FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Département de mathématiques

Année universitaire : 2021-2022

Enseignant : Dr.Melouka REMIL

جامعة غليزان

RELIZANE UNIVERSITY

Module : Analyse 4

Niveau : $2^{ème}$ **année**

Cour 2 : Calcul différentiel

0.1 Différentiabilité

L'unique dérivée d'une fonction d'une variable réelle, lorsqu'elle existe, est liée aux variations de la fonction tandis que la variable parcourt l'axe des abscisses. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de $\mathbb{R}^3$, la situation est très différente. En effet, l'axe réel n'offre que deux types de mouvements possibles a gauche et a droite tandis que le plan $\mathbb{R}^2$ possède une infinité de directions. Il peut s'avérer intéressant d'étudier comment une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan. Pour cela, considérons d'abord la direction horizontale. Prenons le point (x_0, y_0) du domaine de f . Son image est $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ de $\mathbb{R}3$, comporte le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = y_0$ est la courbe d'équation $z = f(x, y_0)$ de $\mathbb{R}^3$. Le point (x_0, y_0) étant fixé, on peut alors interpréter cette courbe comme le graphe de la fonction f_{y_0} d'une seule variable définie par $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$. Si f_{y_0} est dérivable en x_0, alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de la fonction f lorsque (x, y) se déplace le long de la droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ passant par le point (x_0, y_0).

Rappel 3.1 (Dérivée)

Soit $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. La dérivée de f au point $a \in I$ est donnée par :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $a \in U$. l'expression précédent n'a pas de sens parce que on ne peut pas diviser par un vecteur. Par contre, si on fixe toutes les composantes du vecteur x sauf une, on peut définir les dérivées partielles de cette fonction f de la façon suivante.

Definition 0.1.1. *(Dérivée partielle) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de plusieurs variables et $a \in U$, La dérivée partielle de f en a par rapport à la i ème variable est la limite, si elle existe*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n)) - f((a_1, ..., a_n))}{h}$$
$$= \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., x_i, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{x_i - a_i}$$

Pour une fonction de deux variables $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un point $a = (x_0, y_0) \in U$ les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) se calculent de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

On les note parfois $\partial_x f, \partial_y f$.

Exemple 0.1.2.

1. *si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = x^2 + 2xy$, alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2a + 2b, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2a$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

— *Si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy)}{(x^2 + y^2)^2}\bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{-y_0 x_0^2 + y_0^3}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{-x_0 y_0^2 + x_0^3}{(y_0^2 + x_0^2)^2}$$

— *Si* $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

De même on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0$$

alors f *admet des dérivées partielles au point* $(0,0)$*.*

Remarque 0.1.3. *Dans cet exemple la fonction* f *possède des dérivées partielles au point* $(0,0)$ *en revanche* f *n'est pas continue au point* $(0,0)$*.*

Venons maintenant au cas général d'une fonction vectorielle de plusieurs variables réelles. La définition est similaire.

Definition 0.1.4 (Dérivée partielle d'une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)**.** *Soient* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une fonction vectorielle de plusieurs variables et* $a \in U$*. La dérivée partielle de* f *en* a *par rapport à la* i^{me} *variable est la limite, si elle existe :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h} \\ &= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\Big) \end{aligned}$$

Remarque 0.1.5. *Une dérivée partielle d'une fonction vectorielle est un vecteur.*

Exemple 0.1.6. *Les dérivées partielles de la fonction* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $g(x,y,z) = (\sin(x^2y - z), \cos(x^2 - yz))$ *sont donné par :*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin(x^2y - z)\Big), \frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos(x^2 - yz)\Big)\right]$$
$$= \Big(\cos(x^2y - z)\Big)\frac{\partial}{\partial x}(x^2y - z), \Big(\sin(x^2 - yz)\Big)\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - yz)$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = (2xy\cos(x^2y - z), 2x\sin(x^2 - yz))$$

Avec la même procédure on trouve

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \Big(x^2\cos(x^2y-z), z\sin(x^2-yz)\Big),$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \Big(-\cos(x^2y-z), y\sin(x^2-yz)\Big).$$

0.1.1 Dérivées partielles suivant un vecteur

Definition 0.1.7. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction vectorielle de plusieurs variables et $a \in U$. la dérivée partielle de f en a suivant le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est la limite si elle existe :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$$

on la note $\partial_v f(a)$.

