Dualité

4.1 Identifications entre espaces normés

Définition 4.1.1 *Soient $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces normés. Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est appelé isométrie si,*

$$\|A(x)\|_Y = \|x\|_X \qquad \forall x \in X \tag{4.1}$$

Il est clair que :

1. Une isométrie est un opérateur borné de norme 1.
2. Une isométrie est toujours injective.
3. Si A est une isométrie surjective alors, $A \in Iso(X, Y)$ et A^{-1} est une isométrie de Y dans X.
4. Si les espaces X et Y sont deux espaces de Hilbert alors,

$$A \text{ isométrie} \iff \forall x_1, x_2 \in X : \prec A(x_1), A(x_2) \succ_Y = \prec x_1, x_2 \succ_X$$

$$\Leftrightarrow \quad A^*A = Id_X$$

Exercice 4.1.2 *L'opérateur de décalage (Shift) S dans l^2, est une isométrie non surjective.*

Exercice 4.1.3 *L'opérateur de multiplication par la fonction e^{it} dans $L^2_{[0,\ 1]}$ est une isométrie surjective.*

Définition 4.1.4 *Deux $\mathbb{K}$ -espaces normés $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$, sont dits isométriques s'il existe une isométrie A définie de X dans Y. Si en plus, l'isométrie A est surjective alors, ils sont dits isométriquement isomorphes et l'opérateur A est appelé isomorphisme isométrique.*

Remarques.

1. Si A est un isomorphisme isométrique de $(X, \|.\|_X)$ dans $(Y, \|.\|_Y)$ alors, A^{-1} est un isomorphisme isométrique de $(Y, \|.\|_Y)$ dans $(X, \|.\|_X)$.
2. Si A est un isomorphisme isométrique de $(X, \|.\|_X)$ dans $(Y, \|.\|_Y)$ et B est un isomorphisme isométrique de $(Y, \|.\|_Y)$ dans $(Z, \|.\|_Z)$ alors, $B \circ A$ est un isomorphisme isométrique de $(X, \|.\|_X)$ dans $(Z, \|.\|_Z)$.
3. On dit de deux espaces normés $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ isométriquement isomorphes qu'ils s'identifient l'un à l'autre ou qu'ils sont les réalisations d'un même espace. Dans ce cas, on écrit $(X, \|.\|_X) = (Y, \|.\|_Y)$.

■

Proposition 4.1.5 *Si X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On peut alors définir sur une norme $\|.\|$ telle que les espaces normés $(X,\ \|.\|_X)$ et $(\mathbb{K}^n,\ \|.\|_\infty)$ soient isométriquent isomorphes.*

Preuve. Rappelons que la norme $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{K}^n$ est donnée par la formule :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \ \alpha_n\ ) \in \mathbb{K}^n \Longrightarrow \|\alpha\|_\infty = \sup_{1\ \leq\ i\ \leq\ n} |\alpha_i|$$

Soit donc $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de X. L'application,

$$\left\| x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet e_i \right\| = \sup_{1\ \leq\ i\ \leq\ n} |x_i|$$

définit une norme sur X. Considérons l'opérateur :

$$A : X \longrightarrow \mathbb{K}^n; \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet e_i \longmapsto A(x) = (x_1, x_2, ..., \ x_n\ ) \tag{4.2}$$

Il est très facile de montrer que A est un isomorphisme isométrique de X dans $\mathbb{K}^n$. ■

Corollaire 4.1.6 *Si X et Y sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie n alors, on peut alors définir une norme $\|.\|_X$ sur X et une norme $\|.\|_Y$ sur Y telles que les espaces normés $(X,\ \|.\|_X)$ et $(Y,\ \|.\|_Y)$ soient isométriquement isomorphes.*

La proposition précédente, a son équivalent en dimension infinie pour les espaces de Hilbert séparable.

