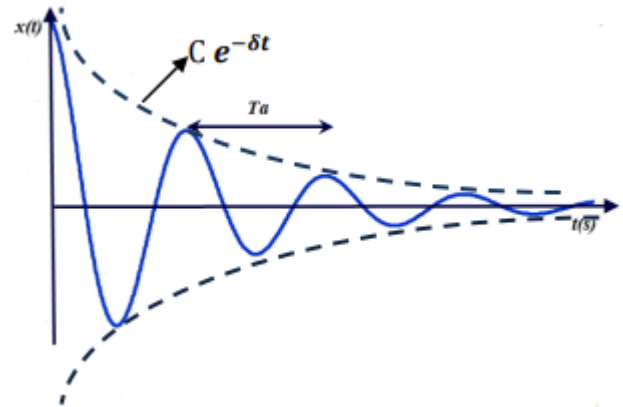
$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{Donc : } T_\alpha = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$T_\alpha$  : pseudo-période

**La solution :**  $x(t) = C e^{\delta t} \sin(\omega_\alpha t + \varphi)$

**Remarques :**

- $x(t)$  représente un mouvement vibratoire.
- L'amplitude  $C e^{-\delta t}$  est décroissante :  $x(t)$  tend vers 0 quand  $t$  augmente.
- l'élongation  $x(t)$  va osciller en restant comprise entre  $-C e^{-\delta t}$  et  $C e^{-\delta t}$ . Ces deux exponentielles représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur c'est-à-dire les positions extrémales prises par  $x$  lorsque le temps s'écoule.



**2<sup>ème</sup> cas :**  $\delta = \omega_0$  ( $\xi = 1$ ) : **Amortissement critique :**  $s_1 = s_2 = -\delta$

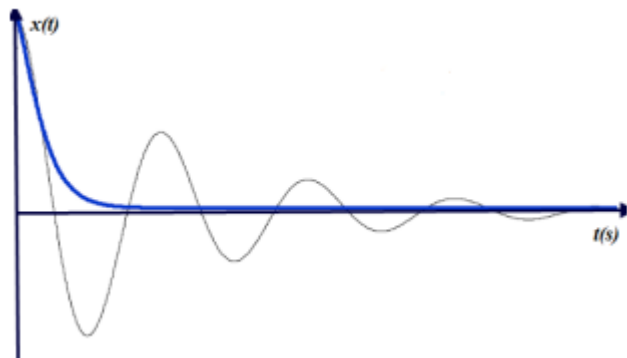
La solution :  $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$

Si  $\delta = \frac{\alpha}{2m}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km}$  :

Valeur critique du coefficient de frottement.

**Remarques :**

- $x(t)$  n'est pas oscillatoire car il ne contient pas un terme sinusoïdal.
- $x(t)$  tend vers 0 sans oscillation quand le temps augmente.
- Le système revient à sa position d'équilibre le plus rapidement possible.

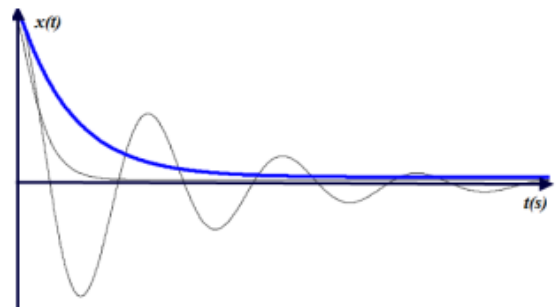


**3<sup>ème</sup> cas :**  $\delta > \omega_0$  ( $\xi > 1$ ) : **système sur- amorti ou fortement amorti**  $\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$

**La solution :**  $x(t) = e^{-\delta t} (C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t})$

**Remarques :**

- $x(t)$  tend vers 0 sans oscillation quand le temps augmente.
- $x(t)$  est un mouvement non sinusoïdal



### II.3 L'oscillateur harmonique électrique

Nous allons voir maintenant qu'il existe un autre type d'oscillateur harmonique amorti dans un autre domaine de la physique : l'électricité.