Exemple 0.1.8.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy^2+3x \end{array}$$

La dérivée suivant tout un vecteur $v=(v_1,v_2)$ de la fonction f au point $a=(0,0)$ existe en effet :

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(hv)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1,hv_2)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3v_1v_2^2+3hv_1}{h} = 3v_1$$

Exemple 0.1.9. *La dérivée directionnelle de l'application*

$$\begin{array}{rccc} f=(f_1,f_2): & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (xy^2+3x, yz^2) \end{array}$$

dans la direction $v=(v_1,v_2,v_3)$ et au point $a=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\partial_v f(a) = ((3+y^2)v_1 + 2xyv_2, z^2v_2 + 2zyv_3)$$

0.1.2 Propriétés des dérivées partielles

Les dérivées partielles d'une fonction qui est obtenue par des opérations algébriques sur d'autres fonctions (somme, produit, fraction) suivent les mêmes règles. Les dérivées partielles d'une composition de fonctions sont plus compliquées.

Dérivée d'une fonction composée

Definition 0.1.10 (Dérivées des fonctions composées (chain rule))**.**

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^m \qquad\qquad g : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x \mapsto f(x) \qquad\qquad y \mapsto g(y)$$

$$h : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$y \mapsto h(x) = g(f(x)).$$

es fonctions telles que les n dérivées partielles de chacune des m composantes de f en $x \in U$ existent et g en $f(x_0) \in D$ soit une fonction continûment dérivable (i.e. ses dérivées partielles existent et sont continues) alors pour tout $i = 1, ..., n$; et pour tout $j = 1, ..., p$ on a :

1. chaque h_j possède une dérivée partielle par rapport à x_i au point x_0,

2. on a la formule suivante pour $i = 1, ..., n$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(x_0))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0) + ... + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(x_0))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0).$$

Exemple 0.1.11.

pour les fonctions $z = x\mathbf{e}^{xy}$, $x = t^2$, $y = t^{-1}$, on a $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$, calculons $\frac{dz}{dt}$ La chain rule donne

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= \left(\mathbf{e}^{xy} + yx\mathbf{e}^{xy}\right)(2t) + x^2\mathbf{e}^{xy}\left(-t^{-2}\right)\\ &= 2t\left(\mathbf{e}^{xy} + yx\mathbf{e}^{xy}\right) - t^{-2}x^2\mathbf{e}^{xy}\end{aligned}$$

Différentiabilité

Théorème 0.1.12. [1] *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f *est dérivable au point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $\exists A \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \alpha(h)h$, *avec* $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$

Nous allons maintenant généraliser cette notion au cas des fonctions vectorielles de plusieurs variables réelles.

Definition 0.1.13 (Différentiable au point a)**.**
Soient U *un ouvert inclus dans* $\mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application et* $a \in U$. *On dit que* f *est différentiable au point* a *si et seulement s'il existe une application linéaire* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *vérifiant* $f(a + h) = f(a) + L(h) + \alpha(h)\|h\|$. *Avec* $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$.
L'application linéaire L *est alors appelée la différentielle de* f *en* a. *on la note* $D_a f$.

Remarque 0.1.14. *dans la définition précédente,* $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est une fonction vectorielle de plusieurs variables.*

Definition 0.1.15. *L'application* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est dite différentiable si* f *est différentiable en tout point* $a \in U$.

Proposition 0.1.16. [8] *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *et* $a \in U$. f *est différentiable en* a *si et seulement si* f *est dérivable en* a. *on a alors :*

$$D_a f : h \to f'(a).h.$$

Démonstration. Les applications linéaires $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les applications de la forme $h \to \lambda h$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Proposition 0.1.17. *Si f est différentiable en a, alors f est continue en a. .*

Démonstration.

$$f(x) = f(a) + D_a f(x-a) + \|x-a\|\alpha(x-a).$$

Avec $\alpha(x-a) \longrightarrow 0$ lorsque $x \to a$ $\square$

Différentielle et dérivées partielles

Proposition 0.1.18. [1]

Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable en $a \in U$. La différentielle de f en a est donnée par

$$D_a f : h \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Pour montrer la différentiabilité en un point, dans la pratique on utilise la définition suivante

Definition 0.1.19. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une application linéaire continue cette application est la différentielle en a telle que $D_a f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ avec*