Proposition 4.1.7 *Tout espace de Hilbert séparable est isométriquement isomorphe à l^2.*

Preuve. Soit H un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire $\prec .,. \succ$. Il existe donc dans H une base hilbertienne $(e_i)_{i=1}^{+\infty}$ vérifiant :

$$x \in H \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{+\infty} \prec x, e_i \succ \bullet\ e_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \prec x,\ x \succ = \sum_{i=1}^{+\infty} |\prec x, e_i \succ|^2 \tag{4.3}$$

Considérons l'opérateur $A : H \longrightarrow l^2$ donné par la formule :

$$A\left(x = \sum_{i=1}^{+\infty} \prec x, e_i \succ \bullet\ e_i\right) = (\prec x, e_i \succ)_{i=1}^{+\infty} \tag{4.4}$$

On vérifie aisément que l'opérateur est bien défini et que c'est isomorphisme isométrique entre H et l^2 (démontrer). ■

Corollaire 4.1.8 *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes entre eux.*

Remarque. Soient $(X,\ \|.\|_X)$ et $(Y,\ \|.\|_Y)$ deux $\mathbb{C}$ -espaces ectoriels normés. Une application $A : X \longrightarrow Y$ est dite anti-linéaire si :

$$\forall (x,\ y) \in X \times X,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \quad A(x + \lambda \bullet y) = A(x) + \overline{\lambda} \bullet A(y)$$

Dans ce cas, $\|A\|$ se définit de la même manière que dans le cas linéaire et les résultats de continuité et de bornétude restent vrais. De même, on pourra identifier X à Y s'il existe un isomorphisme isométrique anti-linéaire entre eux. Notons enfin que la composée de deux applications antilinéaires est une application linéaire et que la composée d'une application antilinéaire avec une application linéaire est une application antilinéaire. On adoptera donc la définition suivante d'espaces complexes isométriquement isomorphes . ■

Définition 4.1.9 *Deux $\mathbb{C}$ -espaces normés complexes $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ sont dits isométriquement isomorphes s'il existe un isomorphisme (linéaire ou antilinéaire) isométrique entre eux.*

Proposition 4.1.10 *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes.*

4.2 Espace dual d'un espace normé

Définition 4.2.1 *Soit $(X, \|.\|_X)$ un e.v.n. On appele :*

1. *dual algébrique de X, l'ensemble des applications linéaires sur X. Le dual algébrique de X est noté $X^{\#}$.*
2. *dual topologique de X l'ensemble $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ des applications linéaires continues de X dans $\mathbb{K}$. Le dual topologique de X est noté X^**
3. *Les éléments de l'espace $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, sont appelés fonctionnelles linéaires continues (bornées).*

Remarques.

1. D'une manière générale, $X^* \subset X^{\#}$. En dimension finie, ils coïncident.
2. Le dual topologique $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace de Banach.

■

Proposition 4.2.2 *Pour tout naturel non nul n, le dual topologique de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ s'identifie à $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ lui même ($\|.\|_2$ désigne la norme euclidéenne).*

Preuve. Rappelons que

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit donc $B_n = \{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout élément $f \in (\mathbb{R}^n)^*$,

$$x \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet e_i \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.f(e_i)$$

D'où,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i.f(e_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.|f(e_i)| \qquad (4.5) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on pose

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{-\frac{1}{2}} (f(e_1), ..., f(e_n)) \qquad (4.6)$$

alors,

$$\|a\|_2 = 1 \quad et \quad |f(a)| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.7)$$

Les formules 4.5, 4.6 et 4.7 montrent que,

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

Considérons maintenant l'opérateur :

$$T : (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|.\|_2); \qquad f \longmapsto T(f) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \bullet e_i \tag{4.9}$$

On vérifie facilement que T est un isomorphisme isométrique (démontrer). ■

Proposition 4.2.3 *Pour tout* $p \in]1, +\infty[$, $\left(l^p, \|.\|_p\right)^*$ *s'identifie à* $\left(l^q, \|.\|_q\right)$ *où,* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *Plus précisément,*

$$f \in \left(l^p, \|.\|_p\right)^* \Longleftrightarrow \exists! a = (a_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^q : \left\{ \begin{array}{c} f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i.x_i \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^p \\ et \\ \|f\| = \|a\|_q = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right. \tag{4.10}$$