Soit un circuit électrique, constitué des 3 éléments de base mis en série :

- un résistor de résistance  $R$  ;
- un condensateur de capacité  $C$  ;
- et une bobine d'inductance  $L$

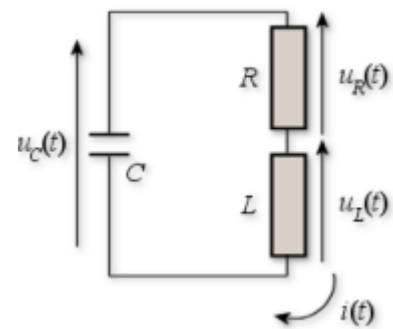
Selon la loi de Kirchhoff :

$$U_R + U_C + U_L = 0 \Rightarrow Ri(t) + \frac{1}{C}q + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q + L \frac{dq^2}{dt^2} = 0 \Rightarrow R\dot{q} + \frac{1}{C}q + L\ddot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \delta = \frac{R}{2L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \text{ Donc : } \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{R}{2L} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \end{cases}$$



#### Remarque :

- Pour un amortissement critique :  $\delta = \omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  Donc :  $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

### II.4 Décrément logarithmique

**Définition :** C'est le logarithme du rapport de 2 amplitudes successives des oscillations amorties.

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)}; t_2 = t_1 + T_a$$

Ou  $x(t_1)$  et  $x(t_1 + T_a)$  représentent les amplitudes des oscillations aux instants  $t_1$  et  $(t_1 + T_a)$ ; généralement ces deux instants sont choisis comme correspondant à deux extrema successifs de même signe. Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes pendant une période.

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_a)}$$

pour un système amorti :

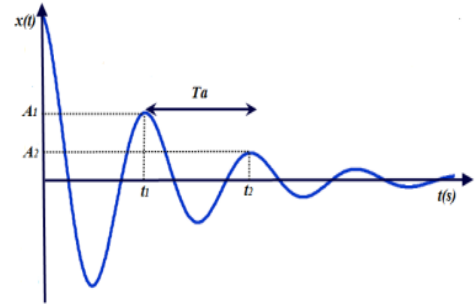
$$x(t) = Ce^{-\delta t} \sin(\omega_\alpha t + \varphi)$$

$$\Rightarrow D = \ln \frac{Ce^{-\delta t_1} \sin(\omega_\alpha t_1 + \varphi)}{Ce^{-\delta(t_1 + T_\alpha)} \sin(\omega_\alpha(t_1 + T_\alpha) + \varphi)}$$

$$\Rightarrow D = \ln(e^{\delta T_\alpha}) = \delta T_\alpha$$

$$\delta T_\alpha = \delta \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} = \xi \omega_0 \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\text{donc : } D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \delta T_\alpha = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$



### Remarques :

- Pour plusieurs périodes :  $D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + nT_\alpha)} = n\delta T_\alpha = 2\pi \frac{n\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

### II.5 Facteur de qualité

Pour décrire l'amortissement d'un système oscillant mécanique ou électrique on emploie le facteur de qualité **Q** défini par l'expression suivante :

Dans un système mécanique (**m, k**):  $Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2}{\pi \alpha x_0^2 \omega_0} = \frac{m \omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2\xi}$

Dans un système électrique (RLC):  $Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} l \omega_0^2 q_0^2}{\pi R q_0^2 \omega_0} = \frac{L \omega_0}{R}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\xi}$

### Remarque :

- Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système oscillant est grande. Or **Q** est d'autant plus grand pour un  $\omega_0$  donné, que l'amortissement est faible. Un système très amorti a un **Q** faible.

