

Opérateurs linéaires bornés dans les espaces normés

2.1 Définitions générales

Définition 2.1.1 Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire de X dans Y est une application A définie sur X , à valeurs dans Y et vérifiant, $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \text{et} \quad A(\lambda \bullet x) = \lambda \bullet A(x) \quad (2.1)$$

Définition 2.1.2 Soient X et Y deux espaces normés de normes respectives $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$. Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est dit borné si,

$$\exists M \geq 0 : \quad \forall x \in X; \quad \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X. \quad (2.2)$$

Exemples. Les opérateurs linéaires suivants sont tous bornés :

1. L'opérateur identité : $Id_X : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto Id_X(x) = x;$

$$\forall x \in X : \|Id_X(x)\| = \|x\|$$

2. L'opérateur nul : $\theta : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto \theta(x) = 0_Y$ (vecteur nul de Y);

$$\forall x \in X : \|\theta(x)\| = \|0_Y\| = 0 = 0 \cdot \|x\|_X$$

3. L'homothétie vectorielle de rapport k : $H_k : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto H_k(x) = k \bullet x;$

$$\forall x \in X : \|H_k(x)\| = \|k \bullet x\| = |k| \|x\|$$

4. L'opérateur de décalage (shift) :

$$S : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \longmapsto A(x) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

$$\forall x \in l^2(\mathbb{R}) : \|S(x)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (S(x))_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

Exercice 2.1.5 Montrer qu'un opérateur A , défini de X dans Y est non borné si et seulement si, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que :

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = +\infty$$

Exercice 2.1.6 Montrer que l'opérateur $A : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, défini par :

$$A(P) = P'(1)$$

n'est pas borné.

Proposition 2.1.7 Si $A : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire borné alors, il reste borné si on remplace les normes dans X et Y par des normes équivalentes.

Preuve. (exercice) ■

Notation 2.1.8 Etant donnés deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, on désigne par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y (Si $X = Y$, on écrit $\mathcal{L}(X)$ au lieu de $\mathcal{L}(X, Y)$). On vérifie facilement que :

1.

$$(A, B) \in (\mathcal{L}(X, Y))^2 \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{K} \implies A + \lambda B \in \mathcal{L}(X, Y) ;$$

En d'autres termes, $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (On verra plus loin qu'on peut définir une norme dans cet espace).

2.

$$A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{L}(Y, Z) \implies B \circ A \in \mathcal{L}(X, Z)$$

Théorème 2.1.9 Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire alors, les assertions suivantes sont équivalentes

1. A est borné ;

2. A est continu sur tout l'espace X ;

3. A est continu en 0.

Preuve. L'implication $(1 \implies 2)$, découle du fait qu'un opérateur borné est une application Lipschitzienne donc continue. L'implication $(2 \implies 3)$ est évidente. Il suffit de démontrer l'implication $(3 \implies 1)$. Supposons donc que l'application linéaire A est continue au point 0 de X . On a alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : x \in X \quad \text{et} \quad \|x\|_X < \delta_\varepsilon \implies \|A(x) - A(0_X)\|_Y = \|A(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Soit maintenant $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \neq 0$. Alors,

$$\left\| \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta_\varepsilon}{2} < \delta_\varepsilon \implies \left\| A \left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y = \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \varepsilon.$$

En d'autres termes,

$$x \in X \quad \text{et} \quad \|x\|_X \neq 0 \implies \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon}$$

Par conséquent,

$$\forall x \in X \implies \|A(x)\|_Y < \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \|x\|_X.$$

—

Theorème 2.1.10 Si l'espace vectoriels X est de dimension finie, alors tout opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est borné.