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - D_a f(\mathbf{a}).\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Exemple 0.1.20. *Montrer d'après la définition que la fonction :$f(x,y) = x^2 + y^2$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2$. a fonction f est différentiable au point$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi*

$$\lim_{(\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})\to(0,0)} \frac{f((\mathbf{x_0},\mathbf{y_0}) + (\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})) - f((\mathbf{x_0},\mathbf{y_0})) - D_a f((\mathbf{x_0},\mathbf{y_0})).(\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})}{\|(\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})\|} = 0$$

$$\lim_{(\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})\to(0,0)} \frac{f((\mathbf{x_0},\mathbf{y_0}) + (\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})) - f(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0}) - h_1\partial_x f(x_0,y_0) - h_2\partial_y f(x_0,y_0)}{\|(\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})\|} = 0$$

puisque

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = x_0^2 + h_1^2 + 2x_0h_1 + y_0^2 + h_2^2 + 2y_0h_2$$

$$\partial_x f(x_0,y_0) = 2x_0, \quad \partial_y f(x_0,y_0) = 2y_0$$

Alors on a

$$\lim_{(\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})\to(0,0)} \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(\mathbf{h_1},\mathbf{h_2})\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0$$

Exemple 0.1.21. *Une fonction différentiable avec des dérivées partielles discontinues Considérons la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textit{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

f *est évidemment continu sur* $R^2 - (0,0)$. f *est également continu à* $(0,0)$ *comme pour* $(x,y) \neq (0,0)$

$$\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq x^2+y^2 = \|(x,y)\|^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

f *est également différentiable du tout* $(x,y) \neq (0,0)$. *En ce qui concerne la différentiabilité à* $(0,0)$, *nous avons*

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \|(x,y)\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Les dérivées partielles de f *sont nulles à l'origine. Par exemple, la dérivée par rapport à* x *est calculée par*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/|h|)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\sin(1/|h|) = 0. \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Si $(x,y) \neq [0,0)$ *on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ces deux dérivés oscillent énormément près de l'origine. Par exemple, la dérivée par rapport à x *le long de l'axe* x *est* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2xsin(1/|x|)?sign(x)cos(1/|x|)$,
pour $x \neq 0$, *où le* $signe(x)$ *est* 1 *selon le signe de* x. *Dans ce cas, le terme sinus passe à zéro près de l'origine mais le terme cosinus oscille rapidement entre* -1 *et* $+1$. *D'où* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est discontinu à l'origine. De la même manière, on peut montrer que* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est discontinu à l'origine.*

Exemple 0.1.22. *Une fonction ayant des dérivées partielles non différentiables Nous considérons maintenant la fonction* g *Défini par*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *nous avons* $x^2 \leq x^2 + y^2$ *d'où* $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$. *De même,* $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ *et donc* $|g(x,y)| \leq \|(x,y)\|$. *Cette dernière inégalité étant également valable à l'origine. Par conséquent,* g *est une fonction continue.*
Les dérivées partielles de g *égales à zéro à l'origine.*
Par conséquent, si g *était différentiable à l'origine, sa dérivée serait égale à zéro et on a*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|g(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0$$

Ce n'est pas le cas car pour $x \neq 0$ *on a* $\dfrac{|g(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \dfrac{1}{2}$. *Enfin* f *n'est pas différentiable. Nous avons aussi*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = sign(y)$$

ce qui prouve que $\frac{\partial g}{\partial x}$ *n'est pas continu à l'origine.*

0.1.3 Différentiabilité, Continuité et dérivées partielles

Proposition 0.1.23. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en un point $x \in U$ alors f est continue au point x.*

Démonstration. Avec les notations de la définition 3.1.14 on a $h \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|D_a f(h)\| + \|h\|\|\alpha_a(h)\| \leq \|h\|.|||D_a(f)||| + \|\alpha_a(h)\| \to_{h \to 0} 0.$$

□

Proposition 0.1.24. *Si f est différentiable en a, alors elle est dérivable en a suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et cette dérivée vaut $D_a f(v)$.*

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit on a

$$f(a+tv) = f(a) + D_a f(tv) + \|tv\|\alpha_a(tv) = f(a) + tD_a f(v) + o_{t \to 0}(t).$$

Cela prouve que $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 de dérivée $D_a f(v)$. □

Proposition 0.1.25. *On suppose que f est différentiable en a. Alors toutes les dérivées partielles de f existent au point a et pour tout $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$D_a f(v) = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Démonstration. Le fait que les dérivées partielles de f existent au point a. Par linéarité de $D_a f$ on a

$$D_a f(v) = D_a f\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} v_k D_a f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