## Chapitre III :

### Oscillations forcées amorties : Systèmes à un degré de liberté

#### Introduction :

On a vu que l'amortissement des oscillations était dû à une diminution de l'énergie mécanique sous forme de chaleur dissipée. Pour compenser ces pertes d'énergies et entretenir (conserver) les oscillations, il faut une source d'énergie à travers une force extérieure. On va donc rajouter une force extérieure souvent dite excitatrice. Il va donc y avoir une force supplémentaire qu'il vaut mieux qu'elle soit colinéaire au mouvement et qu'elle soit le plus possible dans le sens du mouvement. Dans ce chapitre, on étudie la réponse d'un système amorti à 1 ddl à une excitation harmonique sinusoïdale produite par une force extérieure au système. Ce type d'excitation se rencontre fréquemment dans l'industrie (machines tournantes, ventilateurs, moteurs, pompes ...).

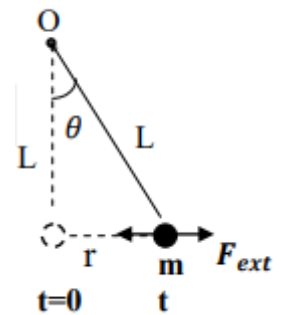
#### III.1 Equation différentielle du mouvement

a) Pour un mouvement de translation, on écrit :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F_{ext}$

b) Pour un mouvement de rotation avec un angle  $\theta$ , on écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + M(F_{ext})$$

$$\text{tel que : } M(F_{ext}) = F_{ext} \cdot L = \frac{\partial r}{\partial \theta} |F_{ext}|$$



$M(F_{ext})$  : Est le moment de la force appliquée [N.m]. Le moment : caractérise la capacité d'une force à faire tourner un objet autour d'un point.

$L$  : Le bras du levier : est la distance droite d'action de la force.

$r$  : La distance parcourue par la masse dans la direction de l'action de la force.

##### III.1.1 Exemple : système masse-ressort-amortisseur

Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple). L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant une force extérieure  $F_{ext}$

A une dimension, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_{ext}$$

Prenons une force sinusoïdale appliquée à la masse  $m$  :

$$F_{ext} = F_0 \sin \omega t.$$

**L'énergie cinétique du système** : c'est l'énergie cinétique de la

masse  $m$  :  $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

**L'énergie potentielle du système** : c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort :  $U = \frac{1}{2} k x^2$

**La fonction de dissipation** :  $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

La fonction de Lagrange :  $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \end{array} \right\} \Rightarrow m \ddot{x} - (-kx) = -\alpha \dot{x} + F_0 \sin \omega t \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

Tels que :  $\left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{\alpha}{2m} [1/s] : \text{Facteur d'amortissement} \\ \xi = \frac{\delta}{\omega_0} [\text{sans unité}] : \text{rapport d'amortissement} \end{array} \right.$

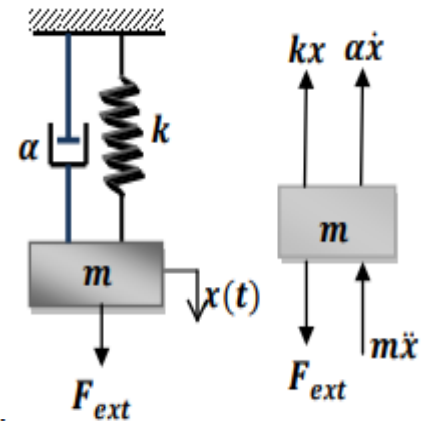
Nous obtenons donc une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

### III.2 Solution de l'équation différentielle du mouvement

La solution générale de cette équation différentielle est la somme de deux termes :

- Une solution de l'équation sans second membre : solution homogène  $x_H(t)$ ,
- Une solution de l'équation avec second membre : solution particulière  $x_P(t)$ .