Preuve. Supposons pour fixer les idées que le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout $a = (a_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^q$, on définit l'application $L_a : l^p \longrightarrow \mathbb{C}$ par la relation

$$L_a\left(x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i.x_i \tag{4.11}$$

L'appication L_a est bien définie en vertu de l'inégalité de Holder. Elle est aussi linéaire et pour tout $x = (x_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^p$,

$$|L_a(x)| = \left|\sum_{i=1}^{+\infty} a_i.x_i\right| \le \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i.x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_q \|x\|_p$$

D'où,

$$\|L_a\| \le \|a\|_q .$$

Par ailleurs,

$$b = \left(\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^q\right)^{-\frac{1}{p}} sign(a_i)\, |a_i|^{q-1}\right)_{i=1}^{+\infty} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \|b\|_p = 1 \\ et \\ |L_a(b)| = \|a\|_q \end{array} \right. \Longrightarrow \|L_a\| = \|a\|_q .$$

Ainsi donc, pour tout $a = (a_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^q$, $L_a \in \left(l^p, \|.\|_p\right)^*$.
Considérons maintenant l'application

$$L : l^q \longrightarrow \left(l^p, \|.\|_p\right)^*; \qquad a \in l^q \longmapsto L(a) = L_a \tag{4.12}$$

On a,

$$L(a + \lambda b) = L_a + \lambda L_b \qquad \forall a, \ b \in l^q \quad et \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Donc, l'application L est linéaire et isométrique (donc injective) de l^q dans $\left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*$. Si on démontre qu'elle est en plus surjective, on aura établi que l^q et $\left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*$ sont isométriquement isomorphes. Soit $B=\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ la base canonique de l^p et soit $f \in \left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*$. Alors

$$x \in l^p \Longrightarrow \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bullet e_i \\ \quad avec \\ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \prec +\infty \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i . f(e_i). \tag{4.13}$$

Posons $a = (f(e_i))_{i=1}^{+\infty}$. Il est clair que $f = L(a)$. Montrons que $a \in l^q$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, posons

$$c = (c_i)_{i=1}^{+\infty} \quad avec \quad c_i = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^q\right)^{-\frac{1}{p}} sign\left(f(e_i)\right) |f(e_i)|^{q-1} & si\ \ i \leq N \\ 0 & si\ i \succ N \end{cases}$$

On alors, $c \in l^p$ et $\|c\|_p = 1$. De plus,

$$\begin{aligned} |f(c)| &= \left(\sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q\right)^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q = \left(\sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| \end{aligned} \tag{4.14}$$

Comme la relation 4.14 est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ alors,

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |f(e_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

c'est à dire que $a = (f(e_i))_{i=1}^{+\infty} \in l^q$. ■

Exercice 4.2.4 *Traiter le cas* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *en posant,*

$$L_a\left(x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i . \overline{a_i}$$

Pour les espaces de fonctions à puissances intégrables, on a le résultat similaire suivant :

Proposition 4.2.5 *Pour tout* $p \in]1,\ +\infty[$, *l'espace réel* $\left(L^p(\Omega),\ \|.\|_p\right)^*$ *s'identifie à l'espace réel* $\left(L^q(\Omega),\ \|.\|_q\right)$ *où,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Plus précisément,*

$$f \in \left(L^p(\Omega),\ \|.\|_p\right)^* \Longleftrightarrow \exists! g \in \left(L^q(\Omega),\ \|.\|_p\right) : \begin{cases} f(x) = \int_{\Omega} x(t)\, g(t)\, dt \\ \quad et \\ \|f\| = \|g\|_q = \left(\int_{\Omega} |g(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{cases} \tag{4.15}$$

Dans le cas complexe, la fonctionnelle f est de la forme :

$$f(x) = \int_{\Omega} x(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

Pour les espaces de Hilbert, on a le théorème d'identifiaction suivant.