Preuve. En effet, soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base X . L'application

$$\|\cdot\|_\infty : X \longrightarrow \mathbb{K}; \quad \left\| x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bullet e_i \right\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$$

définit une norme sur X , équivalente à la norme initiale $\|\cdot\|_X$. Il suffit donc de démontrer la continuité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \|A(x)\|_Y &= \left\| A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bullet e_i \right) \right\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \bullet A(e_i) \right\|_Y \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \bullet \|A(e_i)\|_Y \leq \sum_{i=1}^n \left(\sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \right) \bullet \|A(e_i)\|_Y \\ &= \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty \bullet \|A(e_i)\|_Y = M \cdot \|x\|_\infty, \quad M = \sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|_Y > 0. \end{aligned}$$

■

2.2 Norme d'un opérateur borné

Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. Posons :

$$\alpha = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_Y, \quad \beta = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_Y, \quad \gamma = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}. \quad (2.3)$$

On a les propriétés élémentaires suivantes :

1. Les quantités α, β, γ sont toutes finies positives.
2. $\alpha = \beta = \gamma$. En effet, on a

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \quad \text{et} \quad \alpha = \gamma.$$

3. Pour tout $M \geq 0$, on a :

$$(\|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \quad \forall x \in X) \implies \alpha = \beta = \gamma \leq M.$$

4. $\alpha = \beta = \gamma = \inf \{M \geq 0 : \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \quad (\forall x \in X)\}$. En effet, soit

$$\mathcal{M}(A) = \{M \geq 0 : \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \quad (\forall x \in X)\}. \quad (2.4)$$

D'après 3, $\alpha = \beta = \gamma \in \mathcal{M}(A)$. Par conséquent, $\inf(\mathcal{M}(A)) \leq \alpha = \beta = \gamma$. Toujours d'après 3,

$$\alpha = \beta = \gamma \leq M, \quad \forall M \in \mathcal{M}(A) \implies \alpha = \beta = \gamma \leq \inf(\mathcal{M}(A)).$$

D'où, l'égalité $\alpha = \beta = \gamma = \inf \{M \geq 0 : \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \quad (\forall x \in X)\}$.

Définition 2.2.1 Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. On appelle norme de l'opérateur A le nombre $\|A\|$, défini par :

$$\|A\| = \inf \{M \geq 0 : \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \quad (\forall x \in X)\}$$

Remarque. D'après ce qui précède,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_Y = \gamma = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

et l'opérateur A est borné si et seulement si, $\|A\| < +\infty$. ■

Exemple 2.2.2 L'identité, l'opérateur, l'homothétie de rapport k et l'opérateur de décalage (Shift) S , ont pour normes respectives :

$$\|Id_X\| = 1, \quad \|\theta\| = 0, \quad \|H_k\| = |k|, \quad \|S\| = 1$$

Dans la pratique, trouver la norme d'un opérateur n'est pas aussi direct et aussi simple que ne le laissent penser les exemples cités. Le résultat que nous allons maintenant énoncer est une règle pratique pour le calcul de la norme d'un opérateur borné.

Proposition 2.2.3 Soient $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné et $M \geq 0$. On suppose que $\|A\| \leq M$ alors, pour avoir $\|A\| = M$, il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1. Il existe $x \in X$ vérifiant,

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \|A(x)\|_Y = M$$

2. Il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X , vérifiant :

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A(x_n)\|_Y = M$$

Preuve. La première assertion est une conséquence directe de la définition de la norme et du sup. Montrons la deuxième. Sous les hypothèses énoncées on a,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon, \quad M - \varepsilon < \|A(x_n)\|_Y$$

Il s'ensuit que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\| \geq M - \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0 dans cette dernière inégalité, on obtient : $\|A\| \geq M$. ■

Exemple 2.2.4 Montrer que l'opérateur suivant est bien défini et trouver sa norme :

$$A : (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (L^2_{[0, 1]}, \|\cdot\|_2); \quad Af(x) = xf(x)$$

Solution.

1. Montrer que l'opérateur A est bien défini signifie qu'il faut montrer l'implication suivante :

$$f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \implies A(f) \in L^2_{[0, 1]}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Af(x)|^2 dx &= \int_0^1 |xf(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^2 \left(\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \right)^2 dx \\ &= \|f\|_\infty^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \|f\|_\infty^2 < +\infty \end{aligned}$$

Par conséquent, $A(f) \in L^2_{[0, 1]}$ et l'opérateur A est donc bien défini.