La solution totale de l'équation du mouvement sera donc :  $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$



### III.2.1 Solution homogène :

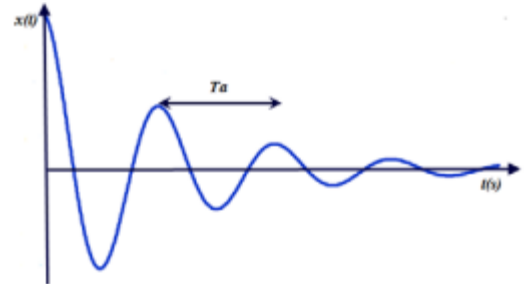
La solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Il apparaît que la solution de l'équation différentielle homogène est tout simplement la solution trouvée pour l'oscillateur harmonique amorti en régime libre dans le cas des oscillations faiblement amorties :  $x_H(t) = Ce^{-\delta t} \sin(\omega_\alpha t + \varphi)$  avec  $\omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

#### Remarque :

- La solution générale de l'équation sans second membre correspond à un régime transitoire (qui ne dure qu'un certain temps)



### III.2.2 Solution particulière :

Lorsque la composante  $x_H(t)$  devient vraiment négligeable, il ne reste plus que la solution particulière, qui est la solution imposée par la fonction d'excitation. Nous disons que nous sommes en régime forcé ou régime permanent. La force excitatrice oblige le système mécanique à suivre une évolution temporelle équivalente à la sienne. Donc si  $F_{ext}$  est une fonction sinusoïdale de pulsation  $\omega$ ; alors la solution particulière  $x_P(t)$  sera une fonction sinusoïdale de même pulsation  $\omega$ . Les oscillations de la masse ne sont pas forcément en phase avec la force excitatrice et présente un déphasage noté  $\varphi$ .

La solution particulière correspondant au régime permanent s'écrit donc :

$$x_P(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la notation complexe.

La grandeur complexe associée à  $x(t)$  s'écrit :  $y_P(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$  et  $F_{ext} = F_0 e^{j\omega t}$

Déterminer les grandeurs  $A$  et  $\varphi$  revient à chercher le module de l'amplitude complexe.

#### III.2.2.1 Calcul de l'amplitude A

$y_P(t)$  Vérifie l'équation différentielle avec second membre :  $\ddot{y}_p + 2\delta\dot{y}_p + \omega_0^2 y_p = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} = B e^{j\omega t}$

on calcule la dérivée première puis le dérivé second et en remplace dans l'équation précédente,

l'amplitude A sera : 
$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

#### III.2.2.2 Calcul de $\varphi$

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j] A = \begin{cases} B e^{-j\varphi} \\ B (\cos\varphi - j \sin\varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) = B \cos\varphi \\ 2\delta\omega A = -B \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{Arctg} \left( \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)$$

$$\text{Donc : } x_p(t) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \sin \left[ \omega t + \text{Arctg} \left( \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \right]$$

### III.3 Etude du régime permanent : phénomène de résonance en amplitude

**III.3.1 La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de  $\xi$  :** Soit  $A(\omega)$  l'amplitude de la solution particulière caractérisant le régime permanent (forcé)

$$A(\omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$A(\omega) = \frac{B}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (2\delta)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{B/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Tels que :  $A_0 = \frac{B}{\omega_0^2}$  et  $\xi = \frac{\delta}{\omega_0}$  avec  $B = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$  Donc :  $A_0 = \frac{F_0}{k}$

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Posons  $r = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A(r) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$  et cherchons la valeur maximale de  $A(r)$ .

$A(\omega)$  est maximale quand le dénominateur est minimal.

Posons  $r = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A(r) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$  et cherchons la valeur maximale de  $A(r)$ .

$$A(r)_{\max} \Leftrightarrow \frac{dA(r)}{dr} = 0 \Rightarrow [2(1-r)^2(-2r) + 8\xi^2 r] = 0$$

$$\frac{dA(r)}{dr} = 0 \Rightarrow -4r[1-r^2-2\xi^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \sqrt{1-2\xi^2} \end{cases}$$

