

Le calcul d'une transformation thermodynamique

Le calcul d'une transformation thermodynamique consiste à :

- Déterminer les paramètres du système au début et à la fin de la transformation ;
- Déterminer les variations des variables et des fonctions d'état au cours de la transformation ;
- Déterminer les quantités de la chaleur et du travail mis en jeu entre le système et son milieu extérieur lors de la transformation.

Les transformations thermodynamiques de base Dans ce paragraphe, nous nous intéressons uniquement aux transformations de base à savoir :

1- Transformation isochore (V=Cte)

2- Transformation isobare (P=Cte)

3- Transformation isotherme (T=Cte)

4- Transformation Adiabatique (Isentrope) (Q=0 et S=Cte)

2.9.1. Transformation Isochore (V=Cte) En vertu de l'équation des gaz parfaits :

$$P.V = r.T$$

a) L'équation relative à une transformation isochore ($V=Ct$) : peut être déduite de la sorte :

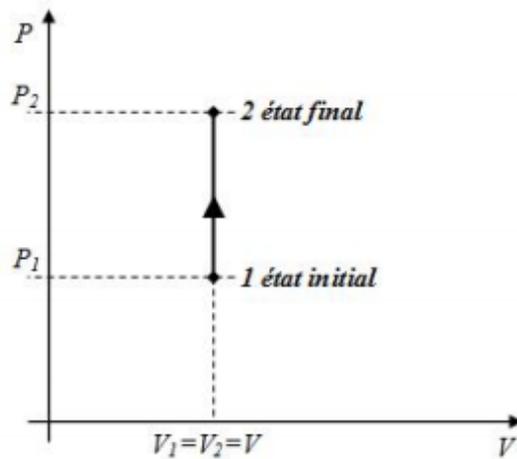
$$P = \frac{r}{V} \cdot T = C \cdot T$$

Avec, C : c'est une constante, où :

$$C = \frac{P}{T}$$

D'où entre deux états d'équilibre (1) et (2) d'une transformation isochore, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (\text{Loi de Charles})$$



Représentation graphique d'une transformation isochore.

b) Travail extérieur :

Puisque $V=Cte$, $dV=0$ et par conséquent :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV = 0$$

c) Quantité de chaleur :

$$Q_{1-2} = C_V.(T_2 - T_1)$$

d) Energie interne :

D'après le 1^{er} principe, on a : $\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} + W_{1-2}$

Avec, $W_{1-2} = 0$

Donc : $\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} = C_V.(T_2 - T_1)$

Il est clair que pour une transformation isochore, la quantité de chaleur accompagnant la transformation représente la variation en énergie interne du système.

e) Enthalpie :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_p.(T_2 - T_1)$$

f) Entropie :

$$\Delta S_{1-2} = C_V \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Transformation Isobare ($P=Cte$)

En vertu de l'équation des gaz parfaits :

$$P.V = r.T$$

a) L'équation relative à une transformation isobare ($P=Cte$) : peut être déduite de la sorte :

$$V = \frac{r}{P}.T = C.T$$

Avec, C : c'est une constante, où :

$$C = \frac{V}{T}$$

D'où entre deux états d'équilibre (1 et 2) d'une transformation isobare, on a :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{Où} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (\text{Loi de Gay-Lussac})$$

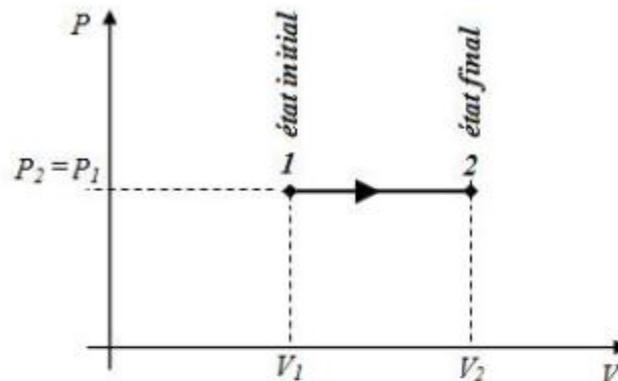


Figure 2. 4. Représentation graphique d'une transformation isobare.

b) Travail extérieur :

Puisque $P=Cte$, on a :

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 P.dV = P(V_2 - V_1)$$

W peut être exprimé en fonction de température, de l'équation d'état des gaz parfaits,

$$V_1 = \frac{r.T_1}{P_1} \quad \text{Et} \quad V_2 = \frac{r.T_2}{P_2}$$

D'où : $W_{1 \rightarrow 2} = r(T_2 - T_1)$

c) Quantité de chaleur :

$$Q_{1\rightarrow 2} = C_p \cdot (T_2 - T_1)$$

d) Energie interne :

