OPERATEURS COMPACTS

3.1 Définitions et propriétés générales dans les espaces de Banach

Définition 3.1.1 *Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces de Banach et $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. A est dit compact si $\mathcal{D}(A) = X$ et pour toute suite bornée $(x_n)_n$ d'éléments de X, la suite $(y_n = A(x_n))_n$ contient une sous-suite convergente dans Y.*

On a les deux théorèmes fondamentaux suivants :

Theorème 3.1.2 *(de Riesz) Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.*

Theorème 3.1.3 *Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces de Banach et $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *A compact.*
2. *Pour toute partie bornée M de X, l'ensemble $\overline{A(M)}$ est compact[1] dans Y.*
3. *La fermeture de l'image par A de la boule unité fermée de X est un ensemble compact de Y.*

Exemples.

1. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang fini $(\dim (R(A) = \operatorname{Im}(A)) \prec +\infty)$ alors, il est compact. En effet, dans ce cas, le sous espace $R(A)$ est fermé et donc un espace de Banach pour la norme induite par celle de l'espace Y. Pour toute partie bornée M de X, l'ensemble $\overline{A(M)}$ qui est un fermé borné de l'espace de Banach $R(A)$ est compact.
2. L'opérateur

$$A : l^2(\mathbb{K}) \longrightarrow l^2(\mathbb{K}); \quad A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{2^n}x_n, ...\right)$$

est compact. En effet, l'image de la boule unité fermée est incluse dans le parallélépipède $\prod_{p=1}^{+\infty}\left\{x_p \in \mathbb{K} : |x_p| \leq \frac{1}{2^p}\right\}$ qui est un produit d'espaces compacts donc, lui même compact.

[1] Dans les espaces métriques, on a la caractérisation suivante (de Bolzano-Weierstrass) de la compacité : Un sous-ensemble M d'un espace métrique X est compact si et seulement si, toute suite d'éléments de M, contient une sous-suite covergente dans M.

3. L'opérateur

$$A : l^2(\mathbb{K}) \longrightarrow l^2(\mathbb{K}); \quad A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

n'est pas compact. En effet, soit $M = \{e_i, i = 1, 2, ...\}$ la base canonique de $l^2(\mathbb{K})$. Il est clair que M est un ensemble borné de $l^2(\mathbb{K})$ .D'autre part,

$$\|A(e_{i+1}) - A(e_i)\| = \|e_{i+2} - e_{i+1}\| = \sqrt{2} \quad \forall i = 1, 2, ...$$

Donc, l'ensemble $A(M) = \{e_{i+1}, \ i = 1, 2, ...\}$ ne peut contenir aucune sous-suite convergente. Donc, $\overline{A(M)}$ n'est pas compact.

■

Remarques.

1. Un opérateur compact est toujours borné. En effet, le contraire signifierait l'existence d'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| = 1 \ \text{ et } \ \|A(x_n)\| \succ n.$$

La suite $(A(x_n))_n$ ne peut donc contenir aucune sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de l'opérateur A.

2. Il existe des opérateurs bornés (en dimension infinie) qui ne sont pas compacts. En effet, l'opérateur Id_X est borné mais non compacte car, la boule unité fermée (qui est l'image d'elle même par Id_X) n'est pas compacte d'après le théorème de Riesz.

■

Notation 3.1.4 *Soient X, Y deux $\mathbb{K}$ -espaces de Banach. Alors, l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de X dans Y , sera noté $\mathcal{K}(X,Y)$.*

Le résultat suivant regroupe les premières principales propriétés des opérateurs compacts dans les espaces de Banach.

Proposition 3.1.5 *Soient X, Y et Z trois $\mathbb{K}$ -espaces de Banach. Alors,*

1. L'ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$.
2. Si $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ et $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$ alors, $B \circ A \in \mathcal{K}(X,Z)$. De même, si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $B \in \mathcal{K}(Y,Z)$ alors, $B \circ A \in \mathcal{K}(X,Z)$.
3. Si $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ et $\dim(X) = \dim(X) = +\infty$ alors A ne peut pas avoir un inverse borné.

Preuve. Voir TD. ■

Theorème 3.1.6 *Si une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{K}(X,Y)$ vers A dans $\mathcal{L}(X,Y)$ alors, $A \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

Preuve. Il faut montrer que pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de X, la suite $(A(x_n))_n$ contient une sous-suite convergente. L'opérateur A_1 étant compact, la suite $(x_n)_n$ contient une sous-suite $\left(x_n^{(1)}\right)_n$ telle que la suite $\left(A_1\left(x_n^{(1)}\right)\right)_n$ converge. De même, l'opérateur A_2 étant compact, la suite $\left(x_n^{(1)}\right)_n$ contient une sous-suite $\left(x_n^{(2)}\right)_n$ telle que la suite $\left(A_2\left(x_n^{(2)}\right)\right)_n$ converge. En continuant ce processus, on obtient que puisque l'opérateur A_k est compact alors la suite $\left(x_n^{(k-1)}\right)_n$ contient une sous-suite $\left(x_n^{(k)}\right)_n$ telle que la suite $\left(A_k\left(x_n^{(k)}\right)\right)_n$ converge. Considérons maintenant la suite diagonale