2. D'après la formule précédente, l'opérateur A est borné et $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Montrons qu'en fait, $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour cela, considérons la fonction constante $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$. On a :

$$f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|f\|_{\infty} = 1$$

De plus,

$$\|A(f)\|_2^2 = \int_0^1 |Af(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

D'après le point 1 de la proposition 2.2.3, on a l'égalité $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

■

Exemple 2.2.5 Montrer que l'opérateur suivant est bien défini et trouver sa norme :

$$A : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}); \quad A(x = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \left(0, \frac{x_2}{2}, \dots, \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n, \dots\right)$$

Solution.

1. Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2(\mathbb{R})$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |A(x)_k|^2 = \sum_{k=2}^{+\infty} \left| \left(1 - \frac{1}{k}\right)x_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

Par conséquent, l'opérateur $A(x) \in l^2(\mathbb{R})$ et l'opérateur A est bien défini.

2. D'après la question précédente, l'opérateur A est borné et $\|A\| \leq 1$. Montrons que $\|A\| = 1$. Pour cela, considérons la suite :

$$\left(x^{(n)} = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots\right)\right)_n$$

Il est clair que $\|x^{(n)}\|_2 = 1 \quad \forall n \geq 1$. De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A(x^{(n)})\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \left(\underbrace{0, \dots, 0}_n, \left(1 - \frac{1}{n}\right), 0, \dots\right) \right\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

D'après le point 2 de la proposition 2.2.3, on a l'égalité $\|A\| = 1$.

■

Proposition 2.2.6 On a les propriétés suivantes :

- 1.

$$\forall A \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \|A(x)\|_Y \leq \|A\| \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

- 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ et } \|A\| = 0 \implies A = 0 \text{ (opérateur nul)} \\ \| \lambda \bullet A \| = |\lambda| \|A\| \quad \forall A \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ et } \lambda \in \mathbb{K} \\ \forall A, B \in \mathcal{L}(X, Y); \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{array} \right.$$

On déduit de ce point en particulier que l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ est normé.

3.

$$A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{L}(Y, Z) \implies \begin{cases} B \circ A \in \mathcal{L}(X, Z) \\ \text{et} \\ \|B \circ A\| \leq \|A\| \|B\| \end{cases}$$

Theorème 2.2.7 Si Y est de Banach alors, muni de la norme d'opérateur (formules 2.3 et 2.4), l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi de Banach.

Preuve. Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{L}(X, Y)$. Cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_\varepsilon, \|A_n - A_m\| = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|A_n(x) - A_m(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right) < \varepsilon \quad (2.5)$$

On en déduit que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_\varepsilon, \|A_n(x) - A_m(x)\|_Y < \varepsilon \|x\|_X \quad \forall x \in X \quad (2.6)$$

La formule 2.6 signifie que pour tout $x \in X$, la suite $(A_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach Y . Considérons maintenant l'opérateur,

$$A : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto A(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n(x) \quad (2.7)$$

L'opérateur A est bien défini (car $\lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n(x)$ existe) et il est linéaire. Montrons que la suite $(A_n)_n$ converge vers A au sens de la norme de $\mathcal{L}(X, Y)$. En faisant tendre m vers $+\infty$ dans la formule 2.6, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \text{ et } x \in X \implies \|A_n(x) - A(x)\|_Y = \|(A_n - A)(x)\|_Y < \varepsilon \|x\|_X$$

Ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \implies \|A_n - A\| < \varepsilon \quad (2.8)$$

De plus,

$$x \in X \quad \text{et} \quad n \geq N_\varepsilon \implies \|A(x)\|_Y \leq \|(A - A_n)(x)\|_Y + \|A_n(x)\|_Y \leq (\varepsilon + \|A_n\|) \|x\|_X \quad (2.9)$$

Les formules 2.8 et 2.9 signifient que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n = A$ au sens de la norme de $\mathcal{L}(X, Y)$. ■

2.3 Convergence simple, convergence uniforme

Définition 2.3.1 Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. On dit qu'une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{L}(X, Y)$ converge vers $A \in \mathcal{L}(X, Y)$:

1. *fortement si,*

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n(x) - A(x)\|_Y = 0. \quad (2.10)$$

Dans ce cas, on écrit : $A_n \xrightarrow{s} A$ (le symbole s vient du mot anglais "strongly" qui signifie fortement).