Theorème 4.2.6 *(de représentation de Riesz) Pour tout espace de Hilbert H (réel ou complexe), le dual topologique H^* s'identifie à H.*

Preuve. Soit H un espace de Hilbert (qu'on supposera complexe pour fixer les idées), muni du produit scalaire $\prec .,. \succ$. Pour tout $a \in H$, désignons par f_a l'application définie par :

$$f_a : H \longrightarrow \mathbb{C}; \quad x \longmapsto f_a(x) = \prec x, a \succ \tag{4.16}$$

L'application f_a ainsi définie est linéaire. De plus, pour tout $x \in H$ on d'aprés l'inégalité de Cauchy-schwartz

$$|f_a(x)| = |\prec x, a \succ| \leq \|a\|_H \cdot \|x\|_H \Longrightarrow \|f\| \leq \|a\|_H$$

Par ailleurs,

$$b = \frac{a}{\|a\|_H} \Longrightarrow \|b\|_H = 1 \quad et \quad |f_a(b)| = \|a\|_H$$

Donc, $\|f\| = \|a\|_H$. On en conclut que $f_a \in H^*$.

Considérons maintenant l'application

$$L : H \longrightarrow H^*; \quad a \longmapsto L(a) = f_a \tag{4.17}$$

D'aprés ce qui précéde, L est bien définie, elle est antilinéaire et isométrique donc, injective. Pour montrer que H^* s'identifie à H, il suffit de montrer qu'elle est surjective. Soit donc $f \in H^*$ et montrons qu'il existe $a \in H$ tel que $f = L(a) = f_a$. On supposera que f n'est pas identiquement nulle (car dans le cas contraire, on a $f = L(0_H)$). Soit $N(f) = \{x \in H : f(x) = 0\}$. C'est un sous-espace fermé de H (car f est continue). f n'étant pas identiquement nulle, le sous-espace $(N(f))^{\perp}$ est de dimension 1. Ainsi donc,

$$x \in H \Longrightarrow x = y + \lambda * b, \quad y \in N(f), \quad b \in (N(f))^{\perp} \quad et \quad \|b\|_H = 1 \tag{4.18}$$

Par conséquent,

$$f(x) = \lambda f(b) = \prec x, \overline{f(b)} * b \succ = \prec x, a \succ, \quad a = \overline{f(b)} * b \in H. \tag{4.19}$$

D'où, $f = L(a) = f_a$. ∎

4.3 Espaces réflexifs

Soient X un espace normé et X^* son dual topologique. Comme X^* est aussi un espace normé, on peut donc parler du dual $(X^*)^*$ de X^*. L'ensemble $(X^*)^*$ se note X^{**} et est appelé bidual de X. Notre but dans cette section est d'établir le lien pouvant exister entre un espace normé et son bidual.

Soit donc X un espace normé et X^* son dual topologique. Pour tout $x \in X$, considérons l'application :

$$\widetilde{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}; \quad f \longmapsto \widetilde{x}(f) = f(x) \tag{4.20}$$

On vérifie facilement que l'application $\widetilde{x}$ est linéaire. De plus,

$$\|\widetilde{x}\| = \sup_{\|f\|=1} |\widetilde{x}(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \sup_{\|f\|=1} \|f\|\,\|x\|_X = \|x\|_X. \tag{4.21}$$

C'est à dire que $\|\widetilde{x}\| \leq \|x\|_X$. Par ailleurs, d'après le théorème de Hahn-Banach (conséquences du théorème dans les espaces normés), il existe $f \in X^*$ telle que :

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \|x\|_X \tag{4.22}$$

Donc, $\|\widetilde{x}\| = \|x\|_X$. En d'autres termes, pour tout $x \in X$, $\widetilde{x}$ est un élément de X^{**}.

Soit maintenant l'application :

$$J : X \longrightarrow X^{**}; \qquad x \longmapsto J(x) = \widetilde{x} \tag{4.23}$$

D'après ce qui précède, J est bien définie et isométrique (donc injective). De plus, on vérifie facilement qu'elle est linéaire.