La variation de l'énergie interne est donnée par :

$$\Delta U_{1\rightarrow 2} = C_v \cdot (T_2 - T_1)$$

e) Enthalpie :

$$\Delta H_{1\rightarrow 2} = H_2 - H_1 = C_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Dans ce cas : $\Delta H = Q$ (voir quantité de chaleur).

f) Entropie :

$$\Delta S_{1\rightarrow 2} = C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Transformation Isotherme ($T=Cte$)

a) L'équation relative à la transformation isotherme est tirée à partir de l'équation d'état :

$$P \cdot V = n \cdot T$$

Pour $T=Cte$, l'équation d'état devient :

$$P \cdot V = Cte$$

En réécrivant cette équation pour les deux points de la transformation, on a :

$$P_1 \cdot V_1 = Cte$$

$$P_2 \cdot V_2 = Cte$$

D'où :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

On voit que, les pressions dans ce cas sont inversement proportionnelles aux volumes.

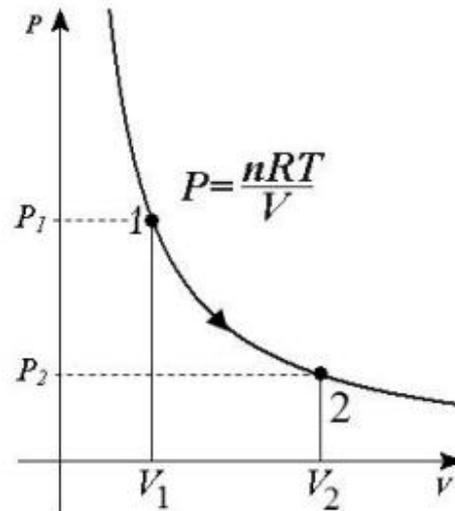


Figure 2. 5. Représentation graphique d'une transformation isotherme.

b) Travail extérieur :

On a :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P \cdot dV$$

De l'équation d'état, on a :

$$P = \frac{r \cdot T}{V}$$

D'où :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P \cdot dV = \int_1^2 P_1 \cdot V_1 \cdot \frac{dV}{V} = P_1 \cdot V_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = P_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{1-2} = r \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Et encore : $W_{1-2} = r \cdot T \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$

c) Quantité de chaleur :

D'après le 1^{er} principe, on a :

$$\Delta U = Q - W$$

Pour cette transformation ($\Delta U=0$), il vient donc :

$$Q_{1-2} = W_{1-2} = r \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Aussi, $Q_{1-2} = T(S_2 - S_1)$

d) Energie interne :

La variation de l'énergie interne pour ce cas ($dT=0$) est :

$$\Delta U_{1-2} = C_v.(T_2 - T_1) = 0$$

e) Enthalpie :

Puisque pour cette transformation $dT=0$, on a :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_p.(T_2 - T_1) = 0$$

f) Entropie :

$$\Delta S_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{T} = r. \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Transformation adiabatique (Isentropique, S=Cte)

a) Equation de la transformation adiabatique :

Au cours d'une transformation adiabatique, le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur, où :

$$Q = 0$$

Donc, $dQ = 0$

Dans cette transformation, toutes les variables d'état P , V et T changent au même temps.

Du **1^{er} principe**, on a :

$$dQ = dU + p dV$$

Aussi,

$$dQ = dH - V.dP$$

De : $dU = C_v.dT$ et $dH = C_p.dT$

On obtient :

$$dQ = C_v.dT + p dV = 0 \Rightarrow C_v.dT = -P.dV$$

$$dQ = C_p.dT - V.dp = 0 \Rightarrow C_p.dT = V.dp$$

Où :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = -\frac{V.dp}{P.dV} \Rightarrow \gamma.P dV + V.dp = 0$$

Par intégration de cette relation, on obtient :

$$\int \frac{dP}{P} + \gamma \int \frac{dV}{V} = C \quad \Rightarrow \quad \ln P + \gamma \ln V = \ln C$$

Alors, **l'équation de la transformation adiabatique** est la suivante :

$$P.V^\gamma = Cte$$

Où, P est la pression, V est le volume.

On a :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Et,

$$C_p - C_v = R$$

C_p c'est la chaleur spécifique à pression constante, C_v est la chaleur spécifique à volume constant, γ est l'index adiabatique et R est la constante universelle des gaz parfaits.

Il vient donc,

$$\frac{R}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} - 1 = \gamma - 1$$

Alors, pour une transformation adiabatique entre deux points d'équilibre, on peut écrire :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow T.V^{\gamma-1} = Cte \Leftrightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

De :

$$P.V = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} \Rightarrow \left(\frac{P.V}{nR} \right) V^{\gamma-1} = Cte \Rightarrow P.V^\gamma = Cte$$

On aura :

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma$$

De :

$$P.V = n.R.T \Rightarrow V = \frac{n.R.T}{P} \Rightarrow P \left(\frac{R.T}{P} \right)^\gamma = Cte \Rightarrow P^{1-\gamma} . T^\gamma = Cte$$

$$T.P^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = Cte$$

Il vient :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Pour une telle transformation, il est également vrai que :

$$P^{1-\gamma} . T^\gamma = Cte$$

Où T est la température absolue.