2. *uniformément si,*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n - A\| = 0 \quad (2.11)$$

Dans ce cas, on écrit : $A_n \xrightarrow{u} A$ ou $A_n \rightrightarrows A$.

Remarque.

1. La convergence uniforme d'une suite d'opérateurs bornés est la convergence dans l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$.

2.

$$(A_n \xrightarrow{u} A) \implies (A_n \xrightarrow{s} A)$$

En effet, puisque pour tout n , l'opérateur $A_n - A$ est un élément de $\mathcal{L}(X, Y)$ alors,

$$0 \leq \|A_n(x) - A(x)\|_Y \leq \|A_n - A\| \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

D'où, par passage à la limite,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n(x) - A(x)\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - A\| \|x\|_X = 0 \quad \forall x \in X$$

3. Il existe des suites fortement convergentes mais qui ne convergent pas uniformément. Soit $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ une base Hilbertienne de l'espace $l^2(\mathbb{R})$. Considérons dans cet espace, la suite d'opérateurs :

$$P_n : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}); \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \longmapsto P_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Pour tout x dans $l^2(\mathbb{R})$,

$$\|P_n(x) - x\|_2^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

Cette quantité est le reste de la série convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|_2^2$. Elle converge donc vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(P_n - Id)(x)\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n(x) - x\|_2 = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2} = 0 \quad \forall x \in l^2(\mathbb{R})$$

Donc, $P_n \xrightarrow{s} Id$. Montrons qu'on n'a pas cependant la convergence uniforme. En effet, pour tout naturel $n \geq 1$, posons $x_n = e_1 + \dots + e_n + e_{n+1}$. Alors,

$$\|(P_n - Id)(x_n)\|_2 = \|P_n(x_n) - x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\langle e_{n+1}, e_k \rangle|^2} = 1$$

D'où, $\|P_n - Id\|_2 \geq 1$ pour tout naturel $n \geq 1$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - Id\|_2 \geq 1$ et on n'a donc pas $P_n \rightrightarrows Id$.

4.

$$(A_n \rightrightarrows A) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\| = \|A\|$$

Cela découle directement de l'inégalité

$$|\|A_n\| - \|A\|| \leq \|A_n\| = \|A_n - A\|$$

Comme le montre l'exemple précédent, l'inverse n'est pas vrai. En effet, on n'a pas $P_n \rightrightarrows Id$ mais,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1) = 1 = \|Id\|$$

2.4 Théorème de Banach sur l'opérateur inverse

Définition 2.4.1 Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés. Une application $A : X \longrightarrow Y$ est dite ouverte si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y .

Remarques.

1. Tout homéomorphisme de X dans Y est une application ouverte.
2. Une application constante de X dans Y ne peut être ouverte car, l'image de tout sous-ensemble de X est un singleton donc fermé de Y .

■

Pour les éléments de $\mathcal{L}(X, Y)$, on a le résultat très utile suivant (nous admettrons ce résultat sans démonstration).

Théorème 2.4.2 (de l'application ouverte) Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach. Alors, tout élément surjectif A de $\mathcal{L}(X, Y)$ est une application ouverte.

Définition 2.4.3 Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés. On appelle isomorphisme entre X et Y tout opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ inversible et à inverse borné de Y dans X .

Notation 2.4.4 L'ensemble des isomorphismes entre X et Y est noté $\text{Iso}(X, Y)$. Ainsi,

$$A \in \text{Iso}(X, Y) \iff \begin{cases} A \text{ bijection entre } X \text{ et } Y \\ A \in \mathcal{L}(X, Y) \\ A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X) \end{cases} \quad (2.12)$$

Si $X = Y$, on écrit $\text{Iso}(X)$ au lieu de $\text{Iso}(X, X)$.