Définition 4.3.1 *L'espace normé X est dit réflexif si l'application J est surjective (c'est à dire bijective). Cela signifie que X s'identifie isométriquement avec son bidual X^{**}.*

Proposition 4.3.2 *Un espace normé réflexif X est nécessairement de Banach.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X. Comme l'application J est une isométrie entre X et X^{**}, elle est uniformément continue. Donc, $(J(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans X^{**} qui est complet. Soit $y = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n)$. Alors,

$$J^{-1}(y) \in X \quad \text{et} \quad J^{-1}(y) = J^{-1}\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n)\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} J^{-1}(J(x_n)) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n.$$

■

Remarque. D'après la proposition que nous venons juste d'établir, les espaces normés non complets fournissent des exemples d'espaces non réflexifs. Il est à noter cependant qu'il aussi existe des espaces de Banach qui ne sont pas réflexifs. Par exemple, les espaces l^1 et $L^1(\Omega)$ ne sont pas réflexifs. En effet, le raisonnement suivi dans la preuve de la proposition 4.2.3, s'applique au cas $p = 1$ ce qui donne $\left(l^1, \|.\|_1\right)^* = \left(l^\infty, \|.\|_\infty\right)$ avec :

$$l^\infty = \left\{x = (x_i)_{i=1}^{+\infty} : \; x_i \in \mathbb{K} \;\; \text{et} \;\; \sup_i |x_i| \prec +\infty\right\} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i| \tag{4.24}$$

On démontre cependant que $\left(l^1, \|.\|_1\right) \subset \left(l^\infty, \|.\|_1\right)^*$ (inclusion stricte).
De même, on peut montrer que $\left(L^1(\Omega), \|.\|_1\right)^* = \left(L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty\right)$ avec :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} : \; f \text{ bornée p.p. sur } \Omega\} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |f(t)| \tag{4.25}$$

■

Proposition 4.3.3 *Tout espace de Hilbert est reflexif.*

Preuve. Il suffit de démontrer que dans ce cas, l'application J est surjective. Soit donc $g \in X^{**}$. On a

$$g : X^* \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad f \longmapsto g(f)$$

Par ailleurs, d'après le théorème de représentation de Riesz 4.2.6,

$$f \in X^* \Longrightarrow \exists! a \in X : \; f = L(a) = \prec ., a \succ \quad \text{et} \quad g(f) = (goL)(a) \tag{4.26}$$

L'application : $x \longmapsto \overline{(goL)(x)}$ définit une fonctionnelle linéaire continue sur X. Donc, toujours d'après le théorème de représentation de Riesz 4.2.6,

$$\exists! b \in X : \; \overline{(goL)(x)} = \prec x, b \succ \quad \forall x \in X \tag{4.27}$$

Par conséquent,

$$\forall f \in X^*, \;\; g(f) = (goL)(a) = \overline{\prec a, b \succ} = \prec b, a \succ = f(b) = \widetilde{b}(f)$$

D'où, $g = J(b)$. ■

Proposition 4.3.4 *Pour tout $p \in \left]1, +\infty\right[$, l'espace l^p et l'espace $L^p(\Omega)$ sont réflexifs.*

Preuve. Découle directement de la preuve de la proposition 4.2.3. ■

4.4 Opérateur Adjoint (Définition et propriétés générales)

Définition 4.4.1 *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces de Banach et* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$*. On appelle adjoint de A l'opérateur* A^* *défini par :*

$$A^* : Y^* \longrightarrow X^*; \qquad f \longmapsto A^*(f) = f \circ A \tag{4.28}$$

Proposition 4.4.2 $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ *et* $\|A^*\| = \|A\|$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que l'opérateur est bien défini et son domaine est l'espace Y^* tout entier. Par ailleurs, pour tous $f,\ g \in Y^*$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} A^*(f + \lambda \bullet g) &= (f + \lambda \bullet g) \circ A = f \circ A + (\lambda \bullet g) \circ A \\ &= f \circ A + \lambda \bullet (g \circ A) = A^*(f) + \lambda \bullet A^*(g) \end{aligned}$$