Qui peut être réécrite aussi comme suit :

$$T.V^{\gamma-1} = Cte$$

b) Travail extérieur :

On a :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P \cdot dV$$

Multipliant par V^γ et divisant par V^γ , P et V varient mais $P \cdot V^\gamma = Cte$ et on peut donc le ressortir de l'intégrale :

$$W_{1-2} = P \cdot V^\gamma \int_1^2 \frac{dV}{V} = \left[P \cdot V^\gamma \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_1^2$$

$$W_{1-2} = \left[\frac{P \cdot V}{1-\gamma} \right]_1^2$$

Donc :

$$W_{1-2} = \frac{P_1 \cdot V_1 - P_2 \cdot V_2}{\gamma - 1}$$

De même, et à partir de l'équation d'état des gaz parfaits, le travail peut réécrit en fonction de T comme suit :

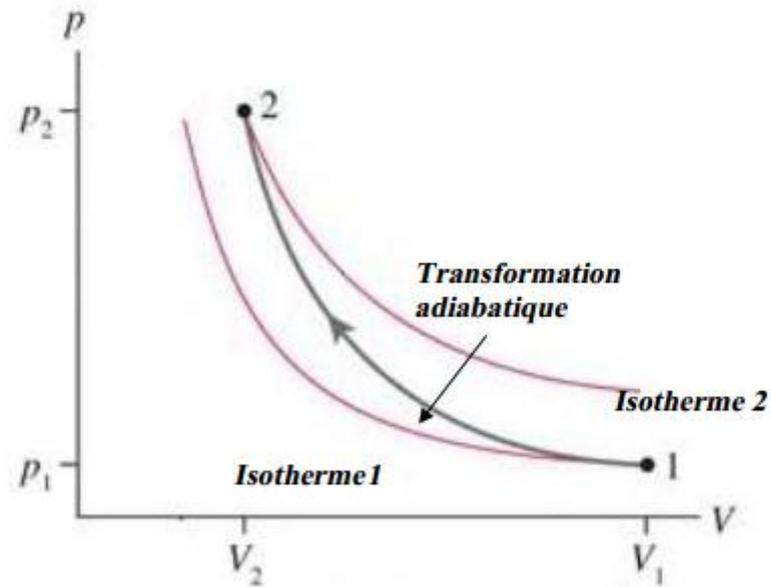
$$W_{1-2} = \frac{r(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

e) Entropie :

On a $S=Cte$ (*transformation isentropique*)

D'où :

$$\Delta S_{1-2} = 0$$



Représentation graphique d'une transformation adiabatique.

c) Energie interne :

La variation de l'énergie interne est :

$$\Delta U_{1-2} = C_V \cdot (T_2 - T_1)$$

d) Enthalpie :

La variation en enthalpie pour cette transformation est :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Tableau récapitulatif des équations de transformations

Transformation	Isobare ($p=Cte$)	Isochore ($V=Cte$)	Isotherme ($T=Cte$)	Adiabatique ($Q=0$)
Equation de transformation	$\frac{T}{V} = Cte$	$\frac{p}{T} = Cte$	$p.V = Cte$	$p.V^\gamma = Cte$
1 ^{er} principe	$\Delta U = W + Q$	$W=0 ; \Delta U = Q$	$Q = W ; \Delta U = 0$	$Q = 0 ; \Delta U = W$
Travail	$W = -p(V_2 - V_1)$ $W = -mr(T_2 - T_1)$	$W = 0$	$W = p_1.V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ $W = mrT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$W = \frac{p_2.V_2 - p_1.V_1}{\gamma - 1}$ $W = \frac{mr(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$
Chaleur	$Q = m.c_p.(T_2 - T_1)$	$Q = m.c_v.(T_2 - T_1)$	$Q = p_1.V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ $Q = mrT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$	$Q = 0$

Transformation	Isobare ($p=Cte$)	Isochore ($V=Cte$)	Isotherme ($T=Cte$)	Adiabatique ($Q=0$)
Energie interne	$\Delta U = mc_v(T_2 - T_1)$	$\Delta U = mc_v(T_2 - T_1)$	$\Delta U = 0$	$\Delta U = mc_v(T_2 - T_1)$
Enthalpie	$\Delta H = mc_p(T_2 - T_1)$	$\Delta H = mc_p(T_2 - T_1)$	$\Delta H = 0$	$\Delta H = mc_p(T_2 - T_1)$
Entropie	$\Delta S = mc_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$	$\Delta S = mc_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$	$\Delta S = mr \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\Delta S = 0$
Gaz parfaits $p.V = mr.T = Cte$	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$	$p_1.V_1^\gamma = p_2.V_2^\gamma$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$