□

0.1.4 Opérations élémentaires

Théorème 0.1.26. *Si $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est constante, alors f est différentiable en tout point $a \in U$ et la différentielle en a est l'application nulle.*

Démonstration. Pour tout $a \in U$, on a $f(a+h) = f(a) + 0$ □

Théorème 0.1.27. [8]

si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est linéaire, alors* f *est différentiable sur* U *et pour tous* $x \in U$ *et* $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x f(h) = f(h)$$

Théorème 0.1.28 (Opérations élémentaires)**.**

Soit U *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n$.*Soient* $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ *et* $\lambda : U \to \mathbb{R}$ *des fonctions différentiables en* $a \in U$. *Alors,*

1. $\lambda f + g$ *est différentiable en* a, *et on a :*
   $D_a(\lambda f + g)(h) = \lambda D_a(f)(h) + D_a(g)(h)$.
2. *de même* fg *est différentiable en* a, *et on a :*
   $D_a(fg)(h) = g(a) D_a(f)(h) + f(a).D_a(g)(h)$.

Démonstration. Pour tout $a \in U$, on a

1.

$$\begin{aligned}(f+g)(a+h) =& f(a+h) + g(a+h) = (f(a) + D_a f(h) \\ &+ \|h\|\alpha(h)) + (g(a) + D_a g(h) + \|h\|\alpha(h)) \\ &= (f+g)(a) + (D_a f + D_a g)(h) + \|h\|\alpha(h)).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(fg)(a+h) =& f(a+h) g(a+h) = (f(a) + D_a f(h) \\ &+ \|h\|\alpha(h)).(g(a) + D_a g(h) + \|h\|\alpha(h)) \\ &= (fg)(a) + (g(a) D_a(f)(h) + f(a).D_a(g)(h)(h)(h) + \|h\|\alpha(h)).\end{aligned}$$

En effet :

$$|D_a f(h)| \leq |||D_a f|||.\|h\|, \quad |D_a g(h)| \leq |||D_a g|||.\|h\|$$

Donc

$$D_af(h)D_ag(h) = \|h\|\alpha(h),$$

avec $\alpha(h)) \to_{h\to 0} 0$

$\square$

Théorème 0.1.29 (Fonctions composée)**.** *. Soient $U \in \mathbb{R}^n$ et $V \in \mathbb{R}^n$. Si $f : U \to V$ est différentiables en a et si $g : V \to \mathbb{R}^m$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en a, et on a*

$$D_a(g \circ f) = D_{f(a)}g \circ D_af$$

Démonstration. Pour tout $a \in U$, on a

$$f(a+h) = f(a) + D_af(h) + \|h\|\alpha_1(h)$$

$$g(a+k) = g(a) + D_ag(k) + \|k\|\alpha_2(k)$$

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(a+h) =& g(f(a) + D_af(h) + \|h\|\alpha_1(h)) \\
&= g(f(a)) + D_f(a)g(D_af(h) + \|h\|\alpha_1(h)) \\
&+ \|D_af(h) + \|h\|\alpha_1(h)\|\alpha(D_af(h) + \|h\|\alpha_1(h)) \\
&= g(f(a)) + D_f(a)g(D_af(h)) + D_f(a)g(\alpha_1(h)) + \alpha_2(D_af(h) + \|h\|\alpha_1(h))
\end{aligned}$$

Notons que :

$$|D_f(a)g(\alpha_1(h))| \leq |||D_f(a)g|||.\|\alpha_1(h)\| = \|h\|\alpha(h)$$

De plus :

$$|D_af(h)| \leq |||D_af|||.\|h\|,$$

ce qui implique que :

$$\|\alpha_2(D_af(h) + \|h\|\alpha_1(h))\| = (\|D_af(h) + \|h\|\alpha_1(h)\|)\alpha(h)$$

avec $\alpha(h)) \to_{h\to 0} 0$

Alors

$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a)) + D_f(a)g(D_af(h)) + \|h\|\alpha_1(h)\|)\alpha(h)$$

avec $\alpha(h)) \to_{h\to 0} 0$ □

0.1.5 Vecteur gradient et matrice jacobienne

Definition 0.1.30 (Ve

vecteur

On suppose dans ce paragraphe que $m = 1$, c'est-à-dire que f est à valeurs réelles.

Proposition 0.1.31. *Pour tout $a \in U$ le gradient $\nabla f(x)$ est l'unique vecteur tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$D_af(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$$

où pour deux vecteurs $u = (u_1, ..., u_n)$ et $v = (v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on a noté $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire usuel $\sum_{i=1}^{n} u_j v_j$.

