Corrigé TD N°03   Maths3 (2021/2022)

Exercice N°01

1. L'équation est $y'(x) - 4\,y(x) = 3$: $a(x) = -4$ et $f(x) = 3$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - 4\,y(x) = 0$.

   La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{4\,x}$.

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - 4\,y_0(x) = 3$.

   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = 3\,\mathrm{e}^{-4\,x}$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,x} \Rightarrow y_0(x) = -\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,x}\,\mathrm{e}^{4\,x} = -\frac{3}{4}$$

   c) La solution générale est $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{4x} - \frac{3}{4}}$

2. L'équation est $y'(x) + y(x) = 2\,\mathrm{e}^{x}$: $a(x) = 1$ et $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{x}$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) + y(x) = 0$.

   La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{-x}$.

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) + y_0(x) = 2\,\mathrm{e}^{x}$.

   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = 2\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{x} = 2\,\mathrm{e}^{2\,x}$

$$\Rightarrow g(x) = \mathrm{e}^{2\,x} \Rightarrow y_0(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x}$$

   c) La solution générale est $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}$

3. l'equation est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{1}{x}$: $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 0$.
Ici $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc une primitive est $A(x) = -\ln|x| = -\ln(x)$ car on est sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{\ln(x)} = C\,x$

b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{y_0(x)}{x} = \dfrac{1}{x}$.
Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = -\frac{1}{x}\,x = -1$$

c) La solution générale est $y(x) = C\,x - 1$

d) $y(1) = 0 \iff C - 1 = 0 \iff C = 1$.
La solution est donc $\boxed{y(x) = x - 1}$

4. L'équation est $y'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y(x) = 1$: $a(x) = -\frac{2x-1}{x^2}$ et $f(x) = 1$.

a) L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y(x) = 0$.
Ici $a(x) = -\dfrac{2x-1}{x^2} = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ donc une primitive est $A(x) = -2\ln|x| - \frac{1}{x} = -2\ln(x) - \frac{1}{x}$ car $x > 0$.
La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{2\ln(x)+1/x} = C\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x}$$

b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y_0(x) = 1$.
Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}$.
$g(x)$ est de la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = -1/x$:

$$\Rightarrow g(x) = \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{-1/x} \Rightarrow y_0(x) = \mathrm{e}^{-1/x}\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x} = x^2$$

c) La solution générale est $y(x) = C\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x} + x^2$

d) $y(1) = 1 \iff C\,e + 1 = 1 \iff C = 0$.
La solution est donc $\boxed{y(x) = x^2}$

Exercice N°02

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 4 = 0$:

$$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 4$$

La solution générale est

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{4x} \Rightarrow y'(x) = C_1 \mathrm{e}^x + 4C_2 \mathrm{e}^{4x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} y(0) & = & C_1 + C_2 & = & 5 \\ y'(0) & = & C_1 + 4C_2 & = & 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{4x}}$

2

2. L'équation caractéristique est $r \;\; + 4 = 0$:

$$\Delta = -16 < 0 \Rightarrow r = \pm 2i$$

La solution générale est

$$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) \Rightarrow y'(x) = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} y(0) & = & C_1 & = & 0 \\ y'(0) & = & 2C_2 & = & 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} C_1 & = & 0 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = \sin(2x)}$

3. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$:

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = -1$$

La solution générale est

$$y(x) = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow y'(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} - (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} y(0) & = & C_2 & = & 1 \\ y'(0) & = & C_1 - C_2 & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}}$

Exercice N°03

1. a) L'équation homogène est $y''(x) - 3y'(x) + 3y(x) = 0$
l'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$:

$$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x}$$

b) $y_0(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_0'(x) = 2ax + b \Rightarrow y_0''(x) = 2a$

$$\Rightarrow y_0''(x) - 3y_0'(x) + 2y_0(x) = 2ax^2 + (2b - 6a)x + 2c - 3b + 2a = 4x^2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & 4 \\ 2b - 6a & = & 0 \\ 2c - 3b + 2a & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 6 \\ c & = & 7 \end{array} \right.$$

c) La solution générale de l'équation est $\boxed{y(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} + 2x^2 + 6x + 7}$

2. $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x$ ……………..(2)

L'équation homogène est : $y'' - 4y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$ on a $\Delta = 0$; $r = 2$ racine double

Donc $y_H = (c_1.x + c_2)e^{2x}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_p = ?$ Comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors

$y_p = Q(x)e^x = (ax^2 + bx + c)e^x$; $y_p' = (ax^2 + (b + 2a)x + b + c)e^x$;

$y_p'' = (ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a + c)e^x$

En remplaçant dans (2), on obtient :

$(ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a + c)e^x - 4(ax^2 + (b + 2a)x + b + c)e^x + 4(ax^2 + bx + c)e^x = (x^2 + 1)e^x$

$\Rightarrow (ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a + c)e^x = (x^2 + 1)e^x$

Par identification on trouve

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ -2b + 2a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 7 \end{cases}$$

Donc

$y_p = \quad (x^2 + 4x + 7)e^x$

Finalement l'ensemble des solutions de (2) sont :

y= $y_H + y_p = (c_1.x + c_2)e^{2x} + (x^2 + 4x + 7)e^x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$