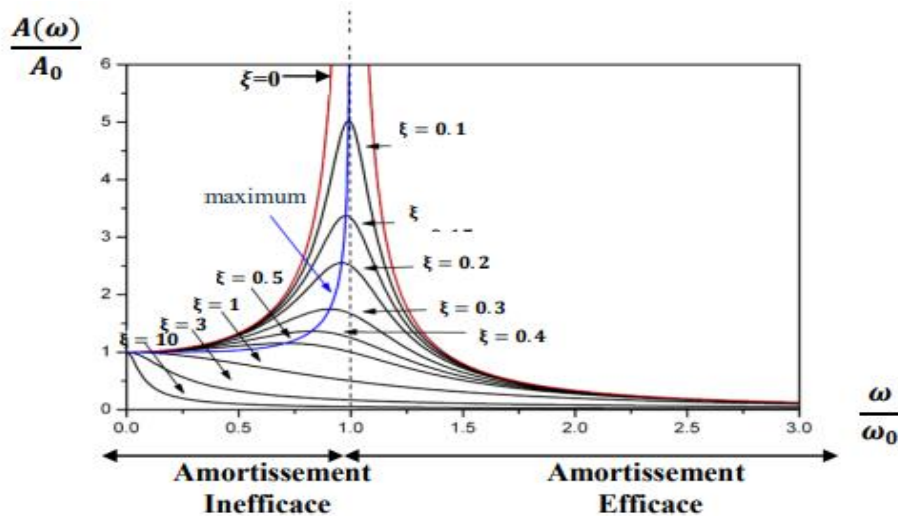
On a un minimum ou un maximum selon le signe du deuxième dérivée :

$$\frac{d^2 A(r)}{dr^2} = 12r^2 + 8\xi^2 - 4, \text{ donc : } \begin{cases} r = 0 \Rightarrow \frac{d^2 A(r)}{dr^2} = 8\xi^2 - 4 < 0 ; \text{ car } 0 < \xi < 1 \\ r = \sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow \frac{d^2 A(r)}{dr^2} = 8 - 16\xi^2 > 0 ; \text{ car } 0 < \xi < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 0 \dots \dots \text{solution refusée} \\ \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1-2\xi^2} \end{cases}$$

Donc :  $\frac{A(\omega)}{A_0}$  est maximale pour  $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^* = \sqrt{1-2\xi^2} < 1 \Rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de  $\xi$  est représentée sur la figure suivante :



### Remarques :

- L'amplitude  $A$  augmente quand le rapport d'amortissement  $\xi$  diminue.
- L'amplitude de vibration atteint un maximum quand  $\omega \cong \omega_0$  : on dit qu'il ya résonance : la valeur maximale  $(\frac{\omega}{\omega_0})$  (correspondant à la valeur maximale de l'amplitude) n'est pas égale à 1 mais égale à  $\sqrt{1-2\xi^2} < 1$

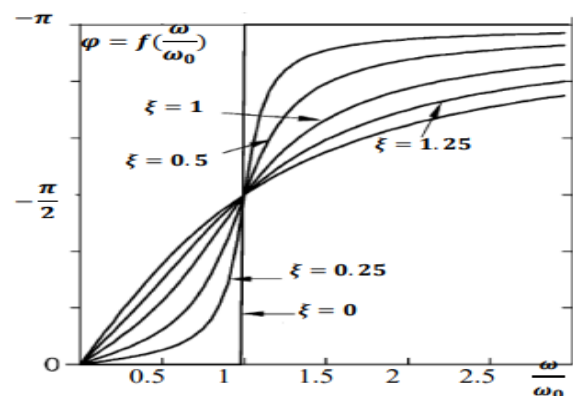
### III.3 .2 La variation de la phase en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de $\xi$ :

Soit  $\varphi$  la phase initiale de la solution particulière caractérisant le régime permanent (forcé) tel

$$\text{que : } \tan \varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

- Nous remarquons que  $\tan \varphi$  est négatif. Cela paraît normal qu'il y ait un retard de l'oscillateur par rapport à la force qui entretient le mouvement. L'oscillateur harmonique essaie de suivre le mouvement en étant ralenti par les frottements, donc il doit obligatoirement prendre du retard par rapport à l'oscillation excitatrice donc avoir un déphasage négatif. Ce déphasage est dépendant de la pulsation de la force  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)} = \\ &= \frac{\frac{-2\delta}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{-2(\frac{\delta}{\omega_0})(\frac{\omega}{\omega_0})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ \tan \varphi &= \frac{-2\xi(\frac{\omega}{\omega_0})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned}$$



• Si  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  ( $\omega = \omega_0$ )  $\Rightarrow \tan \varphi = -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\pi/2$  ;  $\forall \xi$ .