Donc, l'opérateur A^* est linéaire. D'autre part, pour tout $f \in Y^*$,

$$\|A^*(f)\| = \|f \circ A\| \leq \|f\| . \|A\| \Longrightarrow \|A^*\| \leq \|A\| \tag{4.29}$$

On en déduit que $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Montrons qu'on a en réalité égalité des normes entre A et A^*. En effet, soit $x \in X$ tel que $A(x) \neq 0$ et posons $y = \frac{A(x)}{\|A(x)\|_Y}$. Comme $\|y\|_Y = 1$, il existe d'après le théorème de Hahn-Banach une fonctionnelle linéaire g définie sur Y telle que : $\|g\| = 1$ et $g(y) = \|y\|_Y = 1$. En d'autres termes, $g(A(x)) = \|A(x)\|$. Des relations,

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= g(A(x)) = |(A^*(g))(x)| \leq \|A^*(g)\| \, \|x\|_X \\ \\ &\leq \|A^*\| \, \|g\| \, \|x\|_X = \|A^*\| \, \|x\|_X \end{aligned}$$

découle que $\|A\| \leq \|A^*\|$. ■

Corollaire 4.4.3 *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces de Banach et* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$*. Alors,*

$$A = 0 \Longleftrightarrow f \circ A = 0 \qquad \forall f \in Y^*$$

Preuve. on a :

$$A = 0 \Longleftrightarrow \|A\| = 0 \Longleftrightarrow \|A^*\| = 0 \Longleftrightarrow A^* = 0.$$

D'où,

$$A = 0 \Longleftrightarrow A^*(f) = 0 = f \circ A \quad \forall f \in Y^*$$

■

4.5 Cas des espaces des espaces de Hilbert

Soient maintenant H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert munis des produits scalaires $\prec .,. \succ_1$ et $\prec .,. \succ_2$ respectivement et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Notre but immédiat est de donner une formule simple reliant l'opérateur A et son adjoint A^* avec les produits scalaires $\prec .,. \succ_1$ et $\prec .,. \succ_2$. Soit donc $f \in H_2{}^*$. D'aprés le théorème de représentation de Riesz, f s'identifie à un élément unique $b \in H_2$ tel que :

$$\|f\| = \|b\|_2 \quad et \quad \forall y \in H_2, \quad f(y) = \prec y,\ b \succ_2 \tag{4.30}$$

Par ailleurs, $A^*(f) \in H_1{}^*$. Donc, de la même manière et pour les mêmes raisons, $A^*(f)$ s'identifie à un élément unique $a \in H_1$ tel que :

$$\|f\| = \|a\|_1 \quad et \quad \forall x \in H_1, \quad A^*(f)(x) = \prec x,\ a \succ_1 \tag{4.31}$$

Comme $A^*(f)(x) = (f \circ A)(x) = f(A(x))$ alors, on obtient compte des identications $f = b$ et $a = A^*(f)$:

$$\forall x \in H_1, \qquad \prec A(x),\ b \succ_2 = \prec x,\ A^*(b) \succ_1$$

Définition 4.5.1 *Soient maintenant H_1 et H_2 deux espaces munis des produits scalaires $\prec .,. \succ_1$ et $\prec .,. \succ_2$ respectivement et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors l'opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H_2,\ H_1)$ et est défini par la relation :*

$$\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2 : \ \prec A(x),\ y \succ_2 = \prec x,\ A^*(y) \succ_1 . \tag{4.32}$$

Remarque. Avant de passer à des exemples illustratifs, notons que dans le cas hilbertien, l'adjoint de l'opérateur nul est l'opérateur nul et que l'adjoint de l'dentité est l'identité elle-même. ■

Exemples.