Théorème 2.4.5 (de l'isomorphisme de Banach) Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors,

$$A \text{ bijection entre } X \text{ et } Y \implies A \in \text{Iso}(X, Y)$$

Preuve. Notons tout d'abord que ce théorème signifie tout simplement que l'inverse d'un opérateur linéaire borné et bijectif est aussi un opérateur linéaire borné. Pour la preuve, il suffit de remarquer que d'après le théorème de l'application ouverte,

$$A \text{ linéaire, bornée et bijective} \implies A \text{ linéaire, bornée et surjective}$$

$$\implies A \text{ linéaire, bornée et l'image par } A \text{ de tout ouvert de } X \text{ est un ouvert de } Y$$

$$\implies \text{l'image par } (A^{-1})^{-1} = A \text{ de tout ouvert de } X \text{ est un ouvert de } Y$$

$$\implies \text{l'application } A^{-1} \text{ est continue de } Y \text{ dans } X$$

$$\implies A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X).$$

On cherche f sous la forme :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = ax + by$$

On a,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{et} \\ f(x, x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{et} \\ (a+b)x = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{et} \\ a+b = 2 \end{array} \right.$$

D'où,

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 2 - a \\ \text{et} \\ \|f\|^2 = a^2 + (2-a)^2 = 2a^2 - 4a + 4 = F(a) \end{array} \right.$$

On détermine a à partir de la relation $F'(a) = 0$, ce qui nous donne $a = b = 1$. Par conséquent,

$$f(x, y) = x + y, \quad f(x, x) = 2x \quad \text{et} \quad \|f_0\| \leq \|f\| = \sqrt{2}$$

Il reste à vérifier qu'il existe bien $(x, x) \in X_0$ tel que : $|f_0(x, x)| = \sqrt{2}$. Il suffit pour cela de prendre $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple 2.5.3 Dans l'espace $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, considérons le sous-espace X_0 défini par :

$$X_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$$

et définissons dans ce sous-espace l'application :

$$f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = -x$$

On cherche f sous la forme :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = ax + by$$

On a,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{et} \\ f(x, x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{et} \\ (a+b)x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{et} \\ a+b = -1 \end{array} \right.$$

D'où,

$$\left\{ \begin{array}{l} b = -1 - a \\ \text{et} \\ \|f\|^2 = a^2 + (1+a)^2 = 2a^2 + 2a + 1 = F(a) \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$F'(a) = 0 \implies 4a + 2 = 0 \implies a = -\frac{1}{2} = b \implies f(x, y) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

On vérifie que

$$f(x, x) = -x, \quad \|f_0\| \leq \|f\| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

De plus,

$$\left\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\|_2 = 1 \quad \text{et} \quad \left| f_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple 2.5.4 Dans l'espace $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$, considérons le sous-espace X_0 défini par :

$$X_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

et définissons dans ce sous-espace l'application :

$$f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = 2x$$

On cherche f sous la forme :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = ax + by + cz$$

On a,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ \text{et} \\ f(x, y, x+y) = 2x \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ \text{et} \\ (a+c-2)x + (b+c)y = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ \text{et} \\ (a+c-2) = (b+c) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ a = 2-c \\ b = -c \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a = 2-c \\ b = -c \\ \|f\|^2 = 3c^2 - 4c + 4 = F(c) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$F'(c) = 0 \implies c = \frac{2}{3}, \quad a = \frac{4}{3}, \quad b = -\frac{2}{3} \implies f(x, y, z) = \frac{4x - 2y + 2z}{3}$$

On vérifie que :

$$f(x, y, x+y) = 2x \quad \text{et} \quad \|f_0\| \leq \|f\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

On cherche maintenant l'élément $(x, y, x+y) \in X_0$ qui vérifie :

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 1 \quad \text{et} \quad |f_0(x, y, x+y)| = \|f\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

On doit résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 2|x| = \sqrt{\frac{8}{3}} \\ 2y^2 + 2xy + (2x^2 - 1) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} |x| = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 2y^2 + 2xy + (2x^2 - 1) = 0 \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que ce système admet des solutions. Par exemple,

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \implies 2y^2 + y\sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3} = 0$$

On a ainsi une équation du second degré en y dont le discriminant $\Delta = \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 - 4\left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) = 0$. Elle admet donc une solution double.

Remarque. L'exemple précédent montre que le prolongement répondant aux conditions de Hahn - Banach peut ne pas être unique. ■