• Si  $\xi = 0 \Rightarrow \tan \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$  ou  $\varphi = -\pi$

### Remarques :

- L'oscillateur est en résonance de phase quand  $\varphi = -\pi/2$  pour  $\omega = \omega_0$ .
- L'oscillateur est toujours en retard de phase par rapport à la force et ce retard augmente lorsque la pulsation augmente.
- L'oscillateur et la force sont en phase pour  $\omega = 0$

Conclusions : Selon la valeur de  $\xi$  on a 3 cas possibles :

1<sup>er</sup> cas : Faibles fréquences :  $\xi \ll 1$  ( $\omega \ll \omega_0$ )  $\rightarrow \begin{cases} A \approx A_0 = \frac{F_0}{k} \\ \varphi = 0 \end{cases}$

2<sup>ème</sup> cas : Hautes fréquences :  $\xi \gg 1$  ( $\omega \gg \omega_0$ )  $\rightarrow \begin{cases} A \approx 0 \\ \varphi = -\pi \end{cases}$

3<sup>ème</sup> cas : La résonance :  $\xi = 1$  ( $\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$ )  $\rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \sqrt{1-2\xi^2}, \frac{A_{\max}}{A} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

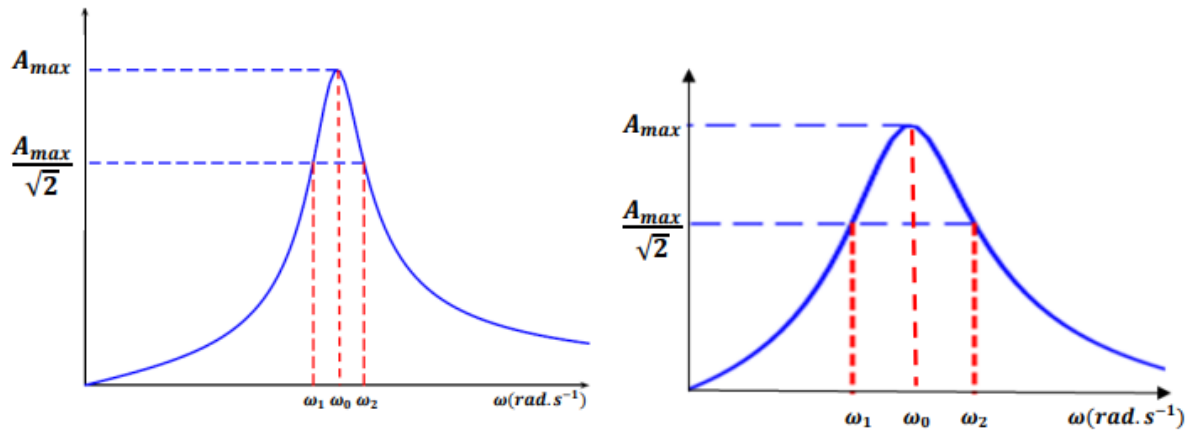
### III.3 .3 Phénomène de résonance et Facteur de qualité

- Dans les systèmes électriques, ce phénomène permet de calculer le facteur de qualité  $Q$  qui

augmente lorsque l'amplitude maximale augmente  $Q = \frac{A_{\max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\xi}$

• Une autre méthode pratique pour déterminer le facteur de qualité :  $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$

- Pour caractériser l'acuité (intensité) de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une bande passante :  $\omega_2 - \omega_1$

**Conclusions :**

- Quand  $\xi$  augmente  $\Rightarrow Q$  diminue  $\Rightarrow \omega_2 - \omega_1$  augmente  $\Rightarrow$  la courbe de résonance est plus large  $\Rightarrow$  diminution de l'amplitude de résonance donc de la qualité aussi.
- Les extrémités de la bande passante correspondent à une amplitude de vitesse  $\sqrt{2}$  fois plus petite qu'à la résonance