1. Considérons maintenant l'opérateur linéaire :

$$B : l^2(\mathbb{C}) \longrightarrow l^2(\mathbb{C});\quad B(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ..., x_n, ...).$$

Il est clair que $B \in \mathcal{L}\left(l^2(\mathbb{C})\right)$ et que $\|B\| = 1$. Comme le produit scalaire dans $l^2(\mathbb{C})$ est donné par la formule :

$$\prec x,\ y \succ = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$$

alors de la relation

$$\prec B(x),\ y \succ = \prec x,\ B^*(y) \succ \quad \forall x,\ y \in l^2(\mathbb{C}),$$

découle que,

$$\prec x,\ B^*(y) \succ = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+1}\overline{y_k} = \sum_{p=2}^{+\infty} x_p \overline{y_{p-1}} = x_1.0 + \sum_{p=2}^{+\infty} x_p \overline{y_{p-1}}$$

D'où,

$$B^*(y) = (0,\ y_1,\ y_2, ..., y_n, ...) \tag{4.33}$$

2. Soit l'opérateur linéaire borné

$$C : L^2_{[0,\ 1]} \longrightarrow L^2_{[0,\ 1]};\quad C(f)(x) = i\int_x^1 f(t)\,dt$$

Le produit scalaire dans $L^2_{[0,\ 1]}$ est donné par la formule :

$$\prec f,\ g \succ = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\prec\ C(f),\ g \succ &= \int_0^1 (C(f))(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 \left(i\int_x^1 f(t)\,dt\right)\overline{g(x)}dx \\
&= i\int_0^1\int_x^1 f(t)\overline{g(x)}dtdx = i\int_0^1\int_0^t f(t)\overline{g(x)}dxdt \\
&= \int_0^1 f(t)\left(i\int_0^t \overline{g(x)}dx\right)dt = \int_0^1 f(t)\left(\int_0^t \overline{(-ig(x))}dx\right)dt \\
&= \int_0^1 f(t)\overline{\left(-i\int_0^t g(x)\,dx\right)}dt = \int_0^1 f(x)\overline{\left(-i\int_0^x g(t)\,dt\right)}dx
\end{aligned}$$

Donc,

$$\prec C(f)\,,\ g \succ = \prec f,\ C^*(g) \succ \Longrightarrow C^*(g)(x) = -i\int_0^x g(t)\,dt$$

■

Proposition 4.5.2 *Soient H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert. Alors,*

1. $A, B \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$ et $\lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow (A + \lambda \bullet B)^* = A^* + \overline{\lambda} \bullet B^*$.
2. $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$ et $B \in \mathcal{L}(H_2,\ H_3)$ $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$.
3. $A \in Iso(H_1,\ H_2) \Longrightarrow \left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$.

Preuve.

1. $\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2$

$$\begin{aligned} \prec &\ (A + \lambda \bullet B)(x)\,,\ y \succ_2 = \prec A(x)\,,\ y \succ_2 + \lambda \prec B(x)\,,\ y \succ_2 \\ = &\ \prec x,\ A^*(y) \succ_1 + \lambda \prec x,\ B^*(y) \succ_1 = \prec x,\ A^*(y) \succ_1 + \prec x,\ \overline{\lambda} B^*(y) \succ_1 \\ = &\ \prec x,\ A^*(y) + \overline{\lambda} B^*(y) \succ_1 = \prec x,\ \left(A^* + \overline{\lambda} B^*\right)(y) \succ_1 \end{aligned}$$

2. Soient $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$ et $B \in \mathcal{L}(H_2,\ H_3)$. Alors, $\forall x \in H_1,\ \forall z \in H_3$

$$\begin{aligned} \prec &\ (B \circ A)(x)\,,\ z \succ_3 = \prec B(A(x))\,,\ z \succ_3 = \prec A(x)\,,\ B^*(z) \succ_2 \\ = &\ \prec x,\ A^*(B^*(z)) \succ_1 = \prec x,\ (A^* \circ B^*)(z) \succ_1 \end{aligned}$$

3. Soit $A \in Iso(H_1,\ H_2)$. Alors,

$$\begin{cases} Id_{H_1} = A^{-1} \circ A \\ Id_{H_2} = A \circ A^{-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Id_{H_1} = \left(A^{-1} \circ A\right)^* = A^* \circ \left(A^{-1}\right)^* \\ Id_{H_2} = \left(A \circ A^{-1}\right)^* = \left(A^{-1}\right)^* \circ A^* \end{cases} \Longrightarrow \left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$$

■