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(n)}, ...$$

C'est une suite extraite de $(x_n)_n$ et chacun des opérateurs compacts $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n,\ \dots$ la transforme en une suite convergente. Si on montre que l'opérateur borné A la transforme aussi en une suite convergente, on aura alors établi le théorème. On a,

$$\left\|A\left(x_n^{(n)}\right)-A\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \leq \left(\begin{array}{c}\left\|A\left(x_n^{(n)}\right)-A_k\left(x_n^{(n)}\right)\right\|+\left\|A_k\left(x_n^{(n)}\right)-A_k\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \\ +\left\|A_k\left(x_m^{(m)}\right)-A\left(x_m^{(m)}\right)\right\|\end{array}\right) \quad (3.1)$$

Supposons que $\|x_n\| \leq C \quad \forall n$ et soit $\varepsilon \succ 0$. Choisissons k tel que $\|A-A_k\| \prec \dfrac{\varepsilon}{3C}$ (ceci est possible car on a convergence uniforme de A_k vers A). Soit le naturel N tel que,

$$\forall n \succ N \ \text{ et } \ \forall m \succ N: \ \left\|A_k\left(x_n^{(n)}\right)-A_k\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \prec \frac{\varepsilon}{3}$$

Ceci est aussi possible en vertu de la convergence de la suite $\left(A_k\left(x_n^{(n)}\right)\right)_n$. Finalement, la formule 3.1, devient :

$$\forall n \succ N \ \text{ et } \ \forall m \succ N: \left\|A\left(x_n^{(n)}\right)-A\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \leq \|A-A_k\|\left\|x_n^{(n)}\right\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|A-A_k\|\left\|x_m^{(m)}\right\| \prec \varepsilon.$$

En d'autres termes, la suite $\left(A\left(x_n^{(n)}\right)\right)$ est de Cauchy, donc convergente. ■

Corollaire 3.1.7 *Si A est la limite uniforme d'une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs de rangs finis alors, il est compact.*

Un autre résultat utile est la proposition suivante.

Proposition 3.1.8 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. A compact ;
2. AA^* compact ;
3. A^* compact
4. A^*A compact.

3.2 Quelques classes d'opérateurs compacts

Remarque. Les types d'opérateurs cités ci-dessous sont tous compacts :

1. Les opérateurs de rang fini : $\dim(\mathrm{Im}(A)) \prec +\infty$.
2. Les opérateurs de rang presque fini : Ce sont les opérateurs qui sont limites uniformes de suites d'opérateurs de rangs finis.
   Exemple :
   $$: l^2 \longrightarrow l^2, \quad A(x_1,\dots,x_n,\dots)=(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n,\dots), \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$
3. Les opérateurs intégraux à noyaux continus :
   $$A: C\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right) \longrightarrow C\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right), \qquad Af(x)=\int_a^b K(x,t)\,f(t)\,dt \qquad (3.2)$$

Le noyau $K(x,t) \in C\left([a,\ b]\times[a,\ b],\ \mathbb{K}\right)$.
<u>**Exemples**</u> :

$$A:\left(C_{[-\pi,\ \pi]},\|\cdot\|_{\infty}\right)\longrightarrow\left(C_{[-\pi,\ \pi]},\|\cdot\|_{\infty}\right),\quad Ax(t)=\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(t+s)\,x(s)\,ds,$$

$$B:\left(C_{[0,\ 1]},\|\cdot\|_{\infty}\right)\longrightarrow\left(C_{[0,\ 1]},\|\cdot\|_{\infty}\right),\quad Bx(t)=\int_{0}^{1}ts(1-ts)\,x(s)\,ds,$$

4. Les opérateurs intégraux à noyaux carré-intégrables :

$$A:L^2\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right)\longrightarrow L^2\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right),\quad Af(x)=\int_a^b K(x,t)\,f(t)\,dt \tag{3.3}$$

Le noyau $K(x,t)$ vérifie la condition :

$$\int_a^b |K(x,t)|^2\,dtdx \prec +\infty \tag{3.4}$$

<u>**Exemples**</u> :

$$A:L^2_{[a,\ b]}\longrightarrow L^2_{[a,\ b]},\quad Bx(t)=\int_0^t x(s)\,ds.$$

$$B:L^2_{[-1,\ 1]}\longrightarrow L^2_{[-1,\ 1]},\quad Ax(t)=t^2\int_{-1}^{1}sx(s)\,ds,$$

5. Les opérateurs de Hilbert-Schmidt : Ce sont des opérateurs A définis dans des espaces de Hilbert séparables H et vérifiant la condition : Il existe au moins une base Hilbertienne $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\|A(e_k)\|^2 \prec +\infty \tag{3.5}$$

Exemples :

$$A:l^2\longrightarrow l^2,\quad A(x_1,...,x_n,...)=\left(\frac{x_1}{1},...,\frac{x_n}{n},....\right)$$

■

Remarque.

1. S'il existe $\lambda\in\mathbb{K}^*$ tel que $\dim(\ker(A-\lambda Id))=\infty$ alors, l'opérateur A n'est pas compact.
2. N'est pas compact, tout opérateur A de la forme : $A=B\pm K$ où, B admet un inverse borné et K est compact.

■

Exercice 3.2.1 *Montrer que l'opérateur*

$$A:L^2_{[0,\ 1]}\longrightarrow L^2_{[0,\ 1]},\quad Af(x)=f(x)+2e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt.$$

n'est pas compact.