Démonstration. C'est clair d'après la proposition 3.1.19. □

On revient au cas général où f peut être à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$.

Definition 0.1.32 (Matrice jacobienne)**.**
La matrice des dérivées partielles de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s'appelle la matrice jacobienne ou la Jacobienne de f. On la note $J_f(a), a \in U$, elle a n colonnes et m lignes :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ ... & & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Definition 0.1.33. *Si la matrice jacobienne est carrée ($n = m$), son déterminant $Jacf = \det J_f$ s'appelle le jacobien de f.*

Exemples

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^2y$. Alors

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix}$$

- Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $h(u,v) = (u^2v, 3u)$. Alors

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & 2u \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Jach(u,v) = -3u^2$$

- Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (2t, t^3+1)$. Alors

$$J_\gamma(t) = \quad {}^t\begin{pmatrix} 2 & 3t^2 \end{pmatrix}$$

- Jacobien du changement de variables en coordonnées cylindriques :

$$h(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

On a

$$J_h(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Jach(\rho,\varphi,z) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

- Jacobien du changement de variables en coordonnées sphériques :

$$h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

On a

$$J_h(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
Jach(r,\varphi,\theta) = & -r^2\cos\theta\Big(\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta+\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Big) \\
& -r\sin\theta\Big(r\cos^2\varphi\sin^2\theta+r\sin^2\varphi\sin^2\theta\Big) \\
= & -r^2\sin\theta\cos^2\theta-r^2\sin^3\theta \\
= & -r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

Cas des applications à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Pour calculer la différentielle d'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, on est amené à reproduire le même processus calculatoire pour chaque application coordonnée $f_i, ..., f_m$ qui sont des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons une application f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable en $a \in U$. Pour tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$D_af : h \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

La matrice jacobienne en a est réduite à une matrice à 1 ligne et n colonnes ; la relation précédente peut aussi s'écrire

$$D_af(h) = J_f(a). \quad {}^t h$$

0.2 Fonctions continûment différentiables

Dans ce chapitre, on a commencé par définir les dérivées partielles. Puis on a dit que ce n'était pas une notion de dérivée satisfaisante, en particulier parce que l'existence des dérivées partielles n'implique même pas la continuité. On a ensuite défini la notion de différentiabilité, qui elle est satisfaisante. C'est une notion plus forte, puisque l'existence de la différentielle implique en particulier l'existence des dérivées partielles. Malheureusement c'est aussi une notion plus compliquée, alors que les dérivées partielles ne sont finalement que des dérivées usuelles. Le but de ce paragraphe est maintenant d'introduire les fonctions de classe C^1. Cela généralise la notion connue en dimension 1. Mais le véritable intérêt est que c'est une notion plus forte que la différentiabilité, et pourtant plus simple à vérifier. Ainsi, bien souvent, pour montrer qu'une fonction est différentiable, on montrera plutôt qu'elle est de classe C^1 (tout en gardant à l'esprit que ce n'est pas parce qu'une fonction n'est pas C^1 qu'elle n'est pas différentiable).

Théorème 0.2.1. [8] *Si toutes les dérivées partielles de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existent et sont des fonctions continues sur U, alors f est différentiable.*

Cela introduit la définition suivante :

Definition 0.2.2. *On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continument différentiable ou (de classe C^1), si toutes les dérivées partielles de f existent et sont des fonctions continues sur U.*

Exemple 0.2.3. *La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$(x, y) \mapsto xy^2 + 3x$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$$

sont existent et continues.

Exemple 0.2.4. *L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par*

$$(x, y, z) \mapsto (xy^2 + 3x, z^2)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y^2 + 3, 0),\ \frac{\partial f}{\partial y} = (2xy, 0)\ et\ \frac{\partial f}{\partial z} = (0, 2z)$$

sont existent et continues.

Comment établir la différentiabilité d'une application de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$?

Pour établir qu'une application est différentiable en en utilisant la définition n'est pas toujours aisé. Tout comme pour étudier la dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour cela dans la pratique on peut décomposer la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en sommes, produits, quotients ou composées d'applications dont il est plus aisé d'établir la différentiabilité et utiliser les propriétés algébriques. Et de plus on peut

Exemple 0.2.5. *Montrons que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textit{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas

- Si $(x,y) \neq (0,0)$ on a f est différentiable comme composé fonctions différentiables, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- Si $(x,y) = (0,0)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/|h|)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\sin(1/|h|) = 0. \end{aligned}$$

Similaire on trouve
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

on a les dérivées partielles existent sur $\mathbb{R}^2$. De plus les dérivées partielles au point $(0,0)$ sont continues alors f est différentiable $(x,y)=(0,0)$.

Donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Mais si $(x,y)\neq(0,0)$ les dérivées partielles ne sont pas continues. En effet $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=2x\sin(1/|x|)-\mathrm{sign}(x)\cos(1/|x|)$. Alors f mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

0.3 Fonction de classe C^k

Notion de dérivées d'ordre supérieur

Definition 0.3.1. *Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et k un entier naturel non nul.*

1. *On dit que f est de classe C^k si f est k fois différentiable et si $D_k f$ est continue.*
2. *On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^r pour tout $r\in\mathbb{N}^*$.*

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles, ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f . On peut, de la même façon, introduire les dérivées partielles d'ordres supérieurs.

Definition 0.3.2. *Soit la fonction $f : U\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a 2 dérivées partielles d'ordre 1 et donc 4 dérivées partielles d'ordre 2 ainsi notées :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Exemple 0.3.3.

Considérons $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-x^2y^2}$

Nous calculons des deux dérivés de premier ordre.

$$f_x(x,y) = \mathbf{e}^{-x^2y^2} - 2x^2y^2\mathbf{e}^{-x^2y^2}$$
$$f_y(x,y) = -2yx^3\mathbf{e}^{-x^2y^2}.$$

Maintenant, calculez les deux dérivées partielles mixtes du second ordre

$$f_{xy}(x,y) = -2yx^2\mathbf{e}^{-x^2y^2} - 4x^2y\mathbf{e}^{-x^2y^2} + 4x^4y^3\mathbf{e}^{-x^2y^2} = -6x^2y\mathbf{e}^{-x^2y^2} + 4x^4y^3\mathbf{e}^{-x^2y^2}$$
$$f_{yx}(x,y) = -6yx^2\mathbf{e}^{-x^2y^2} + 4y^3x^4\mathbf{e}^{-x^2y^2}.$$

Lien entre dérivées partielles et différentielle d'ordre 2

La différentielle de $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $a \in \mathbb{R}^n$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est s'exprime à l'aide des dérivées partielles de f par

$$D_a f : h \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

La différentielle d'ordre 2 est donnée par

$$D_a^2 f : (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Théorème 0.3.4. [1] *[Théorème de Schwarz]*

Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et $a \in U$.

1. *Si pour $(i, j) \in (\{1, ..., n\})^2$, les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont des applications continues en $a \in U$ alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

2. *Si l'application f est de classe C^2 sur U alors pour $(i, j) \in 1, ..., n^2$ on a*

$$\forall a \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Exemple 0.3.5.

Considérons $f(x, y) = \cos(2x) - x^2 \mathbf{e}^{5y} + 3y^2$

Nous calculons des deux dérivés de premier ordre.

$$f_x(x, y) = -2\sin(2x) - 2x\mathbf{e}^{5y}$$
$$f_y(x, y) = -5x^2\mathbf{e}^{5y} + 6y$$

Maintenant, calculez les deux dérivées partielles mixtes du second ordre

$$f_{xx} = -4\cos(2x) - 2\mathbf{e}^{5y}$$
$$f_{xy} = -10x\mathbf{e}^{5y} = f_{yx}$$
$$f_{yy} = -25x^2\mathbf{e}^{5y} + 6$$

et donc le théorème de Schwarz a été vérifié pour cette fonction.

Exemple 0.3.6.

Considérons $f(x, y) = f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Nous calculons des deux dérivés de premier ordre si $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{y^4+4x^2y^2-x^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Au point $(0,0)$ *on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

On en déduit que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*. On va prouver que* f *ne peut pas être de classe* C^2 *en niant le théorème de Schwarz. En effet, on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1,$$

Les deux dérivées partielles croisées n'étant pas égales, la fonction ne peut pas être de classe C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*.*

Proposition 0.3.7. [1] *Soit* f *une application d'un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^m$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *. Si toutes les dérivées partielles d'ordre* k *de* f *sont continues sur* U *alors l'application* f *est une application de classe* C^k *sur* U*.*

Cas des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$

Definition 0.3.8. *Soit* f *une application définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, supposée deux fois différentiable en* $a \in U$*. La matrice hessienne de* f *en* a *est la matrice définie par :*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ ... & & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$